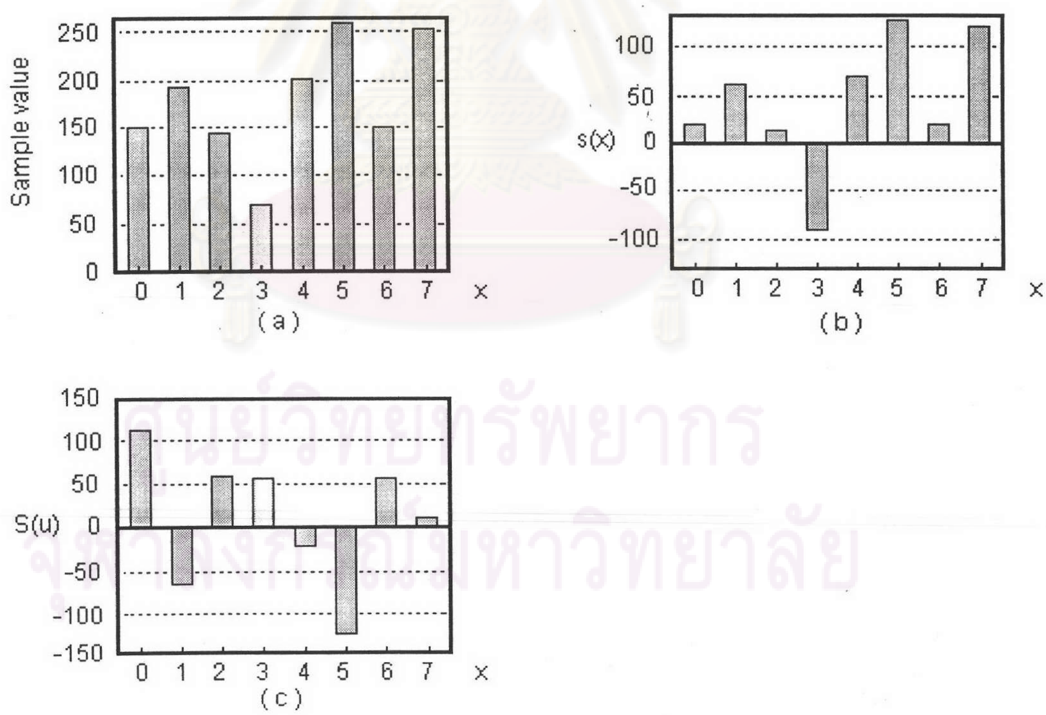
บทที่ 3

สมการคณิตศาสตร์สำหรับ 2-D DCT/IDCT

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวความคิดของ DCT และ IDCT ซึ่งเป็นการแปลงระบบข้อมูลอย่างหนึ่ง รวมถึง สมการคณิตศาสตร์สำหรับ DCT/IDCT แบบ 1 มิติ และแบบ 2 มิติ จากนั้นจะพูดถึงเทคนิคการคำนวณแบบเร็ว ในระบบ 2 มิติ ซึ่งใช้ในการวิจัยครั้งนี้

3.1 แนวความคิดพื้นฐานของ DCT

จากการศึกษาพบว่าระบบการมองเห็นของมนุษย์ (Human Visual System) จะตอบสนองกับแสงซึ่ง ประกอบด้วยคลื่นความถี่ต่างๆ เรามองเห็นวัตถุปรากฏเป็นสีต่างๆได้ในเวลากลางวันเนื่องจากวัตถุจะดูดกลืน แสงสีขาวที่ส่องไปกระทบวัตถุและสะท้อนเพียงบางคลื่นออกมาสู่ตาของเรา เพราะฉะนั้นเราจึงไม่สามารถมอง เห็นวัตถุเป็นสีในเวลากลางคืนในที่ซึ่งไม่มีแสงส่องไปยังวัตถุ ถ้าเราสามารถแยกรูปภาพออกเป็นกลุ่มของรูปคลื่น ที่ความถี่ต่างๆ กันได้นั้น เราก็สามารถจำแนกโครงสร้างของรูปนั้นได้ โดยใช้เทคนิค DCT

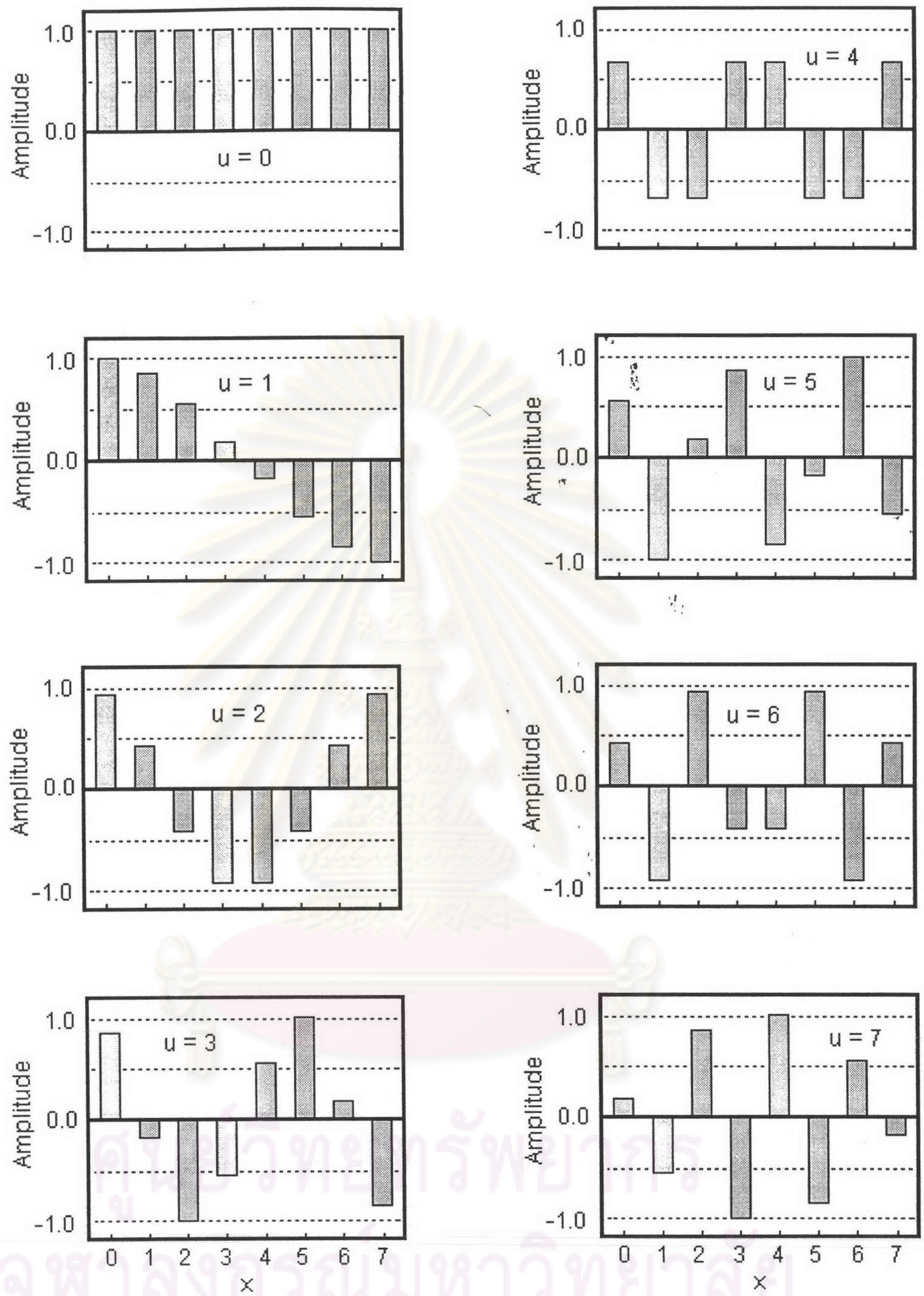


รูปที่ 3.1 การแยกองค์ประกอบของ 1-D DCT

(a) ค่าตัวอย่างข้อมูลทั้ง 8 ค่า

(b) ค่าของข้อมูลในรูป (a) หลังถูกลบด้วย 128

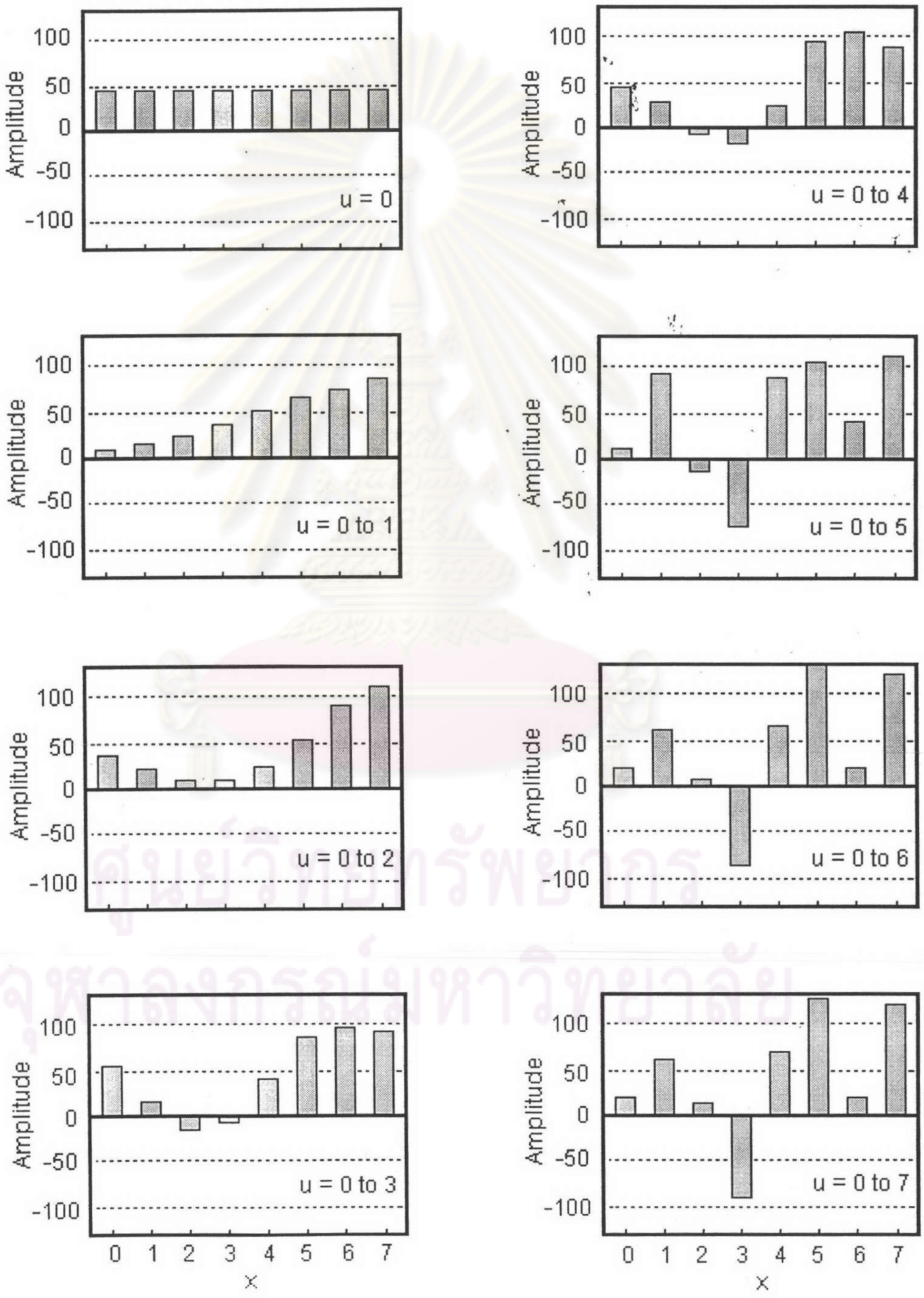
(c) การจำแนกในรูปสัมประสิทธิ์ของคลื่น



รูปที่ 3.2 ลูกคลื่นทั้ง 8 ของฟังก์ชันโคไซน์มาตรฐาน

ก่อนที่จะมาทำความเข้าใจว่ารูปภาพ ซึ่งมีทั้งความกว้างและความยาวเป็นลักษณะ 2 มิติสามารถแยกออกมาเป็นรูปความถี่ได้อย่างไร ขอให้มาพิจารณาในกรณีของ 1 มิติเสียก่อน เริ่มจากชุดของตัวอย่างข้อมูล 8 ค่า ในรูปที่ 3.1 (a) มีค่าอยู่ระหว่าง 0-255 หลังจากที่ลบออกด้วยค่า 128 (เพื่อให้ค่าของข้อมูลอยู่ระหว่าง -128 ถึง +127) ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (b) เราต้องการที่จะแยกค่าทั้ง 8 นี้ออกเป็นรูปคลื่นที่แตกต่างกัน รูปที่ 3.2 ให้เห็นถึงกลุ่มของกราฟโคไซน์ ที่ความถี่แตกต่างกัน 8 ความถี่ โดยที่มีแอมพลิจูดมีค่าเท่ากับ 1 และแต่ละความถี่จะมี

ข้อมูล 8 จุดด้วยกัน คลื่นความถี่แรก (u=0) คือค่าคงที่ซึ่งมีความถี่เป็นศูนย์ ส่วนคลื่นลูกอื่นๆ (u = 1, .. , 7) เป็นคลื่นที่มีความถี่สูงขึ้น ลูกคลื่นเหล่านี้มีคุณสมบัติที่น่าสนใจอย่างหนึ่งคือ ถ้าเราเอาลูกคลื่น 2 ความถี่ใดๆ คูณกันที่ตำแหน่งเดียวกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมดมารวมกันจะได้ศูนย์ แต่ถ้าคูณด้วยตัวมันเองผลรวมที่ได้จะเป็นค่าคงที่ คลื่นทั้ง 8 ลูกนี้เมื่อถูกคูณด้วยค่าสัมประสิทธิ์และนำมารวมกันทั้งหมด จะสามารถแทนทั้ง 8 ค่าตัวอย่างข้อมูลในรูป 3.1(b) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่แต่ละจุดดังแสดงในรูปที่ 3.1(c)



รูปที่ 3.3 ลำดับการรวมค่าของคลื่นที่ถูกคูณด้วยสัมประสิทธิ์

รูปที่ 3.3 แสดงลำดับการรวมคลื่นที่ถูกคูณด้วยสัมประสิทธิ์และนำมารวมกันทีละขั้น เริ่มจากความถี่ที่ศูนย์จนกระทั่งเมื่อรวมได้ครบทุกความถี่ ผลลัพธ์จะได้ 8 ค่าตัวอย่างข้อมูลที่เหมือนในรูปที่ 3.1 (b) สัมประสิทธิ์ที่มาคูณกับฟังก์ชันคงที่ (u = 0) เรียกว่า สัมประสิทธิ์ดีซี (DC coefficient) ส่วนสัมประสิทธิ์อื่นถูกเรียกว่า สัมประสิทธิ์เอซี (AC coefficient) ซึ่งชื่อนี้ได้มาจากสมัยอดีตที่นำเอา DCT ไปใช้วิเคราะห์กระแสไฟฟ้าที่มีทั้งกระแสตรงและกระแสสลับ (DC and AC term) โดยค่าสัมประสิทธิ์ดีซีนี้จะเป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมด

กระบวนการที่จำแนกค่าตัวอย่างข้อมูลเป็นชุดของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันโคไซน์มาตรฐาน (Cosine Basis Function) ดังแสดงใน รูปที่ 3.3 เรียกว่า FDCT (Forward Discrete Cosine Transform) หรือ DCT (Discrete Cosine Transform) ส่วนกระบวนการที่สร้างค่าตัวอย่างข้อมูลจากชุดของสัมประสิทธ์ฟังก์ชันโคไซน์มาตรฐาน เรียกว่า IDCT (Inverse Discrete Cosine Transform) ถ้าตัวอย่างข้อมูลมีมากกว่า 8 ค่า เราสามารถที่จะแบ่งออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 8 ค่า แล้วทำการแปลงแยกกันเป็นเพราะว่าฟังก์ชันโคไซน์มาตรฐาน จะเหมือนกันทุกกลุ่ม มีเพียงค่าสัมประสิทธิ์เท่านั้นที่จะแตกต่างกันในแต่ละกลุ่ม

3.2 สมการคณิตศาสตร์สำหรับ DCT และ IDCT แบบ 1 มิติ

Discrete Cosine Transform :

$$S(u) = \frac{C(u)}{2}\sum_{x=0}^{7} s(x)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \qquad (1)$$

Inverse Discrete Cosine Transform :

$$s(x) = \sum_{u=0}^{7} \frac{C(u)}{2} S(u)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \qquad (2)$$

โดยกำหนดให้

$C(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ สำหรับ $u = 0$

$C(u) = 1$ สำหรับ $u > 0$

$s(x)$ = ค่าตัวอย่างของข้อมูล (sample value)

$S(u)$ = สัมประสิทธิ์ DCT

3.3 สมการคณิตศาสตร์สำหรับ DCT และ IDCT แบบ 2 มิติ

สำหรับ 2-D FDCT และ IDCT สร้างจาก 1-D DCT/IDCT แนวขวาง (horizontal) และ 1-D DCT/IDCT แนวตั้ง (vertical)

Discrete Cosine Transform :

$$S(u,v) = \frac{C(u)}{2}\frac{C(v)}{2}\sum_{x=0}^{7}\ \sum_{y=0}^{7} s(x,y)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right) \qquad (3)$$

Inverse Discrete Cosine Transform :

$$s(x,y) = \sum_{u=0}^{7}\frac{C(u)}{2}\sum_{v=0}^{7}\frac{C(v)}{2} S(u,v)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right) \qquad (4)$$

โดยกำหนดให้

$C(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ สำหรับ $u = 0$ $\quad C(u) = 1$ สำหรับ $u > 0$

$C(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ สำหรับ $v = 0$ $\quad C(v) = 1$ สำหรับ $v > 0$

$s(x,y)$ = ค่าตัวอย่างของข้อมูล (sample value) แถวที่ y หลักที่ x

$S(u,v)$ = สัมประสิทธิ์ DCT แถวที่ v หลักที่ u

3.4 เทคนิคการคำนวณ 2-D IDCT อย่างเร็ว (Fast 2-D IDCT)

ตั้งแต่มีการนำเอา DCT เข้ามาใช้ในการบีบอัดข้อมูลภาพครั้งแรก[1] ได้มีผู้วิจัยหลายกลุ่มที่พยายามค้นคิดวิธีการคำนวณโดยใช้เทคนิคต่างๆ เพื่อที่จะพัฒนาให้ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด เราสามารถที่จะแบ่งกลุ่มของวิธีการต่างๆได้ดังนี้

3.4.1 ขั้นตอนวิธีโดยอ้อม (Indirect Algorithm)

วิธีนี้จะนำเอาการแปลงแบบอื่นที่ได้มีการศึกษากันในอดีต เข้ามาประยุกต์ใช้ เช่น FFT (Fast Fourier Transform) หรือ FHT (Fast Hartley Transform) บ้างก็เป็นการดัดแปลงวิธีการคิดเพื่อเป็นการลดจำนวนการคูณ และการบวก หลักการคิดที่เป็นที่นิยมกันมากสำหรับ 2-D IDCT ในการออกแบบ VLSI คือการแตกสมการให้อยู่ในรูป 1 มิติ ทั้งนี้เพื่อลดความซับซ้อนของการคำนวณและลดจำนวนของการคำนวณอีกด้วย เราสามารถที่จะแตก 2-D IDCT และคำนวณ 1-D IDCT ในแต่ละแถวจำนวน 8 แถว และนำผลลัพธ์(หรือสัมประสิทธิ์)ที่ได้นำไปคำนวณ 1-D IDCT ในแต่ละหลัก จำนวน 8 หลักอีกครั้งหนึ่ง

จาก Two Dimensional Inverse Discrete Cosine Transform สมการ (4)

$$s(x,y) = \sum_{u=0}^{7}\frac{C(u)}{2}\sum_{v=0}^{7}\frac{C(v)}{2} S(u,v)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right)$$

---

[1] N. Ahemed, T. Natarajan and K.R. Rao, "Discrete Cosine Transform" in IEEE trans. Computers, Vol C-33, Jan. 1974, pp. 90-93

กำหนดให้

$$C(x,u) = \frac{1}{2}C(u)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \quad (5)$$

$$C(y,v) = \frac{1}{2}C(v)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right) \quad (6)$$

แทนสมการ (4) ด้วยนิพจน์จากสมการ (5) และ (6) จะได้สมการในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\left[s(x,y)\right] = \left[C(x,u)\right]\left[S(u,v)\right]\left[C(y,v)\right]^{T} \quad (7)$$

เราสามารถแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ส่วนแทนที่จะคำนวณเป็นซิกม่า (sigma) สองชั้น โดยกำหนดให้

$$\left[A(x,v)\right] = \left[C(x,u)\right]\left[S(u,v)\right] \quad (8)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ ในรูปของอนุกรมได้ดังนี้

$$A(x,v) = \sum_{u=0}^{7} C(x,u)\,S(u,v) \quad (9)$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\left[C(x,u)\right]\left[S(u,v)\right] = \left[A(x,v)\right]$$

จากสมการ (7) และสมการ (9) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$s(x,y) = \sum_{v=0}^{7} A(x,v)\,C(y,v) \quad (10)$$

แทนสมการ (9) ในสมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{v=0}^{7} C(y,v) \sum_{u=0}^{7} C(x,u)\,S(u,v) \\ &= \sum_{u=0}^{7} C(x,u) \sum_{v=0}^{7} C(y,v)\,S(u,v) \\ &= \sum_{u=0}^{7}\frac{C(u)}{2}\sum_{v=0}^{7}\frac{C(v)}{2}S(u,v)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

ซึ่งสมการ (11) จะเหมือนกับสมการ (4) จะเห็นได้ว่าเรามาสามารถที่จะแตก IDCT แบบ 2 มิติ ออกเป็น IDCT แบบ 1 มิติแล้วคำนวณ 2 ครั้ง โดยวิธีการดังที่กล่าวมาแล้วได้มีผู้ออกแบบ VLSI โดยการใช้ MAC (Multiply Accumulator) สำหรับการคำนวณ 1-D IDCT ซึ่งเป็นที่นิยมมากในธุรกิจผลิตชิป บางกลุ่มผู้วิจัยใช้การกระจายทางคณิตศาสตร์ (Distributed Arithmetic) โดยการใช้หน่วยความจำแทนการคูณซึ่งเน้นความเร็วมากกว่าปริมาณพื้นที่ นอกจากนี้ยังมีการวิจัยโดยวิธีอื่นๆอีก ซึ่งแต่ละวิธีต่างมีจุดมุ่งหมายที่จะลดจำนวนครั้งของการคูณและการบวกลง

3.4.2 ขั้นตอนวิธีโดยตรง (Direct Algorithm)

จากที่ทราบว่าเราสามารถที่จะที่จะแตก 2-D IDCT และคำนวณ 1-D IDCT ในแต่ละแถวจำนวน 8 แถว และนำผลลัพธ์(หรือสัมประสิทธิ์)ที่ได้นำไปคำนวณ 1-D IDCT ในแต่ละหลักจำนวน 8 หลักอีกครั้งหนึ่ง มีนักวิจัยบางกลุ่มสามารถค้นคิดวิธีการลดรูปสมการของการคำนวณกับ 2-D IDCT โดยตรง แล้วสามารถลดจำนวนครั้งของการคูณและการบวกได้มากกว่า เนื่องจากการแบ่งการคำนวณเป็นแถวแล้วจึงคำนวณหลักจะต้องมีการรอผลลัพธ์ ดังนั้นถ้าการคำนวณโดยตรงแล้วจะสามารถทำได้รวดเร็วกว่า แต่เท่าที่ผ่านมามีผู้วิจัยในแนวนี้น้อยมาก อีกทั้งการคำนวณค่อนข้างยุ่งยากซับซ้อนวิธีนี้จึงไม่เป็นที่นิยมในการออกแบบสำหรับ VLSI เพราะจะต้องใช้พื้นที่มากทำให้ต้นทุนการผลิตสูง

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการแปลงโคไซน์โดยการใช้ฟังก์ชันมาตรฐานโคไซน์ คือการแปลงข้อมูลรูปแบบหนึ่งให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ของความถี่ เรียกว่า FDCT ส่วนกระบวนการที่แปลงข้อมูลจากสัมประสิทธิ์ของความถี่ให้กลับเป็นข้อมูลในระบบเดิมเรียกว่า IDCT สมการ IDCT แบบ 2 มิติสามารถจะแตกเป็นการคำนวณ IDCT แบบ 1 มิติ 2 ครั้ง วิธีนี้สามารถออกแบบวงจรคำนวณโดยใช้ MAC และการใช้การคำนวณแบบโครงสร้างผีเสื้อ ซึ่งในบทที่ 4 จะกล่าวถึงวิธีการคำนวณ IDCT แบบ 2 มิติ โดยใช้ MAC และในบทที่ 5 จะกล่าวถึงวิธีการคำนวณ IDCT แบบ 2 มิติ โดยใช้วงจรคำนวณแบบโครงสร้างผีเสื้ออย่างละเอียด