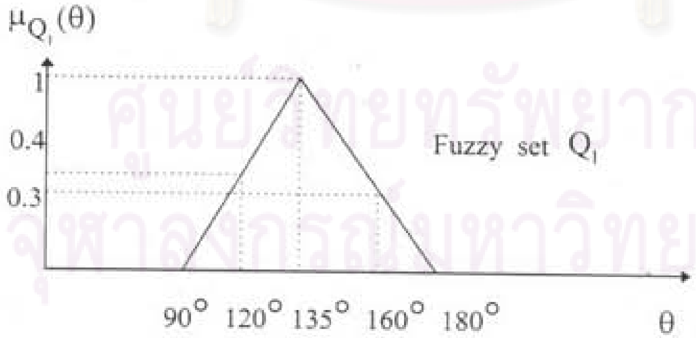
บทที่ 2

ฟัซซีเซต (Fuzzy Set)

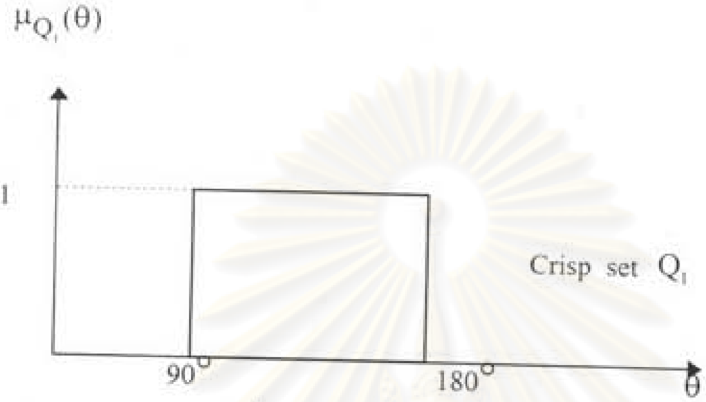
ทฤษฎีเซตในระบบเดิมจะมีค่าความเป็นสมาชิก คือ "เป็น" หรือ "ไม่เป็น" สมาชิกเท่านั้น ซึ่งจะเปรียบเทียบในเชิงดิจิตอลแล้ว คือ มีค่าเป็น "1" หรือ "0" เพียง 2 ค่าเท่านั้น ไม่สามารถที่จะมีค่าระหว่างนั้นได้ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วการตัดสินใจว่าจะ "เป็น" หรือ "ไม่เป็น" สมาชิกนั้นทำได้ยาก เนื่องจากอาจจะมีบางส่วน "เป็น"และบางส่วน "ไม่เป็น" ก็เป็นได้

ในปี คศ.1965 Lotfi Zaden ได้คิดค้นระบบเซตขึ้นมาใหม่ คือระบบฟัซซีเซต (Fuzzy Set) ซึ่งมีความแตกต่างจากระบบเซตเดิม คือ ค่าความเป็นสมาชิกของเซตนี้จะมีค่าตั้งแต่ 0 จนถึง 1 ขึ้นอยู่กับตำแหน่งสมาชิกในเซตนั้นๆ โดยตำแหน่งที่มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 คือ ตำแหน่งที่อยู่ใน เซตแล้วแสดงความเป็นสมาชิกสูงสุด เช่น Fuzzy Set Q_1 (Quarter 1) ที่ θ เท่ากับ 135° จะมีค่าความเป็นสมาชิก (Membership Function) เท่ากับ 1 ในขณะที่ θ เท่ากับ 160° จะมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.3 และ θ เท่ากับ 120° จะมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.4 ส่วนตำแหน่งที่มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0 คือตำแหน่งที่ไม่ได้เป็นสมาชิกในเซต เช่น $\theta = 90^\circ$ หรือ $\theta = 180^\circ$ คือ คือ ตำแหน่งที่มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0 (มุม θ คือ มุมที่วัดเทียบกับแกนในแนวดิ่ง โดยเริ่มที่ตำแหน่งต่ำสุดของระบบ)



รูปที่ 2.1. ฟัซซีเซต

ส่วนในระบบเซตเดิม (ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่า เซตที่มีขอบเขต (Crisp Set))จะมีลักษณะของเซตดังในรูปด้านล่าง



รูปที่ 2.2. เซตที่มีขอบเขต (Crisp set)

2.1 ทฤษฎีฟัซซีเซต

เนื่องจาก ฟัซซีเซตก็เป็นเซตชนิดหนึ่ง จึงต้องมียูนิเวอร์ส (Universe) ของเซตเช่นกัน ฟัซซีเซตจะมีคุณลักษณะอยู่ 2 ประการที่ใช้ชี้ว่าเป็น ฟัซซีเซตใด คือ

1. สมาชิกของเซต
2. ค่าความเป็นสมาชิกของเซต สำหรับแต่ละสมาชิกของเซต

จะสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

$$F = \{(u, \mu_F(u)) / u \in U\}$$

โดยที่ u คือ สมาชิกในฟัซซีเซต

$\mu_F(u)$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกของเซต สำหรับแต่ละสมาชิกของเซต

U คือ ยูนิเวอร์สของเซต

และถ้า U มีค่าต่อเนื่อง ฟัซซีเซต F จะเขียนในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$F = \int_U \mu_F(u) / u$$

แต่ถ้า U ไม่ต่อเนื่อง ฟัซซีเซต F จะสามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$F = \sum \mu_F(u_i) / u_i \quad \text{หรือ}$$

$$F = \frac{\mu_F(u_1)}{u_1} + \frac{\mu_F(u_2)}{u_2} + \ldots + \frac{\mu_F(u_i)}{u_i}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\int$ และ $\sum$ จะเป็นการสื่อถึง การยูเนียนเซต (Union Set) ทางฟัซซีเซตไม่ใช่การอินทิกรัล หรือ การบวกทางพีชคณิต และ สัญลักษณ์ / ก็เป็นสัญลักษณ์ที่เชื่อมโยงระหว่างสมาชิกของเซต กับ ค่าความเป็นสมาชิกของแต่ละสมาชิก

2.1.1 เซตสนับสนุน (Support Set)

เซตสนับสนุนของฟัซซีเซตใดๆ คือ เซตที่มีขอบเขต (Crisp Set)ที่มีสมาชิกเดียวกันกับสมาชิกในฟัซซีเซตนั้นๆในยูนิเวอร์ส U ที่มีค่าความเป็นสมาชิกมากกว่า 0 และถ้าเซตสนับสนุนของฟัซซีเซตใดมีสมาชิกเพียงค่าเดียวแล้วจะเรียกฟัซซีเซตนั้นว่า เซตฟัซซีซิงเกิลตัน (Fuzzy Singleton)

2.1.2 α- Cut เซตของฟัซซีเซต

เซต α-cut นี้จะเป็นเซตที่มีขอบเขตที่มีการนำสมาชิกมาจากฟัซซีเซต โดยที่สมาชิกที่นำมาจะต้องมีค่าความเป็นสมาชิกสูงกว่าค่า α และถ้าจุดที่มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.5 จุดนั้นเรียกว่า จุดครอสโอเวอร์ (Cross over point)

2.1.3. **บรรทัดฐาน (Normalization)**

ฟัซซีเซตใดที่มีค่าความเป็นสมาชิกสูงสุดของเซตเท่ากับ 1 จะเรียกเซตนั้นว่าเป็นเซตที่มีภาวะปกติ หรือมีบรรทัดฐาน (Normalized)

2.1.4 **ค่าความเป็นสมาชิก (Membership functions)**

ค่าความเป็นสมาชิกจะมีสัญลักษณ์คือ μ และจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่างๆที่สมาชิกของเซตอยู่ โดยขึ้นอยู่กับรูปแบบของเซตที่กำหนด รูปแบบของเซตที่ใช้โดยทั่วไปจะมีหลายรูปแบบ แต่ที่นิยมใช้สำหรับระบบควบคุมมี 3 รูปแบบ

1. ฟังก์ชันรูปแบบ S

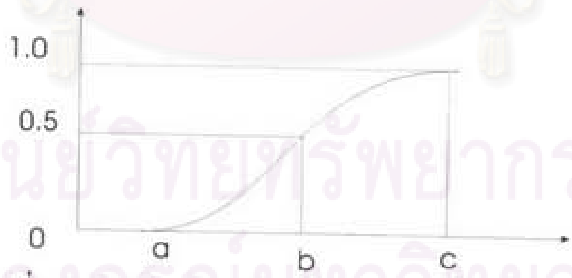
จะมีข้อกำหนดดังนี้

$S(u\,;a,b,c) = 0$ สำหรับช่วงที่ $u \le a$

$= 2\left[\dfrac{(u-a)}{(c-a)}\right]^2$ สำหรับช่วง $a \le u \le b$

$= 1 - 2\left[\dfrac{(u-a)}{(c-a)}\right]^2$ ช่ วง $b \le u \le c$

$= 1$ สำหรับช่วง $u > c$



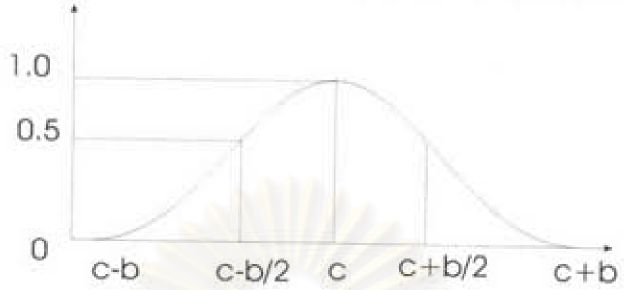
รูปที่ 2.3 ฟัซซีเซตในรูปแบบ S curve

2.ฟังก์ชันรูปแบบ π

มีรูปแบบกำหนดดังนี้

$\pi(u\,;b,c) = S(u\,;c\text{-}b, c\text{-}b/2, c)$ for $u \le c$

$$= 1 - S(u; c, c+b/2, c+b) \text{ for } u > c$$

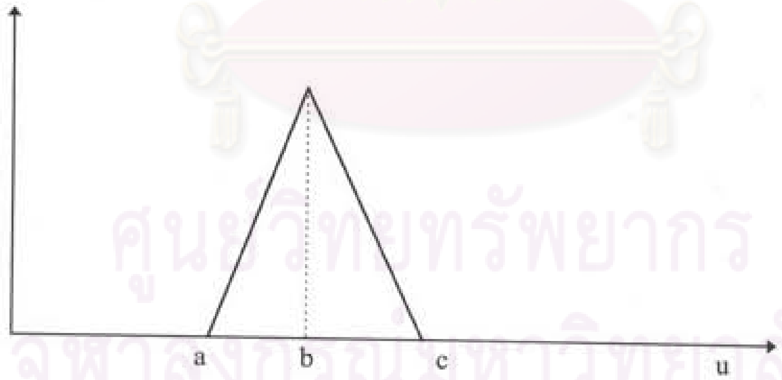


รูปที่ 2.4. ฟัซซีเซตในรูปแบบ π

3.ฟังก์ชันรูปแบบ สามเหลี่ยม

มีรูปแบบกำหนดดังนี้

$$
\begin{aligned}
T(u; a, b, c) &= 0 && u < a \\
&= (u-a)/(b-a) && a \leq u \leq b \\
&= (c-u)/(c-b) && b \leq u \leq c \\
&= 0 && u > c
\end{aligned}
$$



รูปที่ 2.5. ฟัซซีเซตในรูปแบบสามเหลี่ยม

2.2 การดำเนินการฟัซซีเซต(Fuzzy Set Operations)

เนื่องจากฟัซซีเซตก็เป็นเซตชนิดหนึ่ง จึงดำเนินการได้เหมือนเซตทั่วไป แต่จะมีฟังก์ชันการดำเนินการไม่เหมือนเซตทั่วไป ซึ่งจะมีฟังก์ชันการดำเนินการดังนี้

2.2.1 ความเท่ากัน (Equality)

ฟัซซีเซต 2 เซตจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อฟัซซีเซตทั้ง 2 จะต้องมียูนิเวอร์สเดียวกัน และตำแหน่งสมาชิกเดียวกันใน 2 เซตจะต้องมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากัน

$$\mu_A(u) = \mu_B(u) \quad \text{for all } u \in U$$

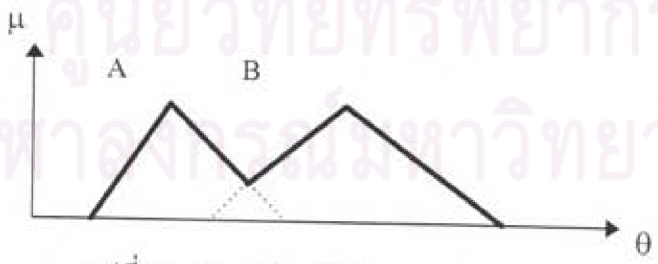
2.2.2 ยูเนียน (Union)

ฟัซซีเซต 2 เซตจะยูเนียนกันได้ เมื่อมียูนิเวอร์สเดียวกันและฟัซซีเซตที่ได้จากการยูเนียน จะนำค่าความเป็นสมาชิกของ 2 เซตแรก(ในตำแหน่งสมาชิกเดียวกัน)มาเปรียบเทียบกันค่าใดมากกว่าก็จะใช้ค่านั้น สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \quad \text{for all } u \in U$$

Union

$$\mu_{A \cup B}(u) = \text{MAX}(\mu_A(u), \mu_B(u))$$



รูปที่ 2.6. การยูเนียนฟัซซีเซต

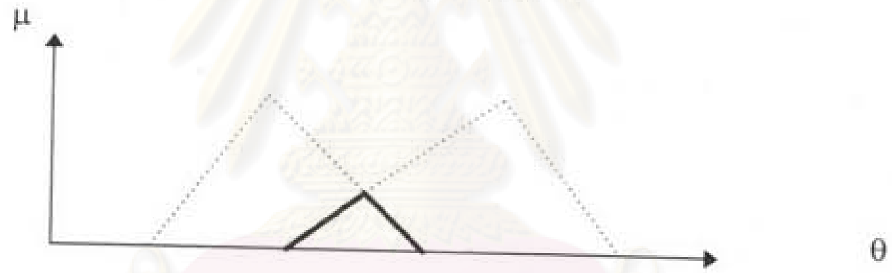
2.2.3 อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

ฟัซซีเซต 2 เซต จะอินเตอร์เซกชันได้ เมื่อมียูนิเวอร์สเดียวกัน และฟัซซีเซตที่ได้จะได้ค่าความเป็นสมาชิกจากการนำค่าความเป็นสมาชิกของ 2 เซตแรกมาเปรียบเทียบกันค่าใดต่ำกว่าก็จะใช้ค่านั้น จะสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \quad \text{for all } u \in U$$

Intersection

$$\mu_{A \cap B}(u) \quad = \quad \mathrm{MIN}(\ \mu_A(u)\ ,\ \mu_B(u)\ )$$



รูปที่ 2.7. การอินเตอร์เซกชันฟัซซีเซต

2.2.4 คอมพรีเมนท์ (Complement)

คอมพรีเมนท์ของฟัซซีเซตใดๆ คือ ฟัซซีเซตที่มีค่าความเป็นสมาชิก (ที่ตำแหน่งเดียวกัน) เท่ากับ 1 - ค่าความเป็นสมาชิกของเซตนั้น หรือ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mu_{\bar{A}}(u) \;=\; 1 - \mu_A(u) \qquad \text{for all } u \in U$$

Complement

$$\mu_{\overline{A}}(u) \quad = \quad 1 - \mu_A(u)$$

รูปที่ 2.8. การคอมพรีเมนท์ฟัซซีเซต

2.2.5 คอนเซนเทรชัน (Concentration)

ฟัซซีเซตสามารถที่จะคอนเซนเทรชันได้ ซึ่งจะเป็นการปรับปรุงค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตนั้น โดยจะเป็นการเน้นค่าความเป็นสมาชิกในส่วนที่มีค่ามาก และละเลยค่าในส่วนที่มีค่าน้อย ซึ่งสามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

$$\mu_{CON(A)}(u) = (\mu_A(u))^2 \quad \text{for all } u \in U$$

2.2.6 ไดเลชัน (Dilation)

ฟัซซีเซตที่ไดเลชัน จะปรับปรุงค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตนั้น โดยจะเป็นการเพิ่มความสำคัญของสมาชิกของเซตที่มีค่าความเป็นสมาชิกน้อยให้มากขึ้น ซึ่งสามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

$$\mu_{DIL(A)}(u) = (\mu_A(u))^{0.5} \quad \text{for all } u \in U$$

2.2.7 อินเทนซิฟิเคชัน (Intensification)

เป็นตัวดำเนินการที่จะปรับปรุงค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตให้มีค่าเข้าใกล้ค่าความเป็นสมาชิกของเซตที่มีขอบเขต คือการทำให้ค่าความเป็นสมาชิกที่มีค่าสูงเข้าใกล้ค่า 1.0 และทำให้ค่าความเป็นสมาชิกที่มีค่าต่ำเข้าใกล้ค่า 0.0 มากขึ้น โดยจะมีสมการดังนี้

$$\mu_{INT(A)}(u) = 2(\mu_A(u))^2 \quad \text{for } 0 < u < 0.5$$
$$= 1-2(1-\mu_A(u))^2 \text{ for } 0.5 \le \mu_A \le 1.0$$

2.2.8 การคูณทางพีชคณิต (Algebraic Product)

ฟัซซีเซตสามารถที่จะคูณกันได้ โดยฟัซซีเซตใหม่ที่ได้จะมีค่าความเป็นสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเท่ากับค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตเก่าทั้ง 2 เซตมาคูณกัน จะเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\mu_{AB}(u) = \mu_B(u).\mu_A(u) \quad \text{for all } u \in U$$

2.2.9 การบวกที่มีขอบเขต (Bounded Sum)

ฟัซซีเซตสามารถที่จะบวกกันได้ โดยการนำค่าความเป็นสมาชิกมารวมกัน แต่ผลรวมที่ได้จะต้องอยู่ภายใต้ขอบเขตของ 1.0 เนื่องจากค่าความเป็นสมาชิกจะเกิน 1.0 ไม่ได้ จะเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\mu_{A\oplus B}(u) = \min\{1, \mu_A(u)+\mu_B(u)\} \quad \text{for all } u \in U$$

2.2.10 การคูณแบบมีขอบเขต (Bounded Product)

ฟัซซีเซตทั้ง 2 สามารถที่จะรวมกันได้ โดยที่จะได้ค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตใหม่ เท่ากับค่าความเป็นสมาชิกของเซตเก่าทั้ง 2 มารวมกันแต่ไม่เกิน 1.0 ซึ่งจะเขียนเป็นรูปสมการได้ดังนี้

$$\mu_{A\Theta B}(u) = \max\{0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1\} \quad \text{for all } u \in U$$

2.3 ความสัมพันธ์ทางฟัซซี (Fuzzy Relations)

ความสัมพันธ์ของฟัซซีเซตไม่จำกัดเพียงเซต 2 เซตเท่านั้น อาจจะมากกว่านั้นได้อีก ซึ่งผลที่ได้คือฟัซซีเซตใหม่ ซึ่งมีโดเมนอยู่ในซับเซต (Subset) ของ $U_1 x U_2 x \ldots \ldots x U_N$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$R_U = \{[(u_1, \ldots, u_N), \mu_R(u_1, \ldots, u_N)] / (u_1, \ldots, u_N) \in U_1 x \ldots x U_N\}$$

2.3.1 ซับ-สตาร์ คอมโพสิชัน (Sup-star composition)

ถ้าให้ P และ Q เป็นความสัมพันธ์ทางฟัซซี ใน U x V และ V x W ตามลำดับ ถ้านำความสัมพันธ์ P และ Q มาประกอบกันเข้า จะได้ความสัมพันธ์ทางฟัซซีใหม่ขึ้นมา จะเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$P \circ Q = \{[(u, w), \sup(\mu_P(u, v) * \mu_Q(v, w))], u \in U, v \in V, w \in W\}$$

โดยที่ * เป็นตัวดำเนินการ ซับ-สตาร์ คอมโพซิชัน เช่น

ถ้ากำหนดให้ $P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$

โดยที่ P เป็นความสัมพันธ์ทางฟัซซีของเซต UxV และ Q เป็นความสัมพันธ์ทางฟัซซีของเซต VxW และในที่นี้กำหนดให้ตัวดำเนินการเป็น Max-Min จะได้ว่า

$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $r_{11} = \max\{\min(0.1,0.3), \min(0.5,0.7)\} = 0.5$

$r_{12} = \max\{\min(0.1,0.6), \min(0.5,0.5)\} = 0.5$

$r_{13} = \max\{\min(0.1,0.8), \min(0.5,0.4)\} = 0.4$

$r_{21} = \max\{\min(0.6,0.3), \min(0.9,0.7)\} = 0.7$

$r_{22} = \max\{\min(0.6,0.6), \min(0.9,0.5)\} = 0.6$

$r_{23} = \max\{\min(0.6,0.8), \min(0.9,0.4)\} = 0.6$

2.4 กฎพื้นฐานของฟัซซี (Fuzzy Base Rule)

กฎพื้นฐานของฟัซซีจะเป็นตัวควบคุมการทำงานของระบบ โดยรับค่าฟัซซีเซตอินพุตที่ระบบเป็นอยู่ในขณะนั้น (คือ ตำแหน่งที่ระบบอยู่ในขณะนั้นที่แปลงเป็นฟัซซีเซตแล้ว) แล้วนำมาเข้ากฎพื้นฐานทางฟัซซี จะได้ฟัซซีเซตเอาท์พุตที่ตอบสนองต่อฟัซซีเซตอินพุตที่รับเข้ามา เพื่อนำไปใช้คำนวณต่อไป

โดยมากกฎพื้นฐานของฟัซซีจะอยู่ในรูปของ IF.....THEN เช่น IF x_1 เป็น Q_4 AND x_2 เป็น ZE THEN OUT เป็น PM

2.5 การวัดค่าฟัซซี (Fuzzy Measures)

การวัดค่าฟัซซี จะชี้ถึงความเป็นฟัซซีของฟัซซีเซตนั้นๆ โดยที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันได้ดังนี้ $f: P(X) \longrightarrow R$ R ในที่นี้คือค่าจำนวนจริง

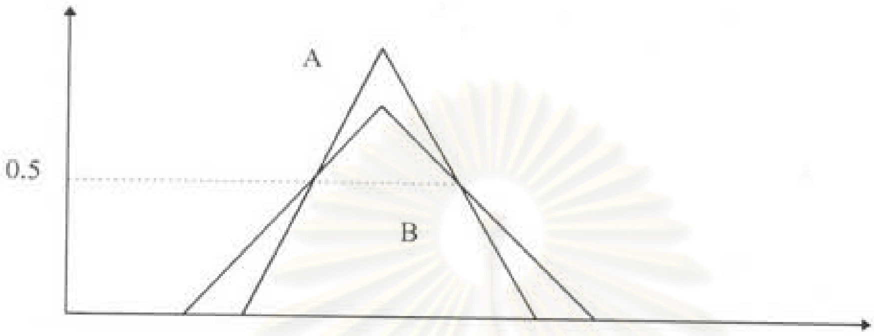
เมื่อ P(X) แทนฟัซซีซับเซตทั้งหมดของ X และค่าของ f(A) เป็นค่าความเป็นฟัซซีของเซต A ที่เป็นซับเซตของ X และ f จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $f(A) = 0$ ถ้าเซต A เป็นเซตที่มีขอบเขต (Crisp set)

2..ถ้า $f(A) < f(B)$ แล้ว เซต A มีความฟัซซีน้อยกว่าเซต B หรือ เซต A มีความแหลมมากกว่า เซต B สามารถแสดงโดยค่าความเป็นสมาชิกได้ดังนี้

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \text{for } \mu_B \le 0.5 \quad \text{และ}$$

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad \text{for} \quad \mu_B \geq 0.5$$



รูปที่ 2.9. เปรียบเทียบค่าฟัซซีของเซต A . B

3. จะเห็นว่า เซตที่แบนราบจะมีความฟัซซีมากกว่า ฉะนั้น เซตที่มีความฟัซซีสูงที่สุดคือเซตที่มีสมาชิก โดยที่สมาชิกทุกสมาชิกภายในเซตมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.5

4. ดัชนีของค่าฟัซซี จะถูกกำหนดในรูปแบบของระยะทางระหว่างฟัซซีเซตนั้นกับขอบเขตที่ใกล้ที่สุดคือ 0 ถ้าค่าความเป็นสมาชิกน้อยกว่า 0.5 หรือ 1.0 ถ้าค่าความเป็นสมาชิกมากกว่า 0.5 โดยสามารถหาค่าได้ดังนี้

4.1 ระยะทางของ แฮมมิ่ง (Hamming distance) จะหาค่าดัชนีได้ดังนี้

$$f(A) = \sum \left| \mu_A(x) - \mu_C(x) \right|$$

or

$$f(A) = \sum \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\}$$

4.2 ระยะทางแบบยูคลีเดียน (Euclidean distance) จะใช้ค่าดัชนีที่เขียนในรูปสมการดังนี้

$$f(A) = \{\Sigma[\mu_A(x) - \mu_C(x)]^2\}^{1/2}$$

4.3 ระยะทางแบบมินเคาร์สกี้ (Minkowski distance) จะใช้ค่าดัชนีที่เขียนในรูปสมการดังนี้

$$f(A) = \{\Sigma[\mu_A(x)-\mu_C(x)]^w\}^{1/w} \quad w \in [1,\infty]$$