# บทที่ 3

## การหาสเปกตรัมการตอบสนอง

3.1 การจำลองคลื่นแผ่นดินไหว

เนื่องจากบันทึกข้อมูลคลื่นแผ่นดินไหวที่เกิดขึ้นจริงในอดีตในประเทศไทยมีน้อยมาก จึงจำเป็นต้องพึ่งวิธีการจำลองคลื่นแผ่นดินไหว เพื่อใช้สร้างบันทึกตามเวลา (Time History Record) ของอัตราเร่งที่ผิวดินให้เป็นไปตามคุณลักษณะของแผ่นดินไหวที่ต้องการ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์ของโครงสร้างภายใต้อิทธิพลของแผ่นดินไหว

ด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodic Function) สามารถแยกออกเป็นอนุกรมของคลื่นซายน์ (Sinusoidal) ได้ดังสมการที่ (3.1)

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \tag{3.1}$$

โดยที่ $A_i$ คือ ขนาดของอัตราเร่ง X(t) ใน ฮาร์โมนิค ที่ i

$\phi_i$ คือ มุมเฟส (Phase Angle)

$\omega_i$ คือ ความถี่เชิงมุม

ลักษณะสมบัติ (Characteristics) ของคลื่นแผ่นดินไหว กำหนดโดย ฟังก์ชันเพาเวอร์ สเปกตรัล เดนซิตี้ (Power Spectral Density), $G(\omega)$ โดยค่า $G(\omega_i)\,\Delta\omega$ ให้ค่าส่วน (Contribution) ของพลังงานที่ให้โดยคลื่นที่ความถี่ $\omega_i$ ฟังก์ชันเพาเวอร์ สเปกตรัล เดนซิตี้ที่นิยมใช้กันแพร่หลาย คือฟังก์ชันที่เสนอโดย Kanai-Tajimi (1960) ซึ่งแสดงในสมการที่ (3.2) และรูปที่ 3.1

$$G(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2}{(1 - (\omega/\omega_g))^2 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2}\, G_o \tag{3.2}$$

โดยที่ $G_o$ เป็นค่าวัดความแรงของการสั่นไหว (Chakravorty, Wong และ Foster, 1979 )

$\omega_g$ เป็นความถี่เด่นของชั้นดินแข็ง (Predominant Circular Frequency)

$\zeta_g$ เป็นความหน่วงของชั้นดินแข็ง (Damping)

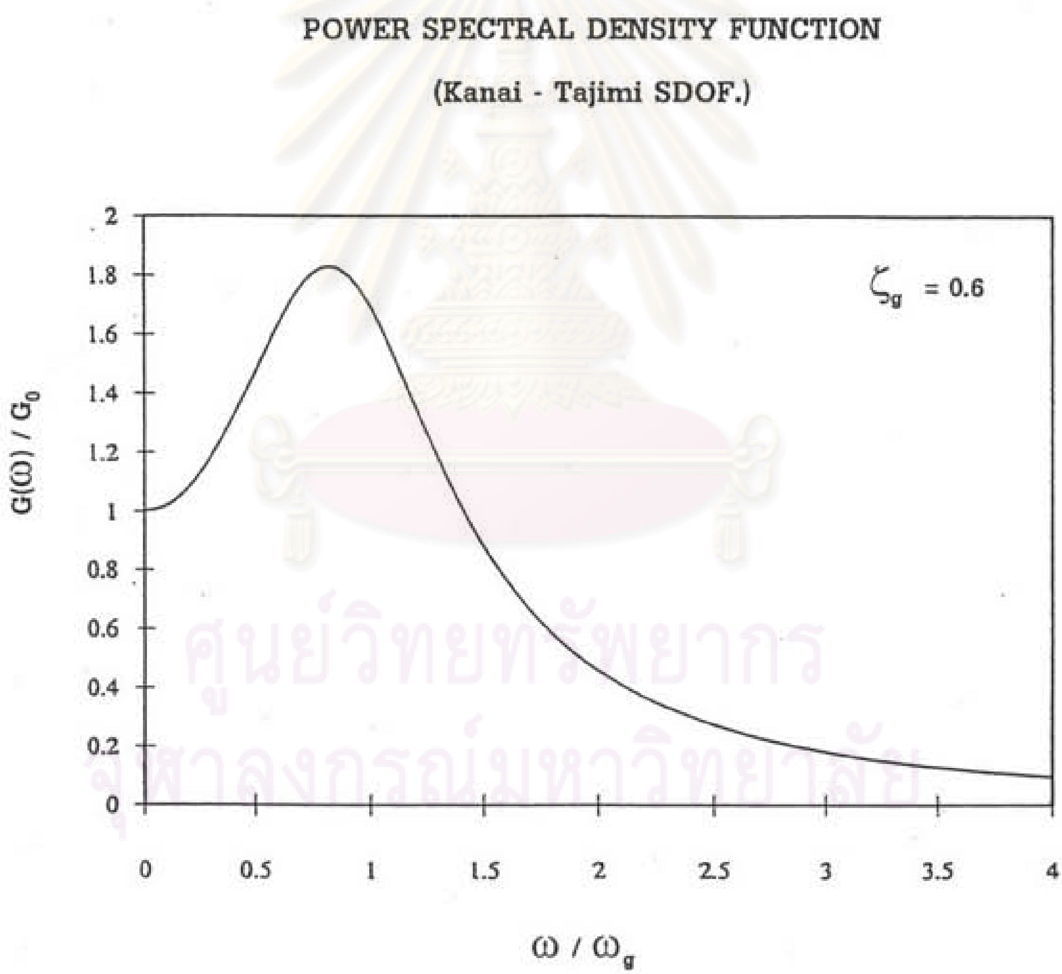
Haile (1992) ได้ใช้เครื่องมือวัดความสั่นสะเทือนขนาดเล็ก (Microtremor) วัดความสั่นสะเทือนในเมือง Odawara ประเทศญี่ปุ่น เพื่อศึกษาถึงการสั่นสะเทือนของบริเวณและสภาพชั้นดินที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยพบว่าสำหรับคาบเวลาที่สั้น (Short Period) ค่าคาบเวลาเด่นของชั้นดิน (Predominant Period, $T_g$) มีค่าประมาณ 0.2 - 0.3 วินาที และสำหรับคาบเวลาที่ยาว (Long Period) ค่าคาบเวลาเด่นของชั้นดินมีค่ามากถึง 3 - 4 วินาที

จากข้อมูลในอดีต แผ่นดินไหวขนาดใหญ่ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่นอกประเทศไทยได้เคยส่งผลทำให้เกิดการสั่นไหวของอาคารสูง แม้ว่าจะอยู่ห่างไปมากกว่า 800 กิโลเมตรก็ตาม เช่น แผ่นดินไหวเมื่อวันที่ 6 พ.ย. 2531 ขนาด 7.6 ริคเตอร์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่พรมแดนจีนและพม่า ซึ่งห่างจากกทม. ราว 1,000 กิโลเมตร หรือ แผ่นดินไหวเมื่อวันที่ 12 ก.ค. 2538 ขนาด 7.2 ริคเตอร์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่พรมแดนจีนและพม่า ซึ่งห่างจากกทม. ราว 800 กิโลเมตร ก็ได้ส่งผลให้ประชาชนในอาคารสูงของ กรุงเทพมหานคร รู้สึกถึงการสั่นไหวได้ ดังนั้น จึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาผลของแผ่นดินไหวที่จุดกำเนิดมีระยะห่างจากจุดที่พิจารณาด้วย

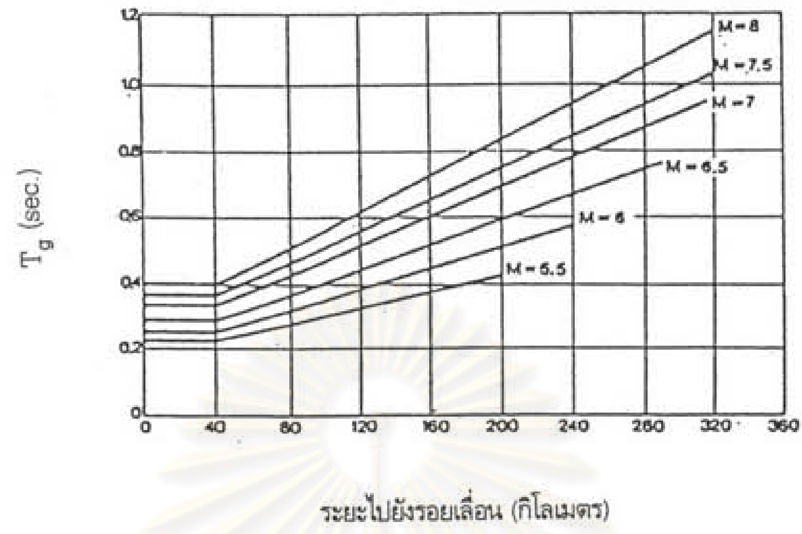
โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างคาบเวลาเด่นของชั้นดินแข็ง และระยะห่างจากจุดกำเนิดแผ่นดินไหวที่เสนอโดย Seed และ Idriss (1980) ดังรูปที่ 3.2 พบว่าเมื่อแผ่นดินไหวเกิดขึ้นใกล้จุดที่พิจารณา ค่าคาบเวลาเด่นของชั้นดินมีค่าน้อยสุดประมาณ 0.3 วินาที และเมื่อพิจารณาระยะห่างจากจุดกำเนิดแผ่นดินไหวประมาณ 800 กิโลเมตร ค่าคาบเวลาเด่นของชั้นดินมีค่าประมาณ 2 วินาทีสำหรับแผ่นดินไหวขนาด 7 หน่วยริคเตอร์ ดังนั้น ในงานวิจัยนี้จึงใช้วิธีการสุ่มค่า $T_g$ ตั้งแต่ 0.3 ถึง 2 วินาที ในการจำลองคลื่นแผ่นดินไหวโดยถือว่าทุกคาบเวลาเด่นของชั้นดินมีโอกาสการเกิดขึ้นเท่าๆ กัน เพื่อให้คำนึงถึงแหล่งกำเนิดแผ่นดินไหวทั้งที่มีระยะทางใกล้และไกล และใช้ฟังก์ชัน สเปกตรัล เดนซิตี้ (Spectral Density Function) ของ Kanai-Tajimi โดยสมมติค่า $\zeta_g = 0.6$ ซึ่งหลังจากที่ได้คลื่นแผ่นดินไหวในสถานะอยู่ตัว (Steady State) โดยการรวมคลื่นดังสมการที่ (3.1) แล้วทำการปรับแก้คลื่นที่ได้ด้วยฟังก์ชันความเข้ม I(t) เพื่อให้คำนึงถึงสถานะชั่วครู่ (Transient State) กล่าวคือ

$$Z(t) = I(t) \sum A_n \ \mathrm{Sin} \ ( \omega_n t + \phi_n ) \qquad (3.3)$$

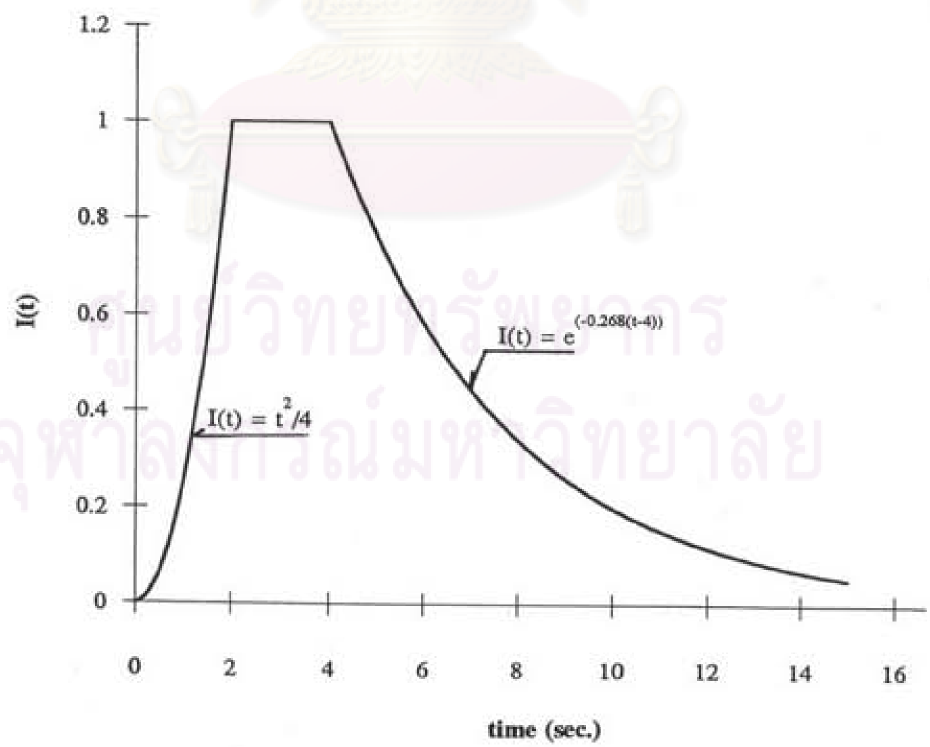
ฟังก์ชัน I(t) ที่ใช้ในงานวิจัยนี้แสดงในรูปที่ 3.3 การจำลองคลื่นแผ่นดินไหวทั้งหมดทำโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป SIMQKE ที่สร้างขึ้นโดย Gasparini และ Vanmarcke (1976) โดยที่ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SIMQKE แสดงในภาคผนวก รูปที่ 3.4 และ 3.5 แสดงตัวอย่างของคลื่นแผ่นดินไหวที่จำลองได้



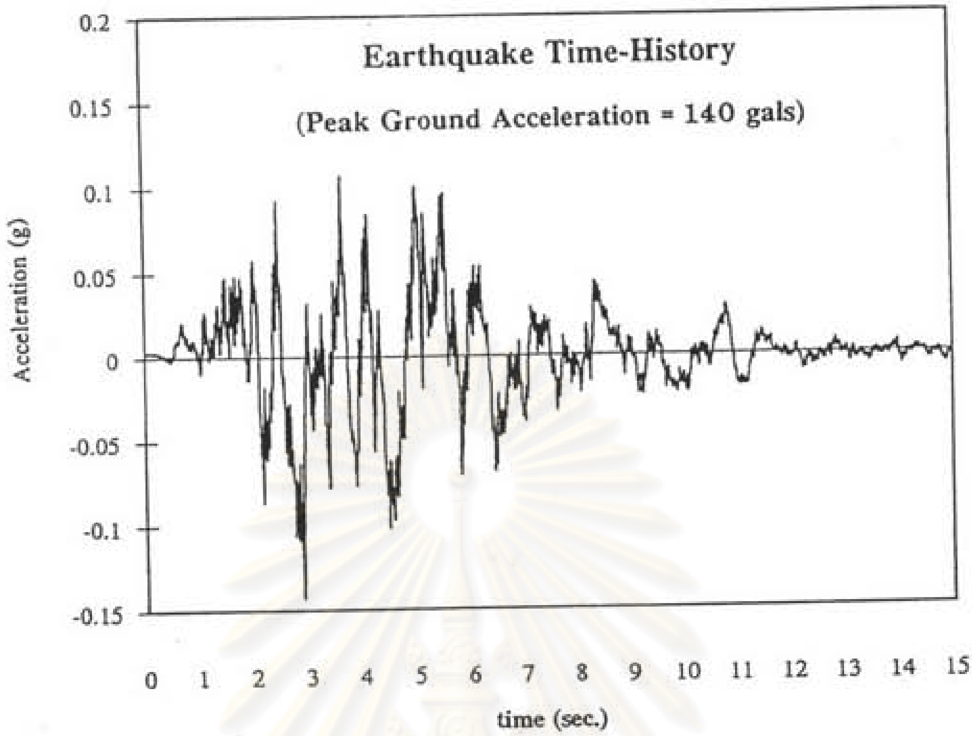

รูปที่ 3.1 แสดง ฟังก์ชันเพาเวอร์ สเปกตรัล เดนซิตี้ ของ Kanai-Tajimi



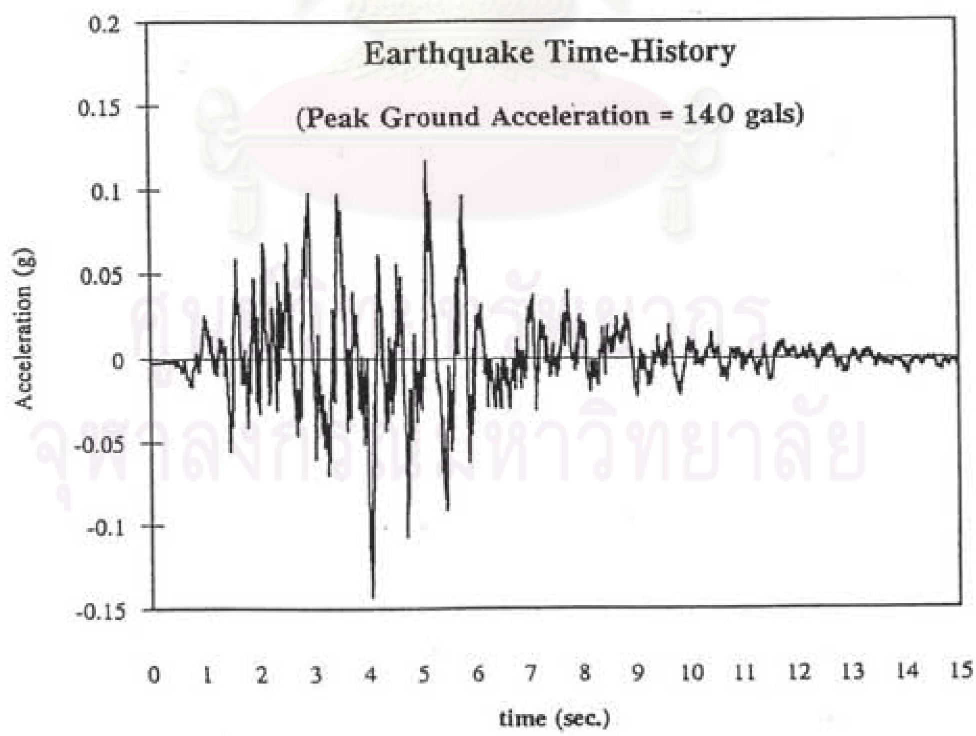

รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างคาบเวลาเด่นของชั้นดินและระยะห่างจากจุดกำเนิดแผ่นดินไหวสำหรับแผ่นดินไหวขนาดต่างๆ (Seed และ Idriss, 1982)




รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันความเข้มเพื่อใช้ปรับผลรวมของคลื่นซายน์



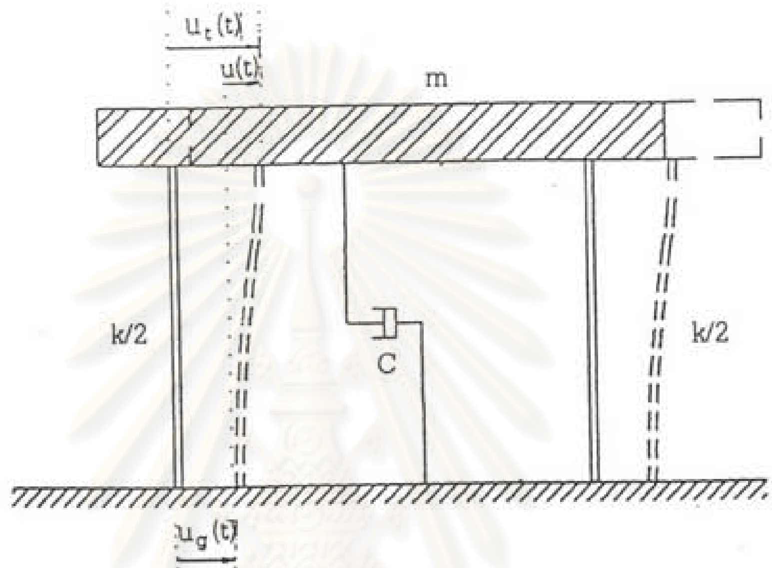

รูปที่ 3.4 ตัวอย่างคลื่นแผ่นดินไหวจำลองขึ้น (คาบเวลาเด่น 1.09 วินาที)




รูปที่ 3.5 ตัวอย่างคลื่นแผ่นดินไหวจำลองขึ้น (คาบเวลาเด่น 0.50 วินาที)

## 3.2 วิธีสเปกตรัมการตอบสนองในช่วงอิลาสติก

สเปกตรัมการตอบสนอง (Response Spectrum) คือกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าการตอบสนองสูงสุด กับ คาบการสั่นไหวธรรมชาติ (Natural Period of Vibration) ของระบบดีกรีของความเป็นอิสระเดี่ยว (Single Degree-of-Freedom), SDOF ภายใต้แรงกระทำพลศาสตร์ที่กำหนด เช่น แรงแผ่นดินไหว เป็นต้น




รูปที่ 3.6 แสดงระบบ SDOF ซึ่งมีมวล m , ค่าคงที่ของสปริง k ,และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง C

พิจารณาระบบดีกรีความเป็นอิสระเดี่ยวที่ฐานถูกทำให้เคลื่อนที่ด้วยแผ่นดินไหว ดังรูปที่ 3.6 การเคลื่อนที่ทั้งหมดของมวล, $u_t(t)$ หาได้จากผลรวมของการเคลื่อนที่ที่ฐาน, $u_g(t)$ กับ การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของมวลเทียบกับฐาน, u(t) นั่นคือ

$$u_t(t) = u_g(t) + u(t) \tag{3.4}$$

สมการที่ควบคุมการเคลื่อนที่ (Governing Equation of Motion) ของระบบ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$-(F_S + F_D) = m\ddot{u}_t = F_I \tag{3.5}$$

โดยที่ แรงอิลาสติก (Elastic Force) , $F_S = k\,u$ (3.6ก)

แรงหน่วง ( Damping Force ) , $F_D = C\,\dot{u}$ (3.6ข)

และ แรงเฉื่อย ( Inertia Force ) , $F_I = m\,\ddot{u}_t$ (3.6ค)

ในที่นี้ $\dot{u}$ หมายถึง อนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลา, $\ddot{u}$ หมายถึง อนุพันธ์ของ $\dot{u}$ เทียบกับเวลา

จากสมการที่ (3.4) ทำการหาอนุพันธ์อันดับสองและแทนค่าลงในสมการ (3.6ค) จะได้

$$F_I = m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) \tag{3.7}$$

แทนค่าสมการที่ (3.6ก), (3.6ข) และ (3.7) ลงในสมการที่ (3.5) จะได้สมการอนุพันธ์การเคลื่อนที่ของระบบ SDOF ดังนี้

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + ku = -m\,\ddot{u}_g(t) \tag{3.8}$$

ความถี่เชิงมุมของโครงสร้าง, $\omega$ สามารถหาได้จากการแก้ปัญหาเจาะจง (Eigen-Value Problem) ซึ่งจะได้ค่าเท่ากับ

$$\omega^2 = k / m \tag{3.9}$$

โดยการนิยามให้ อัตราส่วนความหน่วง (Damping Ratio, $\zeta$) เป็นอัตราส่วนระหว่างความหน่วงของระบบกับค่าความหน่วงวิกฤติ (Critical Damping) ดังสมการ

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2m\omega} \tag{3.10}$$

และแทนค่า C และ k จากสมการที่ (3.9) และ (3.10) ลงในสมการที่ (3.8) จะได้

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t) \tag{3.11}$$

สเปกตรัมการตอบสนองของการเคลื่อนที่, $S_d$ สามารถหาได้จากการแก้สมการที่ (3.11) โดยวิธีอินทิกรัลของดูฮาเมล (Duhamel Integral) แล้วใช้ค่าสูงสุด ซึ่งผลที่ได้แสดงในสมการที่ (3.12) ดังนี้

$$\begin{aligned} S_d &= \max\,[u(t)] \\ &= \max \frac{1}{\omega_d} \int_0^t (-\ddot{u}_g(\tau))\; e^{\zeta\omega(t-\tau)}\; \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{3.12}$$

เมื่อนิยาม ค่าสเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร็ว, $S_v$ คือค่าสูงสุดของผลอินติกรัลในสมการที่ 3.12 สำหรับคาบการสั่นไหวน้อย ค่า $\omega_d$ สามารถประมาณด้วยค่า $\omega$ ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างค่าสเปกตรัมการตอบสนองของการเคลื่อนที่และสเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร็ว สามารถประมาณได้จาก

$$S_d = S_v / \omega \tag{3.13}$$

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (สมการที่ 3.5) โดยเหตุที่แรงหน่วงจะมีเฟสต่างจากแรงอิลาสติก 90° ดังนั้นเมื่อแรงเฉื่อยมีค่าสูงสุด แรงอิลาสติกก็จะมีค่าสูงสุดเช่นกัน ค่าสเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร่ง, $S_a$ จึงมีความสัมพันธ์กับสเปกตรัมการตอบสนองของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ ด้วยอัตราส่วน k/m หรือ $\omega^2$ นั่นคือ

$$S_a = \omega^2 S_d \tag{3.14}$$

3.3 <u>วิธีสเปกตรัมการตอบสนองในช่วงอินอิลาสติก</u>

ระบบโครงสร้างที่พิจารณาในหัวข้อที่แล้วเป็นระบบอิลาสติกเชิงเส้น ซึ่งคุณสมบัติสติฟเนสและความหน่วงเป็นค่าคงที่ ในกรณีที่สติฟเนสของระบบมีการเปลี่ยนแปลงแบบไม่เชิงเส้น เช่นเกิดการคลากในโครงสร้างหลังจากรับแรงแผ่นดินไหว ทำให้สติฟเนสเปลี่ยนแปลงไปหลังเกิดการคลาก จำเป็นต้องใช้วิธีวิเคราะห์ด้านพลศาสตร์แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear Dynamic Analysis) ซึ่งอาจกระทำได้สะดวกโดยวิธีการอินติเกรตทีละขั้น (Step-by-Step Integration) ในวิธีการนี้พฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นของระบบจะถูกจำลองเป็นอนุกรมของระบบเชิงเส้นในแต่ละช่วงเวลาสั้นๆ ดังจะได้แสดงในหัวข้อต่อไป

3.3.1 วิธีอินติเกรตทีละขั้น (Step by Step Integration)

พิจารณาระบบดีกรีความเป็นอิสระเดี่ยวซึ่งมีคุณสมบัติแปรเปลี่ยนไม่เชิงเส้นดังแสดงในรูปที่ 3.7 สมการการเคลื่อนที่ของระบบเขียนได้เป็น

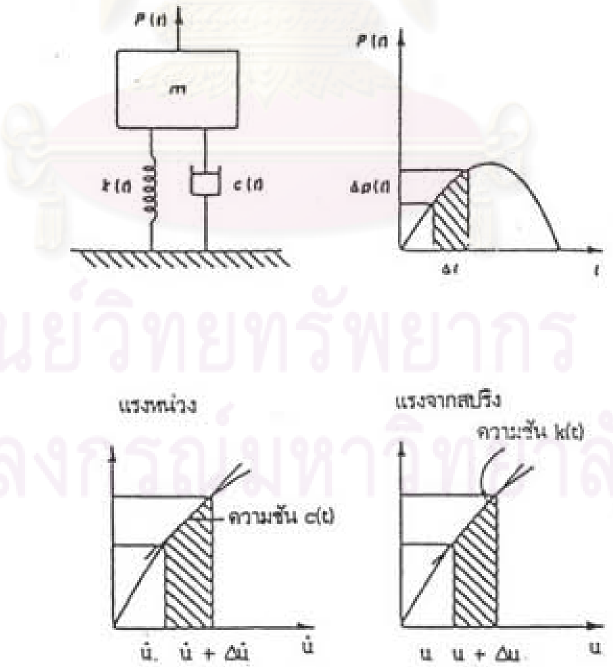
$$m\ddot{u} + c(t)\dot{u} + k(t)u = - m\,\ddot{u}_g(t) \tag{3.15}$$

ในช่วงเวลา $\Delta t$ การเปลี่ยนแปลงของแรงภายนอกที่มากระทำ $\Delta p(t)$ ต้องเท่ากับการเพิ่มขึ้นของแรงเฉื่อย แรงหน่วง และแรงจากสปริงที่แทนด้วย $m\Delta\ddot{u}$, $c(t)\Delta\dot{u}$ และ $k(t)\Delta u$ ตามลำดับ โดยที่ มวล, m กำหนดให้คงที่ และ c(t), k(t) เป็นค่าสัมประสิทธิความหน่วง และสติฟเนสเมื่อเวลา t ที่พิจารณา พจน์ $\Delta u$ คือการเคลื่อนที่ที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลา $\Delta t$ และ $\Delta\dot{u}$ $\Delta\ddot{u}$ คือความเร็วและอัตราเร่งที่เปลี่ยนไปตามลำดับ ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละช่วงเวลา สามารถเขียนได้เป็น

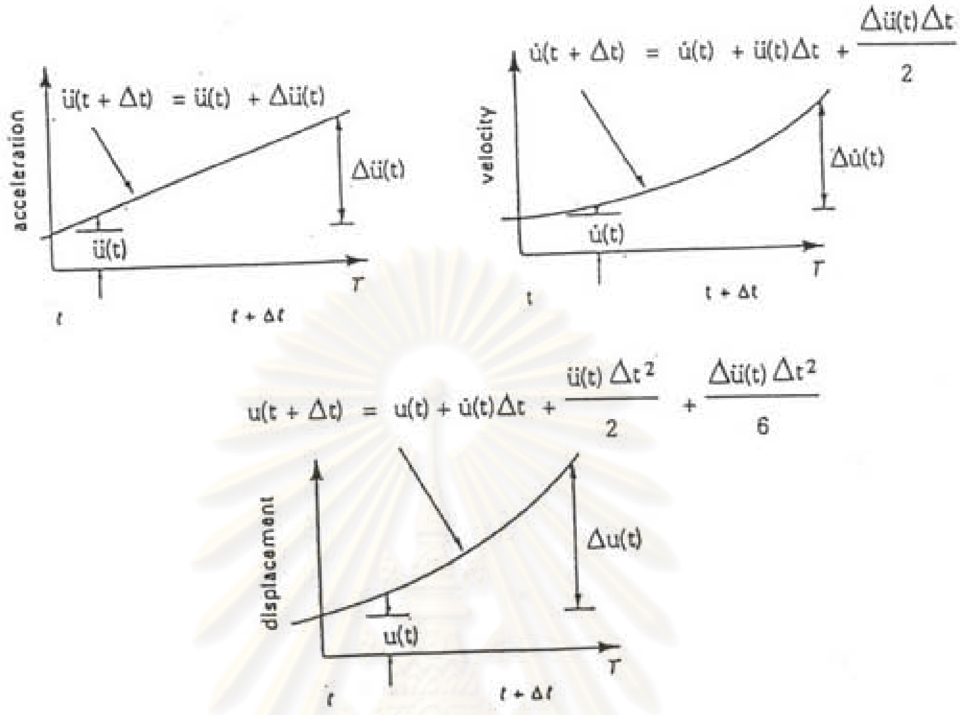
$$m\,\Delta\ddot{u} + c(t)\,\Delta\dot{u} + k(t)\,\Delta u = \Delta p(t) \tag{3.16}$$

โดยที่ c(t) และ k(t) หมายถึงค่าความหน่วงและสติฟเนส ตามลำดับ ที่เวลาตั้งต้น t ของช่วงเวลาที่พิจารณา

สำหรับในกรณีโครงสร้างถูกกระทำให้เคลื่อนที่ด้วยแผ่นดินไหว การเปลี่ยนแปลงของแรงภายนอกที่มากระทำ $\Delta p(t)$ สามารถแทนด้วย $\Delta p(t) = -m\,\Delta\ddot{u}_g$




<u>รูปที่ 3.7</u> ระบบดีกรีความเป็นอิสระเดี่ยวแบบไม่เชิงเส้น




<u>รูปที่ 3.8</u> ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงของอัตราเร่ง, ความเร็ว และการเคลื่อนที่

วิธีอินติเกรตทีละขั้นที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นวิธีการที่ใช้แก้สมการการเคลื่อนที่ของระบบแบบไม่เชิงเส้น (สมการที่ 3.16) โดยการสมมติให้อัตราเร่งมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง (Clough และ Penzien, 1975) ดังนั้นความเร็วจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นพาราโบลา และการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนแปลงในลักษณะคิวบิค (ดูรูปที่ 3.8) และจากการสมมติให้คุณสมบัติทางพลศาสตร์ของระบบคงที่ตลอดช่วงเวลา $\Delta t$ จะหาการเปลี่ยนแปลงของความเร็วและการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$\Delta\dot{u}(t) = \ddot{u}(t)\,\Delta t + \Delta\ddot{u}(t)\,\Delta t/2 \qquad (3.17)$$

$$\Delta u(t) = \dot{u}(t)\,\Delta t + \ddot{u}(t)\,\Delta t^2/2 + \Delta\ddot{u}(t)\,\Delta t^2/6 \qquad (3.18)$$

จากสมการที่ (3.18) จะได้

$$\Delta\ddot{u}(t) = 6\,\Delta u(t)/\Delta t^2 - 6\,\dot{u}(t)/\Delta t - 3\,\ddot{u}(t) \qquad (3.19)$$

แทนสมการที่ (3.19) ลงในสมการที่ (3.17) จะได้

$$\Delta\dot{u}(t) = 3\,\Delta u(t)/\,\Delta t - 3\,\dot{u}(t) - \Delta t\,\ddot{u}(t)/2 \qquad (3.20)$$

แทนค่าสมการที่ (3.19) และ (3.20) ลงในสมการที่ (3.16) จะได้สมการการเคลื่อนที่เพิ่มส่วน (Incremental Equation of Motion) ดังนี้

$$m\,[6\,\Delta u(t)/\,\Delta t^{2} - 6\,\dot{u}(t)/\,\Delta t - 3\,\ddot{u}(t)] + c(t)\,[3\,\Delta u(t)/\,\Delta t - 3\,\dot{u}(t) - \Delta t\,\ddot{u}(t)/2] + k(t)\,\Delta u(t) = \Delta p(t) \qquad (3.21)$$

สมการที่ (3.21) สามารถจัดใหม่ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของสติฟเนสทางพลศาสตร์ได้ดังนี้

$$\widetilde{k}(t)\,\Delta u(t) = \Delta\widetilde{p}(t) \qquad (3.22)$$

โดยที่
$$\widetilde{k}(t) = k(t) + 6\,m\,/\,\Delta t^{2} + 3\,c(t)/\,\Delta t \qquad (3.23)$$

และ
$$\Delta\widetilde{p}(t) = \Delta p(t) + m\,[6\,\dot{u}(t)/\,\Delta t + 3\,\ddot{u}(t)] + c(t)\,[3\,\dot{u}(t) + \Delta t\,\ddot{u}(t)/2] \qquad (3.24)$$

สมการที่ (3.24) เป็นสมการที่ใช้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อนำไปคำนวณหาการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้นได้จากสมการที่ (3.22) จากนั้นนำค่าที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่ (3.20) เพื่อคำนวณหาค่าความเร็วที่เพิ่มขึ้น ค่าการเคลื่อนที่และความเร็วเพิ่มขึ้นที่คำนวณได้ จะนำไปบวกกับค่าที่กำหนดในเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณในขั้นต่อไป

การสมมติให้อัตราเร่งมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรง และการสมมติให้คุณสมบัติทางพลศาสตร์คงที่ในการคำนวณแต่ละขั้นนั้น ทำให้ได้ค่าสถานะที่ปลายของขั้นเป็นค่าประมาณเท่านั้น และค่าต่างๆ ที่ได้อาจไม่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่โดยสมบูรณ์ที่ปลายของขั้น ดังนั้นในการคำนวณความเร่งที่จุดเริ่มต้นใหม่จึงต้องพิจารณาสมการของการเคลื่อนที่ที่จุดเริ่มต้นของขั้นนั้น กล่าวคือ

$$\ddot{u}(t_{i+1}) = [p(t_{i+1}) - f_d(t_{i+1}) - f_s(t_{i+1})]\,/\,m \qquad (3.25)$$

โดยที่ $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

วิธีการอินติเกรตโดยสมมติให้อัตราเร่งมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเส้นตรงนี้ เป็นวิธีที่มีความเสถียรภาพอย่างมีเงื่อนไข (Conditionally Stable) และให้ค่าลู่ออก (Divergent) ถ้าช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณ $\Delta t$ มีค่ามากกว่าประมาณครึ่งหนึ่งของคาบเวลาการสั่นไหวของโครงสร้าง T อย่างไรก็ตามเพื่อคำนึงถึงความละเอียดถูกต้องของการคำนวณ จำเป็นต้องเลือกช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวณน้อยกว่านั้น โดยทั่วไปกำหนดให้อัตราส่วน $\Delta t/T < 0.1$ ซึ่งเป็นค่าที่ให้คำตอบมีความถูกต้อง (Accuracy) พอสมควร (Clough และ Penzien, 1975)

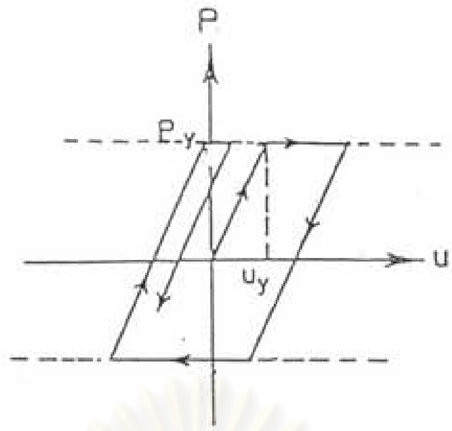


3.3.2 แบบจำลองสติฟเนสของระบบความเป็นอิสระเดี่ยว

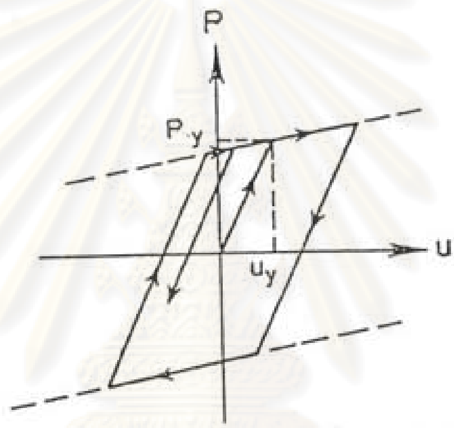
แบบจำลองสติฟเนสของระบบความเป็นอิสระเดี่ยวแบบไม่เชิงเส้นที่รู้จักและใช้กันอย่างแพร่หลายมีอยู่ 3 แบบ คือ แบบจำลองอิลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ (Elasto-Perfectly Plastic Model) (รูปที่ 3.9a) แบบจำลองแข็งเพิ่มคิเนเมติก (Kinematic Hardening Model) (รูปที่ 3.9b) และแบบจำลองสติฟเนส-ดีเกรดดิง (Stiffness Degrading Model) ดังแสดงในรูปที่ 3.9c โดยทั่วไปแบบจำลองสองแบบแรกมักใช้แทนพฤติกรรมของโครงสร้างเหล็ก ซึ่งสติฟเนสไม่มีการลดเสื่อมแม้จะถูกแรงกระทำกลับไปกลับมา (Load Reversal) หลายครั้งก็ตาม สำหรับแบบจำลองสติฟเนส-ดีเกรดดิง เหมาะสำหรับจำลองแทนพฤติกรรมของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก ซึ่งจากผลการทดลองของผู้วิจัยที่ผ่านมาพบว่าชิ้นส่วนมีสติฟเนส ลดเสื่อมไปเมื่อถูกแรงกระทำกลับไปกลับมา Takeda, Sozen and Neilson (1970) ได้สร้างแบบจำลองฮิสเทียเรซิส (Hystersis Model) โดยพิจารณากราฟพื้นฐานสามช่วง คือ ช่วงก่อนการแตกร้าว ช่วงจากการแตกร้าวถึงจุดคลาก และช่วงเลยจุดคลากซึ่งเกิดความเครียดแข็งเพิ่ม (Strain-Hardening) ของเหล็กเสริม สำหรับการตอบสนองภายใต้การกระทำกลับไปกลับมาของแรงนั้น Takeda ได้ให้เงื่อนไขและแนวทางไว้ เพื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ของแรงและการเคลื่อนที่



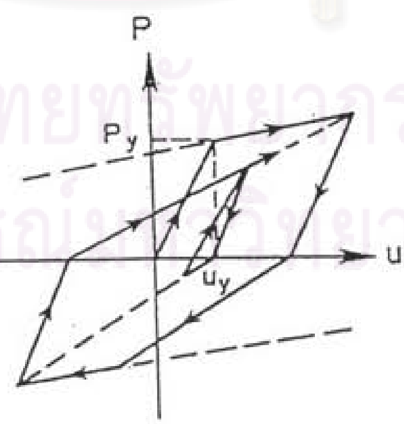
สำหรับงานวิจัยนี้ใช้แบบจำลองที่ง่ายขึ้น ซึ่งประยุกต์จากแบบจำลองของ Takeda (Newmark และ Ridell, 1979; Kanan และ Powell, 1973) ดังแสดงในรูปที่ 3.10 โดยที่ถือว่าแรงที่จุดแตกร้าวมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงที่จุดคลาก ดังนั้นจึงสามารถแทนกราฟพื้นฐานได้ด้วยเส้นตรงสองเส้น (Bilinear Curve) แบบจำลองนี้มีคุณสมบัติของสติฟเนสดีเกรดดิงและผลของแรงกระทำกลับไปกลับมาคล้ายกับแบบจำลองของ Takeda ซึ่งสามารถหาได้ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้ (ดูรูปที่ 3.10 ประกอบ)




(a) Elasto-Perfectly Plastic Model

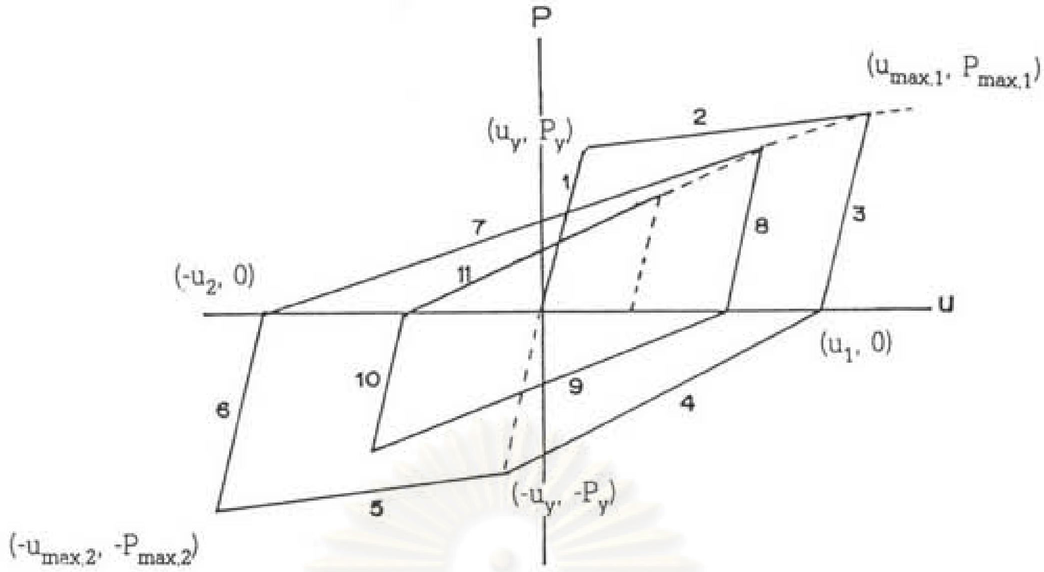



(b) Kinematic Hardening Model




(c) Stiffness Degrading Model

<u>รูปที่ 3.9</u> แบบจำลองสติฟเนสของระบบความเป็นอิสระเดี่ยว




รูปที่ 3.10 แบบจำลองสติฟเนส ที่ใช้ในงานวิจัย

1) การใส่แรงกระทำเพิ่ม (Loading) หรือ การลดแรงกระทำ (Unloading) ขณะที่แรงกระทำอยู่ในช่วงอิลาสติก ($|u(t)| < u_y$ และยังไม่เคยเกิดจุดคลากขึ้น) (เส้นที่ 1)
สติฟเนสเริ่มต้นหาได้จากสมการที่ (3.9) $k(t) = k = \omega^2 m$

2) การใส่แรงกระทำเพิ่ม ขณะที่แรงกระทำอยู่ในช่วงความเครียดแข็งเพิ่ม (Strain Hardening Region) (เช่นเส้นที่ 2 และ 5) ซึ่งตรวจสอบด้วยเงื่อนไข $|u(t)| > u_y$ และ $\dot{u}(t)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย
สติฟเนสหาได้จาก $k(t) = k_s$

โดยที่ $k_s$ เป็นค่าความชันของกราฟในช่วงความเครียดแข็งเพิ่ม (Strain Hardening) ในงานวิจัยนี้ใช้ค่าเป็น 3 % ของค่าสติฟเนสอิลาสติก (Elastic Stiffness) ของระบบ ซึ่งเป็นค่าที่เหมาะสมสำหรับโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก และมีผู้ใช้เป็นจำนวนมาก ( เช่น Newmark และ Ridell, 1979)

3) การลดแรงกระทำ ขณะที่แรงกระทำอยู่ในช่วงอินอิลาสติก (เช่นเส้นที่ 3, 6, 8 และ 10) โดยที่แรงกระทำลดจากจุดเริ่มต้น ($P_{max,n}$ , $u_{max,n}$ ) ซึ่งเป็นจุดสูงสุดของการให้แรงกระทำในช่วงก่อนหน้านี้ (เช่นช่วงที่ 7 หากการลดแรงกระทำในช่วงที่ 8) สำหรับช่วงนี้สามารถตรวจสอบด้วยเงื่อนไข $\dot{u}(t)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย และ $u(t)$ อยู่ระหว่าง $u_{max,n}$ และ $u_n$ (แรงกระทำยังไม่เปลี่ยนทิศทาง) โดยที่ $u_n$ คือการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งที่แรงกระทำลดลงจนเหลือศูนย์ ซึ่งหาได้จาก

$$u_n = u_{max,n} - (P_{max,n} / k)$$

และ n คือ จำนวนครั้งของการตัดแกนแรงกระทำเป็นศูนย์

สำหรับสติฟเนสในช่วงนี้ใช้สติฟเนสเท่ากับสติฟเนสอิลาสติก นั่นคือ $k(t) = k$

อนึ่งหากมีการใส่แรงกระทำเพิ่มใหม่ (Reloading) ก่อนที่ค่าของแรงกระทำจะลดลงเป็นศูนย์ สติฟเนสของระบบจะใช้ค่าเท่ากับสติฟเนสอิลาสติกเช่นกัน ($k(t) = k$) แต่ค่าของแรงกระทำจะเพิ่มเกินจุดเริ่มต้นของช่วงนี้ไม่ได้ หากแรงกระทำเพิ่มเกินแล้ว จะต้องกลับไปใช้สติฟเนสของช่วงเดิมก่อนที่จะเข้าสู่ช่วงนี้ เช่น หากมีการใส่แรงกระทำเพิ่มในเส้นที่ 8 จนกระทั่งถึงจุดเริ่มต้นของการลดแรงกระทำ (จุดที่เส้นที่ 7 ลดแรงกระทำสู่เส้นที่ 8) สติฟเนสจะเปลี่ยนกลับไปใช้ตามเส้นที่ 7

4) การเพิ่มแรงจากสถานะแรงเป็นศูนย์ที่จุดเริ่มต้นของช่วง (เช่นเส้นที่ 4, 7, 9 และ 11) โดยที่ไม่ใช่เป็นการใส่แรงกระทำครั้งแรก (นั่นคือไม่ใช่การใส่แรงกระทำเพิ่มในเส้นที่ 1) ตรวจสอบด้วยเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นออกจากจุดที่แรงกระทำเป็นศูนย์ และ $n \geq 1$ และ $\dot{u}(t)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย ในกรณีนี้สติฟเนสของระบบจะถูกกำหนดโดยจุดสูงสุดของการเคลื่อนที่ในรอบที่แล้ว และจุดเริ่มต้นของรอบปัจจุบัน นั่นคือ

$$k(t) = P_{max,n-1} / (u_{max,n-1} - u_n)$$

อนึ่ง หากแรงกระทำเพิ่มขึ้นเกินกว่าแรงกระทำสูงสุดในรอบที่แล้ว ( เช่นหากการใส่แรงกระทำเพิ่มขึ้นในเส้นที่ 11 เกินจุดสูงสุดของเส้นที่ 7 ) สติฟเนสจะเปลี่ยนไปใช้สติฟเนสการใส่แรงกระทำเพิ่มของรอบที่แล้วตามลำดับ (เส้นที่ 7 ตามเส้นประในตัวอย่างนี้ และถ้าหากแรงกระทำเพิ่มขึ้นไปเกินจุดสูงสุดของเส้นที่ 2 สติฟเนสจะมีค่าเท่ากับสติฟเนสความเครียดแข็งเพิ่ม )

### 3.3.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Program)

โดยวิธีอินติเกรตทีละขั้น ในหัวข้อที่ 3.3.1 และแบบจำลองของสติฟเนสในหัวข้อที่ 3.3.2 สามารถสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์หาสเปกตรัมการตอบสนองของระบบดีกรีความเป็นอิสระเดี่ยวในช่วงอินอิลาสติกตามสมการที่ 3.15 ได้ ทั้งนี้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นสามารถวิเคราะห์หาการตอบสนองของระบบดีกรีความเป็นอิสระเดี่ยวในช่วงอิลาสติกและอินอิลาสติก ได้ทั้งแบบจำลองอิลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ และแบบจำลองสติฟเนส-ดีเกรดดิง

ขั้นตอนของการวิเคราะห์หาสเปกตรัมการตอบสนองโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีดังนี้

(1) กำหนดตัวแปรที่ใช้กำหนดลักษณะของแบบจำลองสติฟเนส เช่น คาบเวลาธรรมชาติในช่วงอิลาสติกดังสมการที่ (3.9) และค่าความต้องการของกำลังคลาก (Yield Strength Demand) เพื่อใช้คำนวณหาแรงคลากของระบบ $P_y$ โดยที่ค่าความต้องการของกำลังคลากนิยามเป็นอัตราส่วนระหว่างแรงคลากของระบบกับผลคูณของมวลและอัตราเร่งที่ผิวดินสูงสุด ดังสมการต่อไปนี้

$$\eta = \frac{P_y}{m\,(\max\left|\ddot{u}_g\right|)} \tag{3.26}$$

(2) เริ่มทำการคำนวณด้วยวิธีอินติเกรตทีละขั้น โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของความเร็ว $\dot{u}(t)$ และการเคลื่อนที่ $u(t)$ ซึ่งอาจกำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น หรือ ได้จากการคำนวณในขั้นเวลาก่อน

(3) หาสติฟเนส $k(t)$ จากคุณสมบัติของโครงสร้าง จากลักษณะแบบจำลองสติฟเนสที่กำหนดในข้อที่ (1) โดยมีวิธีพิจารณาตามที่ได้กล่าวในหัวข้อที่แล้ว

(4) หาค่าความเร่ง $\ddot{u}(t_{i+1})$ จากสมการที่ (3.25)

(5) คำนวณหาแรงประสิทธิผลที่เพิ่มขึ้น $\Delta\tilde{p}(t)$ และสติฟเนสประสิทธิผล $\tilde{k}(t)$ จากสมการที่ (3.23) และ (3.24) ตามลำดับ

(6) คำนวณหาการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้น $\Delta u(t)$ จากสมการที่ (3.22) และหาความเร็วที่เพิ่มขึ้น $\Delta\dot{u}(t)$ จากสมการที่ (3.20)

(7) ความเร็วและการเคลื่อนที่ที่จะนำไปใช้ในขั้นเวลาต่อไป สามารถคำนวณได้จาก

$$\dot{u}(t+\Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta\dot{u}(t) \tag{3.27}$$

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta u(t) \tag{3.28}$$

กระทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 2 ถึงขั้นตอนที่ 7 จนครบจำนวนของเวลาที่เพิ่มขึ้น โดยที่ค่าการเคลื่อนที่สูงสุด (Maximum Displacement) และอัตราเร่งสูงสุด (Maximum Acceleration) ของระบบ หาได้จากค่าสูงสุดของการตอบสนองในแต่ละช่วงเวลา

(8) คำนวณหาอัตราส่วนความเหนียวของระบบได้ โดยที่อัตราส่วนความเหนียวคืออัตราส่วนระหว่างการเคลื่อนที่สูงสุดกับการเคลื่อนที่ที่จุดคลาก ดังสมการ

$$\mu = \frac{u_{max}}{u_y} \tag{3.29}$$

(9) แปรเปลี่ยนแรงกระทำที่จุดคลากของระบบเพื่อให้ได้อัตราส่วนความเหนียวของโครงสร้างที่ต้องการ โดยเปลี่ยนด้วยค่าความต้องการของกำลังคลาก แล้วคำนวณขั้นตอนที่ 2 ถึงขั้นตอนที่ 8 ใหม่ อย่างไรก็ตามการคำนวณหาค่าอัตราส่วนความเหนียวที่ต้องการของระบบ สามารถคำนวณได้โดยการหาค่าระหว่างข้อมูล (Interpolation) ของค่าความต้องการของกำลังคลากที่เท่ากันได้ ซึ่งวิธีการนี้เป็นที่ยอมรับและใช้กันอย่างกว้างขวาง (Elghadamsi และ Mohraz, 1987; Mahin และ Lin, 1983)

(10) แปรเปลี่ยนคาบเวลาธรรมชาติของโครงสร้างแล้ว คำนวณขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 9 ใหม่ ก็จะสามารถสร้างสเปกตรัมการตอบสนองของระบบตามที่ต้องการได้

ตามที่ได้กล่าวแล้วว่า ความถูกต้อง ( Accuracy ) ของการคำนวณโดยวิธีอินติเกรตทีละขั้นนี้ ขึ้นอยู่กับการกำหนดช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวน , $\Delta t$ ซึ่งจำเป็นที่จะต้องพิจารณาถึงปัจจัยดังต่อไปนี้ 1) คาบเวลาธรรมชาติของโครงสร้าง 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันแรงกระทำ และ 3) พฤติกรรมของโครงสร้างทั้งสัมประสิทธิ์ความหน่วงและสติฟเนส ดังนั้นเพื่อให้ค่าการตอบสนองที่คำนวณได้มีความถูกต้องพอสมควรจึงค้องพิจารณาให้ช่วงเวลาที่ใช้ในการคำนวนเป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) มีค่าน้อยกว่า 1 ใน 10 ของคาบเวลาธรรมชาติของโครงสร้าง
2) มีค่าน้อยเพียงพอที่จะให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำเกือบเป็นเส้นตรงสำหรับแต่ละช่วงเวลา
3) มีค่าน้อยเพียงพอที่จะแสดงพฤติกรรมของโครงสร้างเช่น สติฟเนสในช่วงที่เกิดการเปลี่ยนแปลง

3.4 <u>วิธีการหาสเปกตรัมการตอบสนองของการวิจัย</u>

สำหรับในงานวิจัยนี้ ใช้การจำลองคลื่นแผ่นดินไหวด้วยโปรแกรม SIMQKE ให้มีคาบเวลาเด่นของชั้นดินแตกต่างกันออกไป ตั้งแต่ 0.3 ถึง 2 วินาที จำนวน 100 ครั้ง ผลจากโปรแกรม SIMQKE ให้ข้อมูลบันทึกตามเวลา (Time History) ของคลื่นแผ่นดินไหว และยังได้สเปกตรัมการตอบสนองในช่วงอิลาสติกของความเร็วอีกด้วย ในการสร้างสเปกตรัมการตอบในช่วงอินอิลาสติกสามารถหาได้โดยการคำนวณค่าการตอบสนองสูงสุดสำหรับคาบเวลาธรรมชาติที่สอดคล้องกันด้วยวิธีอินติเกรตทีละขั้นจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นและแบบจำลองสติฟเนส-ดีเกรดดิง ดังแสดงในรูปที่ 3.10 โดยมีอัตราส่วนความเหนียว (Ductility Ratio) เท่ากับ 2 และ 3 ซึ่งเป็นอัตราส่วนที่ใช้ในการออกแบบโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กในถิ่นแผ่นดินไหวไม่รุนแรงมากนัก โดยที่การคำนวณจะพิจารณาคาบเวลาของโครงสร้างตั้งแต่ 0 ถึง 4 วินาที จำนวน 40 คาบเวลา และกำหนดอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างเท่ากับ 5%