บทที่ 2

ตัวสถิติที่ใช้ในการศึกษาและผลการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วิธีการพื้นฐานในการอ้างอิงหรือหาข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรที่ได้จากตัวอย่าง 2 ประการ คือ

1). การประมาณค่าพารามิเตอร์

เป็นการประมาณว่าลักษณะของประชากรที่สนใจศึกษาเป็นเช่นไร โดยใช้ผลที่ได้จากตัวอย่างมาช่วยในการประมาณ การประมาณค่าพารามิเตอร์อาจประมาณออกมาเป็นค่าเพียงค่าเดียว เรียกว่า การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) ถ้าประมาณโดยใช้ขอบเขตความเชื่อมั่น (Confident Interval) เรียกว่า การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)ซึ่งต้องใช้ค่าวิกฤตในการหาช่วงความเชื่อมั่นว่าค่าสถิติที่คำนวณได้นั้นให้ค่าพารามิเตอร์ไม่เกินขอบเขตที่กำหนด[2]

2). การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ (Hypothesis Testing) โดยทั่วไปจะใช้การทดสอบสมมติฐานในกรณีที่ผู้ศึกษาวิจัยมีปัญหาหรือข้อสงสัยบางประการเกี่ยวกับลักษณะ หรือคุณสมบัติต่างๆ ในประชากร จึงใช้ข้อมูลจากการทดลองมาตรวจสอบเพื่อยืนยันหรือคัดค้านเกี่ยวกับสิ่งที่สงสัย อย่างไรก็ตามการใช้ค่าสถิติเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ย่อมมีความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการทดลอง นั่นคือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการทดลองซึ่งจะไม่สามารถกำจัดได้ด้วยการใช้จำนวนซ้ำที่จำกัด[1]

ลักษณะข้อมูลที่นำมาใช้อาจได้จากการเก็บรวบรวมจากการสำรวจรวบรวมหรือจากการทดลอง ซึ่งจะเห็นความแตกต่างทั้ง 2 ประเภท

ข้อมูลจากการรวบรวม

ข้อมูลประเภทนี้อาจเป็นข้อมูลประเภทปฐมภูมิ หรือ ข้อมูลทุติยภูมิ ซึ่งข้อมูลประเภทนี้ผู้เก็บรวบรวมข้อมูลไม่สามารถจะกำหนดหรือควบคุมให้ตัวแปรอิสระเป็นไปตามความต้องการ[2]

---

[1] สมจิต วัฒนาชยากูล การวิเคราะห์เชิงสถิติ (กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์ประกายพรึก ,2527) หน้า 4,5

[2] สุพล ดุรงค์วัฒนา การวิเคราะห์เชิงสถิติ การวิเคราะห์ความแปรปรวน (กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537), หน้า 1-3

ดังนั้น ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อศึกษาความสัมพันธ์หรือผลกระทบของตัวแปรอิสระต่อตัวแปรตามอาจเป็นผลจากตัวแปรอิสระอื่นๆ ก็เป็นได้ ทำให้ผลสรุปการวิเคราะห์ความแปรปรวนจากข้อมูลประเภทนี้อาจได้ผลสรุปที่เชื่อถือได้น้อย

ข้อมูลจากการทดลอง

ข้อมูลประเภทนี้เก็บรวบรวมจากการทดลอง ซึ่งผู้ทดลองสามารถกำหนดและควบคุมวางแผนการเก็บรวบรวมเพื่อให้บรรลุตรงตามวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์ทำให้ได้ผลสรุปที่ดีกว่าวิเคราะห์จากข้อมูลที่สำรวจมาแล้วในเรื่องของผลกระทบของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตามซึ่งจะแน่ใจได้ว่าผลสรุปนั้นหนักแน่นกว่าผลสรุปจากข้อมูลที่ได้จากการสำรวจ[3]

การที่ไม่แยกความคลาดเคลื่อนนี้ออกมาทำการวิเคราะห์เป็นปัจจัยร่วมหรือปัจจัยที่สองเพราะไม่ทราบแน่ชัดว่าเกิดจากอะไร โดยจะสมมติว่าเป็นความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั่งตวง วัด (Measerment error หรือ Experimental error) แต่ถ้าทราบว่าเกิดจากอะไรและสามารถจัดเป็นปัจจัยได้ จะนำมาวิเคราะห์โดยแยกความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเป็นปัจจัยใหม่ได้แต่จะไม่แยกก็ได้ถ้าไม่สนใจศึกษาหรือเกิดความลำบากในการแยกปัจจัยใหม่ ดังนั้น เมื่อเกิดปัญหาขึ้น จึงต้องทำการศึกษาเพื่อการตัดสินใจที่ถูก

การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดี่ยว(SINGLE-FACTOR ANALYSIS OF VARIANCE) หรือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำแนกทางเดียว จัดข้อมูลได้ ดังนี้

ตารางที่ 2.1 แสดงผังข้อมูลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดี่ยว

วิธีทดลอง (Treatment)	หน่วยทดลองที่			
	1	2	. . .	n
1	y_{11}	y_{12}	. . .	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	. . .	y_{2n}
3	y_{31}	y_{32}	. . .	y_{3n}
:	:	:		:
m	y_{m1}	y_{m2}	. . .	y_{mn}

[3] เรื่องเดียวกัน

วิธีประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง

วิธีประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองมีวิธีการดังนี้

1). วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

1.1. การวิเคราะห์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ลักษณะข้อมูลอยู่ในรูปคือ

$$y_{ij} = \mu_{i.} + e_{ij}$$

เมื่อ

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N$$

$$Y = \begin{array}{|c|l} \underset{\sim}{y}_1 & n_1 \\ \underset{\sim}{y}_2 & n_2 \\ \underset{\sim}{y}_3 & n_3 \\ & \\ & \\ \underset{\sim}{y}_m & n_m \end{array}$$

$$X' = \begin{array}{|ccccc|l} \underset{\sim}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & n_1 \\ 0 & \underset{\sim}{1} & 0 & \dots & 0 & n_2 \\ 0 & 0 & \underset{\sim}{1} & \dots & 0 & n_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underset{\sim}{1} & n_m \end{array}$$

$$(X')'(X') = \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n_m \end{vmatrix}$$

$$B = ((X')'X')^{-1}(X')'Y$$

$$= \begin{vmatrix} 1/n_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/n_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/n_m \end{vmatrix} . (X')'Y$$

$$B = \begin{vmatrix} \bar{y}_{1\bullet} \\ \bar{y}_{2\bullet} \\ \bar{y}_{3\bullet} \\ \vdots \\ \bar{y}_{m\bullet} \end{vmatrix}$$

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองของวิธีทดลองที่ i เท่ากับ

$$E(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2/((n_i-1)n_i))$$

ตารางที่ 2.2 แสดงการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดี่ยว

สาเหตุความแปรผัน	องศาความเป็นอิสระ	ค่าความแปรผันกำลังสอง	ค่าความแปรผันกำลังสองเฉลี่ย	ค่า F
ความแปรผันระหว่างกลุ่ม	m - 1	$\sum_{i=1}^{m} n_i\ (\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = s_1^2$	$=s_1^2\ /(\ m\ -1)$	$\frac{s_1^2/\ m-1}{s_2^2/(N-m)}$
ค่าความเบี่ยงเบน	N - m	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2 = s^2{}_2$	$=\ s_2^2/(\ N-m\ )$	
ผลรวม	N-1	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}((\bar{y}_{ij})^2-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2$		

1.2 การใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดกับข้อมูลที่ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่

วิธีนี้มีขั้นตอนดังนี้

1.2.1 การประมาณค่าเฉลี่ยของวิธีทดลองที่ i

ค่าพารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยของวิธีทดลองที่ i คือ $\mu_{i.}$

โดยที่ $\mu_{i.} \sim N(\mu, \tau)$

จากข้อมูลที่มีรูปแบบคือ

$$y_{ij} = \mu_{i.} + e_{ij}$$

เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$(e_{ij} / \sigma_{i.}) \sim N(0, \sigma_{i.})$, $(\sigma^2_{i.}) \sim \chi^2(\beta, \alpha)$

1.2.2. การประมาณค่าเฉลี่ยและการประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองของวิธีทดลองที่ i คือ

$$E(\hat{\mu}_{i.}^{*}) = E(\bar{y}_{i.}) = E(\sum_{i=1}^{n_i} y_{ij} / n_i)$$

$$E(M\hat{S}E(\hat{\mu}_{i.}^{*})) = E(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 / (n_i - 1) n_i)$$

2) <u>วิธีประมาณอันดับที่สอง</u>

วิธีวิเคราะห์ทางสถิติของวิธีอันดับที่สอง มีดังนี้

2.1 <u>ตัวประมาณค่าเชิงเส้นไม่เอนเอียงที่ดีที่สุดอย่างง่ายแบบเบส์</u>

ภายใต้ตัวแบบทั่วไปที่กำหนดไว้ เมื่อกำหนดให้ $\bar{y}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{n}$, $\bar{y}_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{y}_{i\cdot}}{m}$ และ $\delta = \tau + \beta / n$ แล้วตัวประมาณค่าเชิงเส้นแบบเบส์ $\mu_{i\cdot}$ (หรือ BLUE) คือ

$$\tilde{\mu}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - C(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}), \quad C = \beta / n\delta \qquad (1)$$

ซึ่งตัวประมาณดังกล่าวจะไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนจะเท่ากันก็ตาม $\sigma_{i\cdot} = \beta$

ตัวประมาณ BLUE ของ $\mu_{i\cdot}$ จะขึ้นอยู่กับตัวพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า β และ δ ซึ่งได้จากการหาโมเมนต์ของตัวประมาณไม่เอนเอียง β และ δ ทำให้ตัวประมาณค่าของ $\tilde{\mu}_{i\cdot}$ ที่ใช้งานจริงๆ กลายเป็นตัวประมาณเชิงเส้นแบบเบส์อย่างง่าย (หรือ EBLUE)ของตัวประมาณไม่เอนเอียงของ δ กล่าวคือ

$$\hat{\delta} = (m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \qquad (2)$$

โดยที่ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ δ เมื่อกำหนด $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)'$

คือ $E_2\hat{\delta} = \tau + \sigma_{\cdot\cdot}/m$ และ $\sigma_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot}/m$

และตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงสำหรับพารามิเตอร์ β คือ

$$\hat{\beta} = m^{-1}(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot}/m \qquad (3)$$

ซึ่งค่าดังกล่าวจะสอดคล้องกับ $E_2\hat{\beta} = \sigma_{\cdot\cdot}$ ตัวประมาณ β และ δ ในสมการ(1)และ(2) จะเป็นอิสระกันอย่างมีเงื่อนไขเนื่องจาก β ขึ้นอยู่กับผลบวกกำลังสองภายในกลุ่มเท่านั้น ขณะที่ δ จะเป็นฟังก์ชั่นค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่ม

เมื่อแทน δ, β ด้วยค่าประมาณจาก (2)และ(3) ลงใน (1)ก็จะได้ EBLUE คือ

$$\hat{\mu}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - \hat{c}(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}), \quad \hat{c} = \hat{\beta} / n\hat{\delta} \qquad (4)$$

จะเห็นว่า ภายใต้ข้อสมมติเพิ่มเติมที่ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ EBLUE ก็ยังคงมีค่าเช่นเดิม แต่ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดกำลังสองของตัวประมาณนี้จะมีค่าแตกต่างไปจากกรณีทั่วไปในตัวแบบ (1)

2.2 <u>การประมาณค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดยกกำลังสอง</u>

การประมาณค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดยกกำลังสอง มีการคำนวณ 3 ขั้นตอนดังนี้

2.2.1 BLUE ของ MSE

ก่อนที่จะไปสู่การประมาณค่า MSE ของ EBLUE ในหัวข้อนี้จะขอนำเสนอวิธีหาค่า MSEของ BLUE ก่อน เนื่องจาก

$$\tilde{\mu}_{i\cdot} - \mu_{i\cdot} = e_{i\cdot} - C(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot});$$

$$e_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_{ij}}{n}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$(\tilde{\mu}_{i\cdot} - \mu_{i\cdot})^2 = e_{\cdot\cdot}^{\;2} - 2C(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})e_{i\cdot} + C^2(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \qquad (5)$$

เมื่อเราใช้วิธีการแยกองค์ประกอบ $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot} = (\tilde{\mu}_{i\cdot} - \mu_{i\cdot}) + (e_{i\cdot} - e_{\cdot\cdot})$ ขณะที่ $\mu_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \mu_{i\cdot}/m$ จะทำให้สามารถหาค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนด $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)'$ ของแต่ละเทอมใน (5) ได้ ซึ่งผลที่ได้ คือ

$$E_2 e_{i\cdot}^{\;2} = \sigma_{i\cdot}/n$$

$$E_2(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})e_{i\cdot} = \sigma_{i\cdot}(m-1)/nm \qquad (6)$$

$$E_2(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = \tau + \sigma_{i\cdot}/n(m-1)/m + (\sigma_{\cdot\cdot} - \sigma_{i\cdot})/nm$$

และจากการแทนค่าใน (6) ลงใน (5) จะได้ MSE ของ BLUE คือ

$$E(\tilde{\mu}_{i\cdot} - \mu_{i\cdot})^2 = (\tau\beta/n\delta) + (\beta^2/mn^2\delta) \qquad (7)$$

สิ่งหนึ่งที่น่าสนใจคือ ภายใต้ข้อสมมติความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่เท่ากัน $\sigma_{i\cdot} = \beta$ ค่า MSE ที่ได้ยังคงเป็นเช่นเดียวกับในสมการที่ (7)

2.2.2. การประมาณค่า MSE ของ EBLUP

2.2.2.1. EBLUE ของ MSE :

โดยการแทนค่า c ใน (5) ด้วย $\hat{c}$ เราได้ค่ากำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนของค่าประมาณ $\hat{\mu}_{i\bullet}$ จากค่าจริง ($\mu_{i\bullet}$) เขียนได้ คือ ($\hat{\mu}_{i\bullet} - \mu_{i\bullet}$)^2 โดยอาศัยความสมมาตรของ $E(\hat{\mu}_{i\bullet} - \mu_{i\bullet})^2$ จึงไม่สามารถที่จะขึ้นกับค่า i ดังนั้นการเฉลี่ยทุกค่า i และอาศัยสมการ(2) จะได้ MSE ของ EBLUE เท่ากับ

$$E\,(\hat{\mu}_{i\bullet} - \mu_{i\bullet})^2 = E\,[\sum_{i=1}^{m} e_{i\cdot\bullet}^{\;2} - 2\hat{c}\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})e_{i\cdot\bullet} + (m-1)\hat{\beta}\,\hat{c}/n\,]/m. \quad (8)$$

เนื่องจาก $E_2\sum_{i=1}^{m} e_{i\cdot\bullet}^{\;2}/m = \sigma_{\bullet\bullet}/n = E_2(\hat{\beta}/n)$ ดังนั้น พจน์ที่มีความคล้ายคลึงกับค่าใน (8) คือ

$$E\,(\hat{\mu}_{i\bullet} - \mu_{i\bullet})^2 = E\,(\hat{\beta} - \varnothing_1 + \varnothing_2)\,/\,n \quad (9)$$

โดยที่

$$\varnothing_1 = 2\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})\,e_{i\cdot\bullet}\,\hat{\beta}\,/\,m\,\hat{\delta} \quad ,$$

$$\varnothing_2 = (\,m-1\,)\hat{\beta}^{\,2}/\,m\,n\hat{\delta} \quad ,$$

นอกจากนี้ยังสามารถแทน $\hat{\beta}$ และ $\hat{\beta}^{\,2}$ ใน (9) ได้ด้วย $E_2(\hat{\beta})$ และ $E_2(\hat{\beta}^{\,2})$ เนื่องจาก $\hat{\beta}$ มีค่าเป็นอิสระอย่างมีเงื่อนไขของ $\bar{y}_{i\bullet}, \bar{y}_{\bullet\bullet}, e_{i\cdot\bullet}$ และ $\hat{\delta}$ ดังนั้น จะสังเกตได้ว่า

$$E_2\hat{\beta} = \sigma_{\bullet\bullet}\;,\; E_2\,\hat{\beta}^{\,2} = \sigma_{\bullet\bullet}^{\;\;2} + 2\sum_{i=1}^{m}(\sigma_{i\bullet}^{\;2}/\,(\,n-1)\,m^2 \quad (10)$$

จะได้

$$E\,(\hat{\mu}_{i\bullet} - \mu_{i\bullet})^2 = E\,(\,\sigma_{\bullet\bullet} - \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2\,)\,/\,n \quad (11)$$

โดยที่

$$\tilde{\phi}_1 = 2\;\sigma_{\bullet\bullet}\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})e_{i\cdot\bullet}\;/\,m\hat{\delta} \quad ,$$

$$\tilde{\phi}_2 = (m-1)\,(\sigma_{\bullet\bullet}^{\;\;2} + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i\bullet}^{\;2}/\,(\,n-1)m^2\,y\,mn\hat{\delta} \quad (12)$$

2.2.2.2. การประมาณ $E(\tilde{\phi}_1)$ และ $E(\tilde{\phi}_2)$

การหาค่า(11)เราต้องการ $E(\tilde{\phi}_1)$ และ $E(\tilde{\phi}_2)$ แต่ค่าคาดหวังทั้งสองค่า ไม่สามารถคำนวณออกมาเป็นรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งได้ ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องใช้การประมาณ เพื่อหาค่า $E(\tilde{\phi}_1)$ และ $E(\tilde{\phi}_2)$ โดยจะละเทอมที่มีอันดับต่ำกว่า m^{-1} เมื่อ m ใหญ่มาก ซึ่งจะต้องอาศัยการกระจาย

$$\hat{\delta}^{-1} = \{1-(\hat{\delta}-\delta_1)/\delta_1 + [(\hat{\delta}-\delta_1)/\delta_1]^2\}/\delta_1 - [(\hat{\delta}-\delta_1)/\delta_1]^3/\hat{\delta} \qquad (13)$$

โดยที่ $\delta_1 = E_2(\hat{\delta}) = \tau + \sigma_{..}/n$ นอกจากนี้เราต้องอาศัยทฤษฎีบทอีก 2 ข้อ กล่าวคือ

ทฤษฎีบทที่ 1. ถ้า $m > 4k+1$ และ $\tau > 0$ ดังนั้น $E(\hat{\delta})^{-k} \leq (2/\tau)^k$ โดยที่ k คือจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 2. เมื่อกำหนด f เป็นฟังก์ชั่นที่มีโมเมนต์อันดับที่สองมีค่าจำกัด $\tau > 0$ และให้ $\sigma_{i.}$ หาโมเมนต์อันดับที่สี่ได้แล้ว จะได้ว่า $m > 17$ และ

$$E\,[(\hat{\delta}-\delta_1)/\delta_1]^s\, f/\hat{\delta} = o(m^{-s/2})$$
$$E\,[(\hat{\delta}-\delta_1)/\delta_1]^s\, f/\delta = o(m^{-s/2}) \qquad (14)$$

การคำนวณค่าที่ต้องพบบ่อยๆ โดยอาศัยสูตรที่รู้จักกันดีสำหรับโมเมนต์อันดับที่สองของตัวแปรสุ่มแบบปกติในรูปแบบกำลังสอง จะทำให้แสดงได้ว่า

$$E_2(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 e_{i.}^{\,2} = \tau\sigma_{i.}(m-1)/mn + 2\sigma_{i.}^{\,2}[(m-1)/mn]^2 + \sigma_{i.}[(m-2)\sigma_{i.} + \sigma_{..}]/mn^2 \qquad (15)$$

ค่าคาดหวังข้างต้นนี้(ข้างบน) จะถูกกำหนดขอบเขตของค่า ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชั่นของ m ดังนั้นการสมมติให้โมเมนต์อันดับที่สี่สำหรับเวคเตอร์ $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)'$ มีค่าจำกัด ฟังก์ชั่น $f = (\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})e_{i.}\,\sigma_{..}$ และ $g = \sigma_{..}^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i.}^{\,2}/(n-1)m^2$ เป็นฟังก์ชั่นที่สอดคล้องตามสำหรับข้อสมมติในทฤษฎีบทที่ 2.แล้ว การแทน (13) ใน (12) ผลที่ได้จะเป็นไปตาม (15)

ดังนั้น $E(\tilde{\phi}_1) = 2E[\sigma_{..}\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})e_{i.}]\{1+(\hat{\delta}-\delta_1)^2\}/m\delta_1 + o(m^{-3/2})$ (16)

และ

$$E(\tilde{\phi}_2) = (m-1)\,E[\sigma_{..}^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i.}^{\,2}/(n-1)m^2] \times [1+(\hat{\delta}-\delta_1)^2/\delta_1^{\,2}]/mn\delta_1 + O(m^{-3/2}) \qquad (17)$$

ซึ่งจะขอเขียนแทนค่าคาดหวังทางด้านขวามือของสมการ (16)และ(17) ด้วย $E(\varnothing_1)$ และ $E(\varnothing_2)$ ตามลำดับ

2.2.2.3 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนด $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)'$

ปัญหาของเราตอนนี้ที่สืบเนื่องจากหัวข้อที่แล้วคือการประมาณค่า $E(\varnothing_{1\cdot})$ และ $E(\varnothing_{2\cdot})$ อันดับแรกจะเริ่มต้นจาก การหาค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนด $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)'$ เพื่อประมาณค่า $E_2(\varnothing_{1\cdot})$ ก่อน ซึ่งเราต้องอาศัยผลของค่าคาดหวังดังต่อไปนี้

$$E_2[\sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})e_{i\cdot}] = n^{-1}[(m-1)\sigma_{\cdot\cdot} \tag{18}$$

$$E_2[\sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})e_{i\cdot}\tilde{\delta}] = n^{-1}[(m-1)\sigma_{\cdot\cdot}\,\delta_1 + 2\sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}\sigma_{i\cdot}/m] + o(m^{-1}) \tag{19}$$

$$E_2[\sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})e_{i\cdot}\tilde{\delta}^2] = n^{-1}[(m+1)\sigma_{\cdot\cdot}\delta_1^{\ 2} + 2s^2(\tilde{\delta})\sigma_{\cdot\cdot} + 4\delta_1\sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}\sigma_{i\cdot}/m] + o(m^{-1}) \tag{20}$$

โดยที่ค่าที่ใช้ในที่นี้ คือ $\tilde{\delta} = (\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1m})'$, $\delta_{1i} = \tau + \sigma_{i\cdot}/m$,

$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}/m$ และ $s^2(\tilde{\delta}) = \sum_{i=1}^{m} (\delta_{1i} - \delta_1)^2/m$

เมื่อแทนค่าตามสมการข้างต้นใน(15) เราจะได้

$$E_2\varnothing_{1\cdot} = -2\sigma_{\cdot\cdot}(mn\delta_1)^{-1}\{(m+1)\sigma_{\cdot\cdot} - 2(m\delta_1)^{-1}\sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}\sigma_{i\cdot} + 2s^2(\delta)\sigma_{\cdot\cdot}/\delta_1^{\ 2}\} + O(m^{-2}). \tag{21}$$

อันดับต่อไป คือการหาค่า $E_2(\varnothing_2)$ ซึ่งได้จากสมการ(17) ว่า

$$E_2\varnothing_{2\cdot} = (1-1/m)\{\sigma_{\cdot\cdot}^{\ 2} + 2\sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot}^{\ 2}/(n-1)m^2\} \times [1 + \delta_1^{-2}E_2(\hat{\delta} - \delta_1)^2]/n\delta_1$$

$$E_2(\hat{\delta} - \delta_1)^2 = 2(m-1)^{-2}(n+2/m)\sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}^{\ 2} + 1/2$$

และเมื่อเราละเทอมที่มีอันดับน้อยกว่า m^{-1} เราจะได้

$$E_2\, \varnothing_{2\cdot} = (n\delta_1^{-1})\,[\,\sigma_{\cdot\cdot}^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot}^{\,2} / (n-1)m^2 - \sigma_{\cdot\cdot}^{\,2}/m$$

$$+ 2\sigma_{\cdot\cdot}^{\,2} \sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}^{\,2} / m^2 \delta_1^{\,2}\,] + O(m^{-3/2}) \qquad (22)$$

โดยอาศัยค่าที่ได้จาก (21),(22) และเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$m^{-1} \sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}^{\,2} = s^2(\tilde{\delta}) + \delta_{1i}^{\,2};$$

$$m^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot}^{\,2} = s^2(\tilde{\delta}) + (\delta_1^{\,2} - \tau)^2;$$

$$n^{-1}\sigma_{\cdot\cdot} = (\delta_1 - \tau);$$

$$m^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^{m} \delta_{1i}\sigma_{i\cdot} = s^2(\tilde{\delta}) + \delta_1(\delta_1 - \tau);$$

ทำให้เขียนได้เป็น

$$E_2(\varnothing_{2\cdot} - \varnothing_{1\cdot}) = (n\delta_1^{-1})\,[\,-(\delta_1 - \tau)^2 + m^{-1}\{(3 + 2/(n-1))(\delta_1 - \tau)^2$$

$$+ 2s^2(\tilde{\delta})\,[\,n(n-1)^{-1} - (\tau/\delta_1)^2\,]\}\,]$$

$$+ O(m^{-3/2}) \qquad (23)$$

2.2.2.4. ค่าคาดหวังที่ครอบคลุมทุกค่าของ $\tilde{\sigma}$

การแทนสมการ(23) ใน (11)ปัญหาที่ยังหลงเหลืออยู่ในตอนนี้ก็คือการประมาณค่าเฉลี่ย ณ. ทุกค่าประมาณอันดับที่สองของค่า MSE ของ EBLUE ที่เราต้องการ ซึ่งเมื่อจัด

$E(\sigma_{..}/n) = \beta/n = E(\delta_1 - \tau)$ จากสมการ(11) เขียนใหม่คือ

$$E(\hat{\mu}_{i.} - \mu_{i.})^2 = E(\tau(1-\tau/\delta_1) + m^{-1}\delta_1^{-1}\{(3+\frac{2}{n-1}(\delta_1-\tau)^2/\delta_1 + 2S^2(\delta)[(\frac{n}{n-1} - (\tau/\delta_1)^2]\}\} + o(m^{-3/2}) \quad (24)$$

จะสังเกตได้ว่าทุกเทอมบนขวามือของสมการ (24) ไม่เป็นค่าลบทั้งนี้เพราะ $\delta_1 - \tau > 0$ และ $\frac{n}{n-1} \geq (\tau/\delta_1)^2$ การประมาณจะนำเทอมทุกเทอมทางขวามือของสมการ (24) $1-\tau E(\delta_1^{-1})$ สามารถหาได้โดยอาศัยการกระจายค่า δ_1^{-1} ซึ่งจะได้ผลเป็น

$$\delta_1^{-1} = \delta^{-1}[1-(\delta_1-\delta)/\delta + (\delta_1-\delta)^2/\delta^2] - \delta_1^{-1}(\delta_1-\delta)^3/\delta^3 \quad (25)$$

เมื่อ $\delta = E\delta_1 = \tau + \beta/n$

เนื่องจาก $\delta_1 > \tau$ ค่าคาดหวังในส่วนเหลือยังคงอยู่ในสมการ(25) จึงมีค่าที่ถูกกำหนดขอบเขตโดยเป็นสัดส่วนกับค่า $E(\delta_1 - \delta)^3$ ด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งมีอันดับเป็น $o(m^{-3/2})$ และจะสังเกตได้ว่า $\delta_1 - \delta = n^{-1}(\sigma_{..} - \beta)$ โดยที่ $\sigma_{i.}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนและเป็นอิสระโดยมีค่าของ $E(\sigma_{i.}) = \beta$ ดังนั้นสมการนี้จะได้ว่า

$$E\delta_1^{-1} = \delta^{-1}[1 + \alpha/mn^2\delta^2] + o(m^{-3/2}) \quad \text{และ}$$

$$\tau E(1-\tau/\delta_1) = \tau[\beta - \tau\alpha/nm\delta_1^2]/n\delta + o(m^{-3/2}) \quad (26)$$

แต่อย่างไรก็ตามค่าประมาณในสมการ(26)ไม่เป็นบวกเสมอ ถึงแม้ว่าค่าที่ต้องการประมาณทางด้านขวาของสมการจะไม่เป็นลบเสมอก็ตาม ด้วยเหตุนี้ในกรณีที่ค่าที่หาได้เป็นค่าลบ การใช้ค่าศูนย์ หรือค่าสัมบูรณ์ของค่าที่ได้มาเป็นค่าประมาณจะเป็นค่าที่เหมาะสมกว่าเงื่อนไขอย่างง่ายและความพอเพียงที่จะทำให้เทอม $\beta - \tau\alpha/nm\delta^2 > 0$ นั่นคือ $m\beta^2 - \alpha > 0$ ซึ่งเราสามารถนำไปใช้เป็นข้อสมมติฐานเบื้องต้นได้โดยไม่มีปัญหาอะไร เพราะการประมาณค่าของเราถูกจำกัดในกรณีที่ m มีค่ามากอยู่แล้ว แต่ก็ยังคงมีการแจกแจงบางการแจกแจงสำหรับ $\sigma_{i.}$ เป็นพิเศษบางการแจกแจงที่จะให้น้ำหนักถ่วงค่อนข้างมากต่อความแปรปรวนเชิงคลาดเคลื่อนที่มีค่าน้อย ๆ จึงทำให้ยังคงมีค่าคาดหวังที่สูงอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากหางที่ยาวพิเศษของมัน ซึ่งกรณีนี้จะทำให้ค่าที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมมติฐานที่ต้องการไม่ว่า m จะมีค่าเท่าไรก็ตาม ถึงตอนนี้เราจะหันกลับไปพิจารณาเทอม $o(m^{-1})$ ในสมการ(24) โดยใช้เอกลักษณ์

$$f(\tilde{\delta})/\delta_1 \quad = f(\tilde{\delta})/\delta_1 \{(1-(\delta_1-\delta)/\delta)\cdot\delta/\delta_1\} \qquad (27)$$

สำหรับฟังก์ชั่น f ของ $\tilde{\delta} = (\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1m})$ โดยสมมติให้โมเมนต์ที่สอง $f(\tilde{\delta})$ มีค่าจำกัด โดยการประยุกต์อสมการของ Holder เข้ากับเทอมที่เหลือของ (27) จะได้

$$E\, f(\tilde{\delta})/\delta_1 \quad = E\, f(\tilde{\delta})/\delta_1 + o(m^{-1/2}) \qquad (28)$$

ผลที่ได้ตามมาจากสมการที่ (28) คือ

$$E(\delta_1-\tau)^2/\delta_1 = (\delta-\tau)^2/\delta + o(m^{-1/2}) \qquad (29)$$

$$E\, s^2(\tilde{\delta})/\delta_1 = \alpha/\delta n^2 + o(m^{-1/2}) \qquad (30)$$

ท้ายที่สุดจาก (27) จะเป็นผลให้

$$\begin{aligned} f(\tilde{\delta})/\delta_1^3 &= f(\tilde{\delta})/\delta_1^3 \{(1-(\delta_1-\delta)/\delta)\cdot(\delta/\delta_1)\}^3 \\ &= f(\tilde{\delta})/\delta_1^3 \{(1-3(\delta_1-\delta)/\delta_1+3(\delta_1-\delta)^2/\delta_1^2 \\ &\quad -(\delta_1-\delta)^3/\delta_1^3\} \end{aligned} \qquad (31)$$

การใช้อสมการของ Holder ซึ่งเป็นไปตามสมการ (30)

$$E\, s^2(\tilde{\delta})/\delta_1^3 = \alpha/\delta^3 n^2 + o(m^{-3/2}) \qquad (32)$$

การใช้ (26),(29),(30)และ(32) แทนค่าในสมการ (24) การประมาณค่าอันดับที่สอง ของ MSE โดย EBLUP เท่ากับ

$$\begin{aligned} E(\hat{\mu}_{i\cdot}-\mu_{i\cdot})^2 &= \tau\beta/n\delta - \tau^2\alpha/mn^2\delta^3 + \beta^2/m\delta n^2 \\ &\quad + 2(m\delta n^2)^{-1}[n(\beta^2+\alpha)/n-1-\alpha\tau^2/\delta^2] \\ &\quad + o(m^{-3/2}) \end{aligned} \qquad (33)$$

จะเห็นได้ว่าเทอมแรก และเทอมที่สามทางขวามือของสมการ(34)จะรวมกันเป็นค่า MSE ของBLUP ในขณะที่เทอมที่สองและสี่จะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของ MSE เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ β และ δ ในBLUE

การประมาณค่าตัวประมาณค่า MSE คือ $E(\widehat{MSE}(\hat{\mu}_{i\cdot}))$ ของวิธีทดลองที่ i ของตัวประมาณ EBLUE คือ

$$E(\hat{\mu}_{i\cdot}-\mu_{i\cdot})^2$$

2.3. <u>การประมาณค่าไม่เอนเอียงของตัวประมาณ MSE</u>

มองจากสมการ(9)สำหรับ MSE ของ $\hat{\mu}_{i.}$ เราจะเห็นว่า $(\hat{\beta} - \varnothing_1 + \varnothing_2)/n$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง MSE โดยที่ $e_{i.}$ คือสิ่งที่ทราบค่า แต่ทั้งนี้ทั้งนั้น $e_{i.}$ ยังเป็นปัญหาการประมาณเนื่องจากไม่ทราบค่า การประเมินผลลัพธ์จึงเอนเอียง ตัวสถิติที่เพียงพอโดยธรรมชาติของ $e_{i.}$ คือ

$$\hat{e}_{i.} = \bar{y}_{i.} - \hat{\mu}_{i.} = \hat{c}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \qquad (34)$$

แทนสูตร $\varnothing_1$ ด้วย $\hat{\phi}_1$ เราจะได้ตัวประมาณเริ่มแรกของ MSE เท่ากับ

$$\text{MSE}_*(\hat{\mu}_{i.}) = (\hat{\beta} - \hat{\phi}_1 + \varnothing_2)/n = (\hat{\beta} - \varnothing_2)/n \qquad (35)$$

ความเอนเอียงถูกกำหนดโดย

$$B = E(\text{MSE}_*(\hat{\mu}_{i.})) - \text{MSE}(\tilde{\mu}_{i.}) = E(\varnothing_1 - 2\varnothing_2)/n$$

ยังคงหาการประมาณตัวประมาณ B จะสังเกตได้ว่า $E(\varnothing_1) = E E_2(\varnothing_{1*})$ และ $E(\varnothing_2) = E E_2(\varnothing_{2*})$ และใช้สมการ (21) และ (22) สำหรับ $E_2(\varnothing_{1*}) = E_2(\varnothing_{2*})$ เราจะได้ $E_2(\varnothing_1 - 2\varnothing_2) = 4(mn)^{-1}\{(\sigma_{..}/\delta_1)[\sigma_{..} + s^2(\hat{\delta})\sigma_{..}/\delta_1^2$

$$-\sum_i \delta_{1i}\sigma_{i.}/m\delta_1] - \sum_i \sigma_{i.}/m(n-1)\delta_1 - \sigma_{..}^2 \sum_i \delta_{1i}^2/m\delta_1^3\} + O(m^{-3/2})$$

และละสมการข้างบนสามารถใช้ได้ตามสมการ (23) ได้ว่า

$$E_2(\varnothing_1 - 2\varnothing_2) = -4(mn)^{-1}\{s^2(\hat{\delta})(\delta_1 - \tau)/\delta_1^2 + s^2(\hat{\delta})/(n-1)\delta_1 + n(\delta_1 - \tau)^2/(n-1)\delta_1\} \qquad (36)$$

เมื่อหาค่าคาดหวังในสมการ (29) และ(30) แล้วแทนลงในสมการ (35) แสดงได้คือ

$$E\, s^2(\hat{\delta})/\delta_1 = \alpha/(\delta n)^2 + O(m^{-1/2}) \qquad (37)$$

จะได้

$$\begin{aligned} B &= n^{-1} E(\varnothing_1 - 2\varnothing_2) \\ &= -4(mn)^{-1}\{\beta^2/(n-1)\delta + \beta\alpha/n^2\delta^2 + \alpha/n(n-1)\delta\} \\ &\quad + O(m^{-3/2}) \end{aligned} \qquad (38)$$

ดังนั้นความเอนเอียงของเทอม B คือ $O(m^{-1})$ นั่นคือ การแนะว่าเราสามารถหาตัวประมาณ B ได้อย่างถูกต้อง ถึงเทอมที่ m^{-1} เมื่อจะประมาณ B คือความเอนเอียง โดยกำหนดจากสมการที่ (38) เมื่อจะสร้างตัวประมาณ β^2/δ เราจะสังเกตได้ว่า

$$E\,\hat{\beta}^2/\hat{\delta} = E[\sigma_{..}^2 + 2\sum_i \sigma_{i.}^2/m^2(n-1)]\delta_1^{-1}[1 + 2\sum_i \delta_{1i}^2/m^2\delta_1^2] + O(m^{-3/2}) \qquad (39)$$

และใช้สมการ (9)

$$E\,(\hat{\beta}^2/\hat{\delta}) = \beta^2/\delta + o\,(m^{-1})$$

ตามด้วยสมการ (39) คือ

$$E_2\,\hat{\delta} = \delta_1^{-1}(1+\sum_{i=1}^{m}\delta_{1i.}^{2}/m^2\delta_1^2 + O\,(m^{-3/2}) \qquad (40)$$

การกลับสมการการประมาณของ α/δ_1 จะได้ว่าสมการ $m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_{i.}^{2}$

ด้วย $\hat{\sigma}_{i.}$ ตามที่ระบุในสมการที่ (3) ซึ่งจะได้ค่าคาดหวังคือ

$$E\,m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_{i.}^{2} = E\,(n+1)(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i.}^{2}$$

$$= (n+1)(n-1)^{-1}(\beta^2+\alpha) \qquad (41)$$

แสดงว่า

$$(n-1)\,\hat{\sigma}_{i.}\sigma_{i.}^{-1} = \sigma_{i.}^{-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

เป็นตัวแปรของการแจกแจงไคสแควร์ ที่ระดับความเป็นอิสระ (n -1) ที่ถูกกำหนด เงื่อนไขว่า $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma, \ldots, \sigma_m)'$ แล้วตามด้วยตัวประมาณ $\hat{\alpha}$ ที่มีความเอนเอียงเกิดขึ้น ,

$$\hat{\alpha} = (n-1)(n+1)^{-1}m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_{i.}^{2} - \hat{\beta}^2 \qquad (42)$$

ความเอนเอียงมีที่อันดับที่ m^{-1}

$$E\,\hat{\alpha}/\hat{\delta} = E\,\delta_1^{-1}(m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i.}^{2} - \sigma_{..}^{2}) + O\,(m^{-1/2})$$

$$= E\,n^2 s^2(\hat{\delta})/\delta_1 + O(m^{-1/2})$$

$$= \alpha/\delta + O\,(m^{-1/2}) \qquad (43)$$

ขั้นตอนสุดท้ายเหมือนสมการที่ (30) จะได้ดังสมการ(43) เมื่อกำหนด $\hat{\alpha}/\hat{\delta}$ ประมาณ α/δ ที่จะกำจัดอันดับของการประมาณท้ายที่สุดการประมาณ $\alpha\beta/\delta^2$ ด้วย $\hat{\alpha}\hat{\beta}/\hat{\delta}^2$ โดยปกติใช้ $\mathrm{cov}\,(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = O\,(m^{-1})$ โดยที่

$$E\,(\hat{\alpha}\hat{\beta}/\hat{\delta}^2) = E\,\sigma_{..}\,(\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i.}^{2}/m - \sigma_{..}^{2})/\delta_1^2 + o\,(m^{-1/2})$$

$$= E\,n^3 s^2(\hat{\delta})(\delta_1-\tau)/\delta_1^2 + o(m^{-1/2})$$

$$= \alpha\beta/\delta^2 + O(m^{-1/2}) \qquad (44)$$

ขั้นสุดท้ายจากสมการ (30) และ (37) และตามด้วย (38) ,(40),(43),(44) จะได้ตัวประมาณของ B ที่ละเทอมอันดับที่ประมาณ ดังนี้

$$\hat{B} = -4\,[\hat{\alpha}\,\hat{\beta}\,/\,n\,\delta + n\hat{\beta}^{2}/(n-1) + \hat{\alpha}/(n-1)]\,/\,m\,n^{2}\,\hat{\delta} \tag{45}$$

ดังนั้น $E(\hat{B}) = B + O(m^{-3/2})$

ตัวประมาณ MSE จะถูกต้องจนถึงเทอมอันดับที่ m^{-1} คือ

$$M\hat{S}E_{4}(\hat{\mu}_{t.}) = M\hat{S}E_{4}(\tilde{\mu}_{t.}) - B$$

$$= [\hat{c}\,(\hat{\tau} + \hat{\beta}\,/\,n\,m) + 4\,(m\,n^{2}\,\hat{\delta}^{-1})$$
$$\times\,[\hat{c} + (n-1)^{-1})\,(\hat{\beta}^{2} + \hat{\alpha}\,) + \hat{\tau}\,\hat{\beta}^{2}\,/\,\hat{\delta}^{-1}] \tag{46}$$

ซึ่ง $\hat{\tau} = \hat{\delta} + \hat{\beta}\,/\,n$ และ $\hat{\alpha}, \hat{c}$ จะถูกกำหนดโดยสมการ (42) และ(4) อย่างเชื่อถือได้ แสดงถึงเทอมแรกในสมการ (46) คือ ตัวประมาณอย่างง่ายของ MSE โดยการละเทอมความไม่แน่นอนในการประมาณ และการใช้ MSE ของตัวประมาณที่มีคุณสมบัติ EBLUE ซึ่งมีค่าเท่ากับใช้ตัวประมาณ BLUE ซึ่งคือตัวประมาณอย่างง่าย (Naive Estimator) ตัวประมาณค่า MSE คือ $E\,(\,M\hat{S}E_{N}(\hat{\mu}_{t.}))$

$$E\,(\,M\hat{S}E_{N}(\hat{\mu}_{t.})) = E\,(\,\hat{c}\,(\,\hat{\tau} + \hat{\beta}\,/\,n\,m\,)) \tag{47}$$

3). <u>วิธีประมาณที่ปรับปรุงจากวิธีของคเลฟฟีและราว</u>

วิธีประมาณที่ปรับปรุงจากวิธีของคเลฟฟีและราว (Adaptive KLEFFEE and RAO's Method) มีขั้นตอนการคำนวณ คือ

3.1. <u>การประมาณค่าเชิงเส้นไม่เอนเอียงที่ดีที่สุดอย่างง่ายแบบเบส์</u>

โดยการสมมติให้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเท่ากัน ตัวประมาณค่าเชิงเส้นไม่เอนเอียงที่ดีที่สุดอย่างง่ายแบบเบส์ ภายใต้ตัวแบบทั่วไปที่กำหนดไว้ (กำหนด n เท่ากับ n_i) และกำหนดให้

$$\bar{y}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_{ij}}{n_i} ,$$

$$\bar{y}_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{y}_{i\cdot}}{m}$$

และ

$$\delta = \tau + \beta / n_i$$

แล้วตัวประมาณค่าเชิงเส้นแบบเบส์ $\mu_{i\cdot}$ (หรือ BLUE) คือ

$$\tilde{\mu}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - c\,(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}) , \quad C = \beta / n_i\, \delta \qquad (1)$$

$$\delta = (m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \qquad (2)$$

โดยที่ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ $\hat{\delta}$ เมื่อกำหนด $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)'$

คือ $$E_2\, \hat{\delta} = \tau + \sigma_{\cdot\cdot} / m$$

และ

$$\sigma_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot} / m$$

และตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงสำหรับพารามิเตอร์ β คือ

$$\hat{\beta} = m^{-1}(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i\cdot} / m \qquad (3)$$

จะได้ MSE ของ BLUE เหมือนวิธีที่สอง คือ

$$E\ (\tilde{\mu}_{i.} - \mu_{i.})^2 = \hat{\tau}.\hat{\beta}\ /\ n\ \hat{\delta} + \hat{\beta}^2\ /\ mn^2\ \hat{\delta} = MSE(\tilde{\mu}_{i.}) \quad (4)$$

3.2. <u>การประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง</u>

เมื่อสมมติ $\sigma_{i.} = \hat{\beta}^{*}$ ดังนั้นของวิธีทดลองที่ 1 คือ

$$\sigma_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2\ /\ n_i - 1 \quad (5)$$

$$\hat{\delta} = (m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \quad (6)$$

$$\hat{c}_i^{*} = \hat{\beta}_i^{*}\ /\ n_i\hat{\delta} \quad (7)$$

$$\hat{\tau}_i^{*} = \hat{\delta} - \hat{\beta}_i^{*}\ /\ n_i \quad (8)$$

ตัวประมาณของค่าเฉลี่ยของตัวแบบเชิงเส้น คือ

$$E\ (\hat{\mu}^{*}_{i.}) = \bar{y}_{i.} - \hat{c}^{*}\ (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$$

จะได้ตัวประมาณของ MSE คือ

$$E(\hat{MSE}\ (\hat{\mu}^{**}_{i.})) = E(\ \hat{\tau}_i^{*}\ \hat{\beta}_i^{*}\ /\ n_i\ \hat{\delta} + \hat{\beta}_i^{*2}\ /\ mn_i^2\ \hat{\delta}\ )$$

$$= E(\ \hat{c}_i^{*}\ (\hat{\tau}^{*} + \hat{\beta}_i^{*}\ /\ n_i\ m))$$

วิธีนี้จะมีความเอนเอียง (Bias : B.) เท่ากับ

$$B = \hat{MSE}\ (\hat{\mu}^{**}_{i.}) - MSE(\tilde{\mu}_{i.}) \quad (9)$$