บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 <u>การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบบล็อคไม่สมบูรณ์สมดุลย์</u> (Analysis of Variance on Balance Incomplete Block Design)

แผนการทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์สมดุลย์เป็นแผนการทดลองที่มีขนาดของบล็อคน้อยกว่าจำนวนทรีทเมนต์ และทรีทเมนต์หนึ่ง ๆ ปรากฏกับทุก ๆ ทรีทเมนต์อื่นในบล็อคเดียวกันด้วยจำนวนครั้งเท่ากันโดยทั่วไปใช้สัญญลักษณ์ต่อไปนี้

t = จำนวนทรีทเมนต์

k = จำนวนหน่วยต่อบล็อค

b = จำนวนบล็อค

r = จำนวนซ้ำ

λ = จำนวนครั้งที่แต่ละคู่ทรีทเมนต์ปรากฏร่วมกัน

$\lambda = r(k - 1)/(t - 1)$

ตัวอย่างข้อมูลจากแผนการทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์สมดุลย์ที่มีค่า $t = 4$ $b = 4$, $r = 3$, $k = 3$ และ $\lambda = 1$

บล็อค \ ทรีทเมนต์	1	2	3	4	ผลรวม
1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	-	B_1
2	Y_{12}	Y_{22}	-	Y_{42}	B_2
3	Y_{13}	-	Y_{33}	Y_{43}	B_3
4	-	Y_{24}	Y_{34}	Y_{44}	B_4
ผลรวม	T_1	T_2	T_3	T_4	G_o

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นดังนี้

Source of Variation	df	SS	MS	F
Treatment	t-1	SSTr	SSTr/(t-1)	MSTr/MSE
Block	b-1	SSB	SSB/(b-1)	
Error	tr-t-b+1	SSE	SSE/(tr-t-b+1)	
Total	tr-1	SST		

SST = Sum of Square Total

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - C.F. \qquad \text{--------------------(2.1)}$$

$$C.F. = G_o^2/n = (\sum_i \sum_j Y_{ij})^2/n$$

n = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

$= tr = bk$

SSB = Sum of Square Block

$$= \sum_{j} (B_j^2/k) - C.F \qquad \text{------------------(2.2)}$$

B_j = ผลรวมของทุกค่าสังเกตในบล็อค j

SSTr(adj) = Sum of Square Treatment Adjust for Block

$$= \sum_{i=1}^{t} Q_i^2 /(\lambda t/k) \qquad \text{------------------(2.3)}$$

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} B_{(i)}$$

T_i = ผลรวมของทรีทเมนต์ i

$B_{(i)}$ = ผลรวมของทุกค่าสังเกตที่ปรากฏในบล็อคที่มีทรีทเมนต์ i ปรากฏ

SSE = Sum of Square Error

$$= SST - SSB - SSTr(adj) \qquad \text{------------------(2.4)}$$

2.2 <u>วิธีวิเคราะห์ข้อมูลเมื่อข้อมูลสูญหาย</u>

วิธีวิเคราะห์ข้อมูลเมื่อเกิดปัญหาข้อมูลสูญหายทั้งบล็อคในแผนการทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์สมดุลย์ที่สนใจนำมาศึกษาเปรียบเทียบในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มี 3 วิธีด้วยกันคือ

1. วิธีของ P.D. PURI
2. วิธีของ G.N. WILKINSON
3. วิธีประมาณค่าข้อมูลที่สูญหายโดยให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด

2.2.1 วิธีของ P.D. PURI

กำหนดให้

t = จำนวนทรีทเมนต์

b = จำนวนบล็อค

r = จำนวนซ้ำ

k = จำนวนหน่วยทดลองต่อบล็อค

λ = จำนวนครั้งที่ทรีทเมนต์แต่ละคู่ปรากฏร่วมกัน

$\lambda = \lambda(k-1)/(t-1)$

$Q_i = T_i - \frac{1}{k} B_{(i)}$

T_i = ผลรวมของทรีทเมนต์ i

$B_{(i)}$ = ผลรวมของทุกค่าสังเกตที่ปรากฏในบล็อคที่มีทรีทเมนต์ i ปรากฏ

$\mu_1 = (r-\lambda)/r(k-1)$

$\mu_2 = (r-\lambda)/r-k$

$\mu_3 = (r-\lambda)(r-k)/rk(r-1)$

ให้ข้อมูลสูญหาย 1 บล็อค เพราะฉะนั้นข้อมูลจะสูญหายไปจำนวน k ค่า สมมติให้บล็อคที่ข้อมูลสูญหายบรรจุ ทรีทเมนต์ที่ 1,2,..., k อยู่ วิธีของ P.D.PURI นี้จะคำนวณค่าผลรวมกำลังสอง ของทรีทเมนต์ (Sum of Square Tretment) ใหม่ ดังนี้

$$SSTr(adj) = \left[\sum_{i=1}^{k} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} Q_i \right)^2 / k \right] / (r-1)(1-\mu_1)$$

$$+ \left[\sum_{i=k+1}^{t} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} Q_i \right)^2 / (t-k) \right] / r(1-\mu_2)$$

$$+ \left[\frac{1}{r(t-k)} + \frac{1}{k(r-1)} \right] \left(\sum_{i=1}^{k} Q_i \right)^2 / (1-\mu_3) \quad \text{---(2.5)}$$

ส่วนค่าอื่น ๆ คำนวณตามปกติ แต่จำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom) จะเปลี่ยนแปลงดังนี้

- ของบล็อค จากเดิมเท่ากับ b-1 เปลี่ยนเป็น b-2
- ของทั้งหมด จากเดิมเท่ากับ tr-1 เปลี่ยนแป็น tr-k-1
- ของความคลาดเคลื่อน จากเดิมเท่ากับ tr-t-b+1

เปลี่ยนแป็น tr-t-b-k+2

2.2.2 วิธีของ G.N. WILKINSON

ถ้าให้ s = จำนวนบล็อคที่สูญหายแต่ละบล็อคมี k ค่าดังนั้นจำนวนข้อมูลที่สูญหายทั้งหมดเท่ากับ s.k ค่า คำนวณค่าผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ (SSTr) ใหม่ดังนี้

$$SSTr(adj) = \frac{1}{r'} \sum_{i=1}^{t-sk} Q_i^2 + \frac{1}{(r'-1)} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} Q_{ij}^2 - \left[\frac{1}{kr'(r'-1)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{k} Q_{ij} \right)^2 \right] \quad \text{-----------------(2.6)}$$

เขียนเป็นตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนดังนี้

Source of variation	df	SS
Block (Ignoring Treatment)	b-s-1	$\frac{1}{k} \sum_{j=s+1}^{b} B_j^2 - \frac{1}{tr-sk} \left(\sum_{i=1}^{tr-sk} Y_i \right)^2$
Treatment (Bliminating Block)	t-1	SSTr(adj)
Residual	tr-b-t-sk+s+1	By difference
Total	tr-sk-1	$\sum_{i=1}^{tr-sk} Y_i^2 - \frac{1}{(tr-sk)} \left(\sum_{i=1}^{tr-sk} Y_i \right)^2$

เราศึกษาเฉพาะกรณี s = 1 (สูญหายเพียงบล็อคเดียว)

2.2.3 <u>วิธีประมาณค่าสูญหายโดยให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด</u>

สมมติให้แผนการทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์สมดุลย์เป็นดังนี้

Blocks \ Treatments	t_1	t_2	t_3	t_4	total
b_1	X_1	X_2	X_3	-	$\sum_{i=1}^{k} X_i$
b_2	a_{12}	a_{22}	-	a_{42}	B_2
b_3	a_{13}	-	a_{33}	a_{43}	B_3
b_4	-	a_{24}	a_{32}	a_{44}	B_4
Total	C_1+X_1	C_2+X_2	C_3+X_3	T_4	

สมมติให้บล็อคที่ s หาย (ในตาราง s = 1) แทนข้อมูลตัวที่หายด้วยตัวแปร

$$X_i \; ; \; i = 1,2,\ldots,k$$

คำนวณหาค่า Q

Q ของทรีทเมนต์ที่ปรากฏในบล็อคที่สูญหาย

$$Q_i = C_i + X_i - \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i + \sum_{j\neq s} B_{(i)j}\right] \; ; \; i = 1,2,\ldots, k$$

$\sum_{j\neq s} B_{(i)j}$: ผลรวมของทุกบล็อคที่มีทรีทเมนต์ i ปรากฏยกเว้นบล็อคที่สูญหาย

Q ของทรีทเมนต์กลุ่มที่ไม่ได้ปรากฏในบล็อคที่สูญหาย

$$Q_n = T_n - \frac{1}{k} \sum_j B_{(n)j} \quad ; \quad n = k + 1 ,\ldots, t$$

$\sum_j B_{(n)j}$ หมายถึง ผลรวมของบล็อคที่มีทรีทเมนต์ n ปรากฏ

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i = \sum_{i=1}^{k} (C_i + X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i - \frac{1}{k} \sum_{j\neq s} B_{(i)j}) + \sum_{n=k+1}^{t} (T_n - \frac{1}{k} \sum_j B_{(n)j})$$

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (C_i + X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1} X_i - \frac{1}{k} \sum_{j\neq s} B_{(i)j})^2 + \sum_{n=k+1}^{t} (T_n - \frac{1}{k} \sum_j B_{(n)j})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (C_i - \frac{1}{k} \sum_{j\neq s} B_{(i)j})^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \left\{(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j\neq s} B_{(i)j}) \cdot (X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i)\right\} + \sum_{i=1}^{k} (X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i)^2$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{t} (T_n - \frac{1}{k} \sum_j B_{(n)j})^2$$

$$SST = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{ij}^2 - C.F$$

$$SSTr = \frac{1}{r'} \sum_{i=1}^{t} Q_i^2 \quad ; \quad r' = \lambda t/k$$

$$SSB = \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_j^2 + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2 - C.F$$

$$SSE = SST - SSB - SSTr$$

$$= \sum_{i=1}^{k} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{ij}^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2 - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_j^2$$

$$- \frac{1}{r'} \left[\sum_{i=1}^{k} \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \left\{ \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. \left(X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i \right) \right\} + \sum_{i=1}^{k} \left(X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2 + \sum_{n=k+1}^{t} \left(T_n - \frac{1}{k} \sum_{j} B_{(n)j} \right)^2 \right]$$

เราต้องการทราบค่า X_i โดยให้ minimize SSE

$$\therefore \frac{dSSE}{dX_i} = 2X_i - \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i - \frac{2}{r'} \left[\left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right) + \left(X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i \right) \right] = 0$$

$$(r' - 1) \left(X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i \right) = \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right)$$

$$\left(X_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1} X_i \right) = \frac{1}{(r'-1)} \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right) - \frac{1}{k(r'-1)} \sum_{i=1}^{k} \left(C_i - \frac{1}{k} \sum_{j \neq s} B_{(i)j} \right)$$

เขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} (k-1)/k & -1/k & -1/k \ . \ . \ . & -1/k \\ -1/k & (k-1)/k & -1/k \ . \ . \ . & -1/k \\ \vdots & & & \\ -1/k & -1/k \ . \ . \ . & & (k-1)/k \end{bmatrix}_{kxk} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS \end{bmatrix}$$

$$A\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{E} \qquad \text{-------------}(2.6)$$

พิจารณาเมตริกซ์ A ให้ $\underset{\sim}{X}_j$ เป็น column vector $j = 1,2,...,k$

จากนิยามกล่าวว่า $\underset{\sim}{X}_j$ เป็นอิสระกันถ้า $\sum_{i=1}^{k} C_j\underset{\sim}{X}_j = 0$ แล้ว $C_j = 0 \ \forall_j$

$$\sum_{j=1}^{k} C_j\underset{\sim}{X}_j = C_1 \begin{bmatrix} (k-1)/k \\ -1/k \\ -1/k \\ \vdots \\ -1/k \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1/k \\ (k-1)/k \\ -1/k \\ \vdots \\ -1/k \end{bmatrix} + \ldots + C_k \begin{bmatrix} -1/k \\ -1/k \\ -1/k \\ \vdots \\ (k-1)/k \end{bmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

$$C_1 \frac{(k-1)}{k} - \frac{1}{k} C_2 - \frac{1}{k} C_3 - . . . . - \frac{1}{k} C_k = 0 \quad . . . \quad (1)$$

$$-1/k \ C_1 + \frac{(k+1)}{k} C_2 - \frac{1}{k} C_3 - . . . - \frac{1}{k} C_k = 0 \quad . . . \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$-1/kC_1 - \frac{1}{k} C_2 - 1/k \ C_3 - \ldots + \frac{k-1}{k} C_k = 0 \quad . . . \quad (k)$$

$$(1) - (2) \quad = \quad \frac{(k-1)}{k} C_1 + \frac{1}{k} C_1 - \frac{1}{k} C_2 - \frac{(k-1)}{k} C_2 = 0$$

$$C_1 - C_2 = 0$$

$$C_1 = C_2$$

จะเห็นว่า C_1 และ C_2 ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ C_1 และ C_2 จะเป็นค่าอะไรก็ได้ เพียงแต่ทั้งสองค่าจะต้องเท่ากัน จะเห็นว่ามี C_j อย่างน้อย 2 ค่าที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น $\underset{\sim}{X}_j$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ $\underset{\sim}{X}_j$ เป็น linearly dependent เพราะฉะนั้น แรงค์ของเมตริกซ์ A จึงน้อยกว่า k จึงไม่สามารถหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ A ได้

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ที่ไม่สามารถหาค่าอินเวอร์สได้ เราจะจัดรูปเมตริกซ์ A ใหม่ให้อยู่ในรูป

$$A = BF$$

โดย F เป็น Idempotent Matrix ($F^2 = F$)

และ $F = I - 11'/k$

1 เป็น column Unit

I เป็น Identity matrix

จะได้คำตอบของสมการ (2.6) เป็น

$$\underset{\sim}{X} = B^{-1}\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{F}$$

2.3 ตัวอย่างการคำนวณ

จากแผนการทดลองที่มีค่า $t = 4$, $b = 4$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda = 2$ ค่าสังเกตเป็นดังนี้

2.3.1 ข้อมูลปกติ

บล็อค \ ทรีทเมนต์	1	2	3	4	รวม
1	-	25.0826	31.2303	28.8372	$85.1501 = B_1$
2	21.8178	-	27.1457	19.1585	$68.1220 = B_2$
3	32.3762	27.0494	-	24.1018	$83.5274 = B_3$
4	17.5682	17.1650	27.2290	-	$61.9622 = B_2$
รวม	71.7622	69.2970	85.6050	72.0975	298.7617
	$= T_1$	$= T_2$	$= T_3$	$= T_4$	

คำนวณค่า $B_{(i)}$ ผลรวมของทุกค่าสังเกตที่ปรากฏในบล็อคที่มีทรีทเมนต์ i ปรากฏ

$$B_{(1)} = B_2 + B_3 + B_4$$
$$= 68.1220 + 83.5274 + 61.9622$$
$$= 213.6116$$

$$B_{(2)} = B_1 + B_3 + B_4$$
$$= 85.1501 + 83.5274 + 61.9622$$
$$= 230.6397$$

$$B_{(3)} = B_1 + B_2 + B_4$$

$$= 85.1501 + 68.122 + 61.9622$$

$$= 215.2343$$

$$B_{(4)} = B_1 + B_2 + B_3$$

$$= 85.1501 + 68.122 + 83.5274$$

$$= 236.7995$$

$$Q_i = T_i - \frac{1}{k} B_{(i)}$$

$$Q_1 = 71.7622 - \frac{1}{3}(213.6116)$$

$$= 0.5583$$

$$Q_2 = 69.297 - \frac{1}{3}(230.6397)$$

$$= -7.5829$$

$$Q_3 = 85.605 - \frac{1}{3}(215.2343)$$

$$= 13.8603$$

$$Q_4 = 72.0975 - \frac{1}{3}(236.7995)$$

$$= -6.8357$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i = .5583 + (-7.5829) + 13.8603 + (-6.8357)$$

$$= 0$$

$$SST = \sum_{i}^{4} \sum_{j}^{4} Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} Y_{ij}\right)^2}{12}$$

$$= (21.8178^2 + 32.3762^2 + \ldots + 24.1018^2) - \frac{(21.8178 + 32.3762 + \ldots + 24.1018)^2}{12}$$

$$= 283.2734$$

$$SSB = \frac{1}{k} \sum_{j} B_j^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} Y_{ij}\right)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{3}\left(85.1501^2 + 68.122^2 + \ldots + 61.9622^2\right) - 7438.2128$$

$$= 130.8906$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^{4} Q_i^2 / (\lambda t/k) = \frac{0.5583^2 + (-7.5829)^2 + (13.8603)^2 + (-6.8357)^2}{(2.4/3)}$$

$$= 111.2418$$

$$SSE = SST - SSB - SSTr$$

$$= 283.2734 - 130.8906 - 111.2418$$

$$= 41.141$$

degree of freedom ของ Error = $tr - t - b + 1 = 4.3 - 4 - 4 + 1 = 5$

$\therefore$ MSE $= 41.141/5 = 8.2282$

สุ่มให้ข้อมูลสูญหายไป 1 บล็อค ในที่นี้บล็อคที่ 3 สูญหาย ได้ตารางค่าสังเกตใหม่ดังนี้

ทรีทเมนต์ / บล็อค	1	2	3	4	รวม
1	.	25.0826	31.2303	28.8372	85.1501
2	21.8178	-	27.1457	19.1585	68.1220
3	missing	missing	-	missing	0
4	17.5682	17.1650	27.2290	-	61.9622
รวม	39.3860	42.2476	85.6050	47.9957	215.2343

2.3.2 <u>วิธีของ P.D. PURI</u>

$$SST = 21.8178^2 + 17.5682^2 + \ldots + 19.1585^2 - \frac{(215.2343)^2}{9}$$

$$= 213.3828$$

$$SSB = \frac{1}{3}(85.1501^2 + 68.1220^2 + 61.9622^2) - \frac{(215.2343)^2}{9}$$

$$= 96.1719$$

คำนวณค่า $B_{(i)}$

$$B_{(1)} = 68.122 + 61.9622 = 130.0842$$

$$B_{(2)} = 85.1501 + 61.9622 = 147.1123$$

$$B_{(3)} = 85.1501 + 68.1220 + 61.9622 = 215.2343$$

$$B_{(4)} = 85.1501 + 68.1220 = 153.272$$

คำนวณค่า Q_i

$$Q_1 = T_1 - \frac{1}{3} B_{(1)}$$

$$= 39.386 - \frac{1}{3}(130.0842) = -3.9754$$

$$Q_2 = T_2 - \frac{1}{3} B_{(2)}$$

$$= 42.2476 - \frac{1}{3}(147.1123) = -6.7898$$

$$Q_3 = T_3 - \frac{1}{3} B_{(3)}$$

$$= 85.6050 - \frac{1}{3}(215.2343) = 13.8603$$

$$Q_4 = T_4 - \frac{1}{3} B_{(4)}$$

$$= 47.9957 - \frac{1}{3}(153.272) = -3.0950$$

$$\text{SSTr(adj)} = \Big[\sum_{i=1}^{k} Q_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} Q_i)^2/k\Big] / (r-1)(1-\mu_1) + \Big[\sum_{i=k+1}^{t} Q_i^2$$

$$-(\sum_{i=1}^{k} Q_i)^2/(t-k)\Big] / r(1-\mu_2) + \left[\frac{1}{r(t-k)} + \frac{1}{k(r-1)}\right](\sum_{i=1}^{k} Q_i)^2/(1-\mu_3)$$

$$\mu_1 = (r-\lambda)/r(k-1)$$

$$= (3-2)/3(3-1) = 1/6$$

$$\mu_2 = (r-\lambda)/rk$$

$$= (3-2)/3.3 = 1/9$$

$$\mu_3 = (r-\lambda)(r-k)/rk(r-1)$$

$$= (3-2)(3-3)/3.3(3-2) = 0$$

$$SSTr(adj) = (-3.9754)^2 + (-6.7898)^2 (-3.0950)^2 - \frac{[-3.9754 + (6.7898) + (-3.0950)]^2}{3} /2(1-\frac{1}{6})$$

$$+ (13.8603)^2 - \frac{[3.9754 + (-6.7898) + (-3.0950)]^2}{(4-3)} /3(1-\frac{1}{9})$$

$$+ \left[\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(3-1)}\right] \cdot \frac{[(-3.9754) + (-6.7898) + (-3.0950)]^2}{1-0}$$

$$= 100.5228$$

$$\therefore SSE = SST - SSB - SSTr(adj)$$

$$= 213.3828 - 96.1719 - 100.5228$$

$$= 16.6881$$

degree of freedom ของ Error คือ $t.r-t-b-k+2 = 4.3-4-4-3+2 = 3$

$$\therefore MSE = \text{Mean Square Error} = \frac{16.6881}{3} = 5.5627$$

ดังนั้นค่า Mean Absolute Error ของวิธีที่ 1 คือ $\frac{|8.2282 - 5.56270|}{1} = 2.6655$

2.3.3 <u>วิธีของ G.N. WILKINSON</u>

SST และ SSB คำนวณเหมือนวิธีของ P.D. PURI

แต่ SSTr(adj) คำนวณดังนี้

$$SSTr(adj) = \frac{1}{r'} \sum_{i=1}^{t-sk} Q_i^2 + \frac{1}{r'} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} Q_{ij}^2 - \frac{1}{kr'(r'-1)} \sum_{j=1}^{s} (\sum_{i=1}^{k} Q_i)^2$$

$$s = 1 : r' = \lambda t/k = 2.4/3 = 8/3$$

$$SSTr(adj) = \frac{3}{8}(13.8603^2) + \frac{3}{8}(-3.9754^2 + -6.7898^2 + -3.095^2)$$

$$- \frac{1}{3(\frac{8}{3})(\frac{3}{8}-1)}(-3.9754 - 6.7898 - 3.095)^2$$

$$= 100.5228$$

$$\therefore SSE = SST - SSB - SSTr(adj)$$

$$= 213.3828 - 96.1719 - 100.5228$$

$$= 16.6881$$

$$MSE = \frac{16.6881}{3} = 5.5627$$

ค่า Mean Absolute Error วิธีที่ 2 คือ $\frac{8.2282 - 5.56270}{1} = 2.6655$

2.3.4 <u>วิธีประมาณค่า</u>สูญ<u>หายโดยให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด</u>

ให้ X_1 , X_2, X_3 แทนค่าข้อมูลสูญหายในบล็อคที่ 3 ทรีทเมนต์ 1,2,4 ตามลำดับ

$$\therefore X_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i = \frac{1}{r'-1}(C_i - \frac{1}{k}\sum_{j\neq 3} B_{(i)j}) - \frac{1}{k(r'-1)}\sum_{i=1}^{k}(C_i - \frac{1}{k}\sum_{j\neq 3} B_{(i)j})$$

จะเห็นว่า $C_i - \frac{1}{k}\sum_{j\neq 3} B_{(i)j}$ ก็คือค่า Q_i เมื่อบล็อคที่ 3 ไม่มีข้อมูลหรือเป็นศูนย์ แต่ $i = 1,2,4$

เมื่อ $i = 1 \quad Q_1 = 39.386 - \frac{1}{3}(68.122 + 61.9622) = -3.9754$

$i = 2 \quad Q_2 = 42.2476 - \frac{1}{3}(85.1501 + 61.9622) = -6.7898$

$i = 4 \quad Q_4 = 47.9957 - \frac{1}{3}(85.1501 + 68.122) = -3.0950$

$$\frac{1}{k(r'-1)} \sum_{i=1}^{k} (C_i - \frac{1}{k} \sum_{j\neq 3} B_{(i)j}) = \frac{1}{3(\frac{8}{3}-1)} (-13.8602) = -2.77204$$

$$\frac{1}{(r'-1)} = \frac{1}{(\frac{8}{3}-1)} = \frac{3}{5}$$

$$X_1 - \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{3}{5}(-3.9754) - (-2.77204)$$

$$= 0.3868 \quad \text{---------------}(1)$$

$$X_2 - \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{3}{5}(-6.7898) - (-2.77204)$$

$$= -1.30184 \quad \text{---------------}(2)$$

$$X_3 - \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{3}{5}(-3.0950) - (-2.77204)$$

$$= 0.91504 \quad \text{---------------}(3)$$

เขียนเป็นเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1.3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3868 \\ -1.30184 \\ 0.91504 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{E}$$

เนื่องจาก A เป็น Singular matrix จัดเมตริกซ์ A ใหม่เป็น

$A = BF$ โดย $F = I - 11'/k$; F เป็น idempotent matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1.3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{F}{\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}}$$

$\therefore$ คำตอบของสมการคือ $B^{-1} . \underset{\sim}{E}$

เนื่องจาก B เป็น Identity matrix เพราะฉะนั้น B^{-1} ก็เป็น identity matrix ดังนั้นคำตอบของสมการก็คือ $\underset{\sim}{E}$ นั่นเอง

$$\therefore \quad X_1 = 0.3868$$

$$X_2 = -1.30184$$

$$X_3 = 0.91504$$

ลองแทนค่าในสมการ (1) $= 0.3868 - \frac{1}{3}[0.3868 - 1.30184 + 0.91504] = 0.3868$

ลองแทนค่าในสมการ (2) $= -1.30184 - \frac{1}{3}(0) = -1.30184$

ลองแทนค่าในสมการ (3) $= 0.91504 - \frac{1}{3}(0) = 0.91504$

แทนค่า X_1 , X_2, X_3 ลงในตารางได้ตารางใหม่ดังนี้

บล็อค \ ทรีทเมนต์	1	2	3	4	รวม
1	-	25.0826	31.2303	28.8372	85.1501
2	21.8178	-	27.1457	19.1585	68.1220
3	0.3868	-1.30184	-	0.91504	0
4	17.5682	17.1650	27.2290	-	61.9622
รวม	39.7728	40.9458	85.6050	48.9107	215.2343

คำนวณค่า $B_{(i)}$ ผลรวมของบล็อคที่มีทรีทเมนต์ i ปรากฏ

$$B_{(1)} = 68.1220 + 0 + 61.9622 = 130.0842$$

$$B_{(2)} = 85.1501 + 0 + 61.9622 = 147.1123$$

$$B_{(3)} = 85.1501 + 68.1220 + 61.9622 = 215.2343$$

$$B_{(4)} = 85.1501 + 68.1220 + 0 = 153.272$$

คำนวณค่า Q_i

$$Q_1 = 39.7728 - \frac{1}{3}(130.0842) = -3.5886$$

$$Q_2 = 40.9458 - \frac{1}{3}(147.1123) = -8.0917$$

$$Q_3 = 85.6050 - \frac{1}{3}(215.2343) = 13.8603$$

$$Q_4 = 48.9107 - \frac{1}{3}(153.2720) = -2.1800$$

$$SSTr(adj) = \sum_{i=1}^{4} Q_i^2 / (\lambda t/k) = 103.2052$$

$$SST = 21.8178^2 + 0.3868^2 + \ldots + 0.91504^2 - \frac{(21.8178 + 0.3868 + \ldots + 0.91504)^2}{12}$$

$$= 1502.9015$$

$$SSB = \frac{1}{3}(85.1501^2 + 68.1220^2 + 61.9622^2) - \frac{(215.2343)^2}{12}$$

$$= 1383.0032$$

$$SSE = 16.6931$$

$$\therefore \; MSE = \frac{16.6931}{3} = 5.56437$$

ค่า Mean Absolute Error ของวิธีที่ 3 คือ $\frac{|8.2282 - 5.56437|}{1} = 2.6638$

<u>สรุปขั้นตอนการคำนวณของวิธีที่ 3</u>

1. พิจารณาว่าบล็อคที่สูญหายว่ามีทรีทเมนต์อะไรบ้างปรากฏอยู่
2. คำนวณค่า Q_i เฉพาะ i ตามข้อ 1 แล้วหาค่าผลรวม Q_i ($\sum_i Q_i$)
3. ประมาณค่าสูญหาย X_i ด้วย

$$X_i = \frac{1}{(r'-1)} Q_i - \frac{1}{k(r'-1)} \sum_{i=1} Q_i \quad ; \quad r' = \lambda t/k$$

4. เมื่อได้ค่าประมาณของค่าสังเกตที่สูญหายแล้วนำไปแทนที่แล้ววิเคราะห์ความแปรปรวนตามปกติ

แต่องศาแห่งความเป็นอิสระของทั้งหมดเป็น $tr - k - 1$

องศาแห่งความเป็นอิสระของบล็อคเป็น $b - 2$

องศาแห่งความเป็นอิสระของทรีทเมนต์เป็น $t - 1$ (เหมือนเดิม)

องศาแห่งความเป็นอิสระของความคลาดเคลื่อนเป็น $tr - k - b - t + 2$