บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง

ในบทนี้จะใช้สมมติฐานวิธีจลน์ในการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (Collapse Load Analysis) ของโครงสร้างโดยการประยุกต์ใช้สมการเชิงเส้น (Linear Programming) จากการที่ใช้สมมติฐานวิธีจลน์นี้ ทำให้ทราบสมการสมดุลย์ (Equilibrium Equations) และทราบการเกิดกลไกวิบัติแบบอิสระของโครงสร้างทั้งหมด (Set of Independent Mechanisms) และนำมารวมกันเพื่อหาตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก (Load Factor) ที่น้อยที่สุดที่ทำให้โครงสร้างเกิดการวิบัติได้โดยการประยุกต์ใช้สมการเชิงเส้นในการแก้ปัญหา

3.1 ฟังก์ชั่นเป้าหมาย สำหรับการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (Objective Function for Collapse Load Analysis)

ตามหลักการพลังงานสมมติ (Principal of Virtual Work) การอนุรักษ์พลังงาน พลังงานภายนอกเท่ากับพลังงานภายใน ที่โครงสร้างเกิดการวิบัติจะมีสมการสมดุลย์ I (= n - m) สมการที่เป็นไปตามกลไกวิบัติแบบอิสระ

$$\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} M_{pj} = \lambda_i P_{oi} \quad (i = 1,2,.....I) \qquad (3.1)$$

โดยที่ M_{pj} = พลาสติกโมเมนต์ที่หน้าตัด

θ_{ij} = มุมที่เกิดขึ้นที่จุดหมุนพลาสติกที่หน้าตัดวิกฤต j ของกลไกวิบัติอิสระ i และมีค่าเป็นตำแหน่งแถวที่ i และ สดมภ์ที่ j ในเมตริกซ์ C ของสมการที่ (2.31)

P_{oi} = งานภายนอกที่กระทำโดยน้ำหนักภายนอกระหว่างการเกิดกลไกวิบัติแบบอิสระลำดับที่ i

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

λ_i = ตัวแปรน้ำหนักบรรทุก ตามการเกิดกลไกวิบัติแบบอิสระ ลำดับที่ i

s = 2 เท่าของจำนวนชิ้นส่วน (2m) หรือเทียบเท่ากับจำนวนหน้าตัดวิกฤต

ตัวแปรน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (λ_c) จะเป็นค่าที่น้อยที่สุดของตัวแปรน้ำหนักบรรทุกของกลไกวิบัติแบบอิสระหรือกลไกวิบัติรวมที่เกิดจากการรวมกันของกลไกวิบัติแบบอิสระแบบเชิงเส้น

$$\lambda_c = \text{ค่าน้อยที่สุด} \quad \frac{\sum_{j=1}^{s} M_{Pj}\,\theta_j}{\sum_{i=1}^{I} t_i\,P_{ei}} \qquad (3.2)$$

โดยที่ $\sum_{j=1}^{s} M_{Pj}\theta$ = งานภายในที่ถูกกระทำจากมุมที่หมุนของจุดหมุนพลาสติก ในช่วงตอนเกิดกลไกวิบัติรวม (Failure Mechanism) ตามตัวแปรน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (λ_c)

$\sum_{i=1}^{I} t_i P_{ei}$ = งานภายนอกที่ถูกกระทำโดยแรงภายนอก ในช่วงที่เกิดกลไกวิบัติรวม (Failure Mechanism) ตามตัวแปรน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ

θ_j = มุมทั้งหมดของจุดหมุนพลาสติกที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดวิกฤต j และได้จากการรวมกันแบบเชิงเส้นของ θ_{ij}

$$= \sum_{i=1}^{I} t_i\theta_{ij}$$

t_i = ขนาดของตัวประกอบ (Amplitude Factor) ของกลไกวิบัติอิสระ i

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2 สมการเชิงเส้นสำหรับการวิเคราะห์ตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ

(Linear Programming Formulation for Collapse Load Analysis)

ตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (λ_c) ในสมการ (3-2) เป็นขนาดสัมพัทธ์ ดังนั้นจะกำหนดให้ค่าคงที่บวกแก่ปริมาณงานภายนอก EW

$$EW = \sum_{i=1}^{I} t_i P_{oi}$$

ดังนั้นในการแก้ปัญหานี้จะลดลงเหลือเพียงหาค่าน้อยที่สุดของงานภายในระหว่างเกิดกลไกวิบัติรวม (Failure Mechanism) ตามน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (λ_c)

ดังนั้น สมการเชิงเส้นสำหรับการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกที่วิบัติจะจัดได้ดังรูปนี้ คือ

$$\text{ค่าน้อยที่สุด} : \sum_{j=1}^{s} M_{pj}\theta$$

โดยที่

$$\theta_j - \sum_{i=1}^{I} t_i \theta_{ij} = 0 \qquad (j = 1,2,.....,s)$$

$$EW = \sum_{i=1}^{I} t_i P_{oi} \qquad (3.3)$$

โดยที่ θ_j และ t_i เป็นตัวที่ไม่รู้ค่า

สมการที่ (3-3) ใช้เป็นตัวกำหนดหากลไกวิบัติรวม (Failure Mechanism) ที่ซึ่งแรงภายในมีค่าน้อยที่สุด ตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (λ_c) จะเท่ากับอัตราส่วนของค่าน้อยที่สุดของแรงภายใน ต่อค่า EW ที่จะเป็นค่าคงที่มากกว่าศูนย์

จุดหมุนที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดวิกฤตของโครงข้อแข็งระนาบอาจจะหมุนได้ทั้งทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา เพื่อที่จะใช้วิธีซิมเพล็กประยุกต์ (Revised Simplex Method) (8)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ตัวแปรจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้น θ_j จะแสดงให้อยู่ในรูปของความแตกต่างของค่าบวก 2 ค่า คือ θ_j^+ และ θ_j^- ดังนี้คือ

$$\theta_j = \theta_j^+ - \theta_j^- \qquad (3.4)$$

โดยที่

$$\theta_j^+ = \theta_j \quad \text{ถ้า } \theta_j >= 0$$
$$= 0 \quad \text{ถ้า } \theta_j < 0 \qquad (3.5)$$

$$\theta_j^- = 0 \quad \text{ถ้า } \theta_j >= 0$$
$$= -\theta_j \quad \text{ถ้า } \theta_j < 0 \qquad (3.6)$$

ดังนั้นเพื่อที่จะใช้วิธีซิมเพล็กประยุกต์ (Revised simplex method) ตามด้วยค่าพลาสติกโมเมนต์ จะถูกกำหนดโดย M_{Pj}^+ และ M_{Pj}^- ดังนั้นงานภายใน จะเขียนใหม่ได้ คือ

$$M_{Pj}\theta_j = M_{Pj}^+ \theta_j$$
$$= M_{Pj}^+ \theta_j^+ \quad \text{ถ้า } \theta_j >= 0 \qquad (3.7)$$

$$M_{Pj}\theta_j = -M_{Pj}^- \theta_j$$
$$= -M_{Pj}^- \theta_j^- \quad \text{ถ้า } \theta_j < 0 \qquad (3.8)$$

ซึ่งสามารถจัดรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$M_{Pj}\theta_j = M_{Pj}^+ \theta_j^+ + M_{Pj}^- \theta_j^- \qquad (3.9)$$

สมการที่ (3-4) และ (3-9) จะขึ้นกับเครื่องหมายของ θ_j และเกี่ยวข้องกับค่าบวกของ M_{Pj}^+ , M_{Pj}^- , θ_j^+ และ θ_j^-

นอกจากนี้ ค่าขนาดตัวประกอบ (t_1) ในบางครั้งอาจจะมีค่าเป็นลบได้ เพราะกล

ไกวิบัติแบบอิสระที่จะรวมเป็นกลไกวิบัติรวม อาจจะมีทิศทางตรงข้ามกับที่กำหนดไว้ในค่า ในสมการ (2-29) และ (2-31) (กลไกวิบัติที่จุดต่อมีงานภายนอกเท่ากับศูนย์อาจจะรวมกลไกวิบัติได้ทั้งตามเข็มนาฬิกาและทวนเข็มนาฬิกา) เพื่อที่จะใช้กับวิธีซิมเพล็กประยุกต์ของสมการเชิงเส้น ค่าตัวแปรต้องไม่เป็นลบ ค่า ti จะเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบ

$$t_i = t'_i - t_o \qquad (i = 1,2,.....I) \qquad (3.10)$$

เพราะว่าค่าลบที่มากที่สุดของ ti ไม่ทราบว่ามากที่สุดจะเป็นเท่าไหร่ จึงกำหนดค่าคงที่บวก t_o ลงไป เพื่อที่จะทำให้ตัวแปร t'_i เป็นบวก

ดังนั้น ถ้าแทนสมการที่ (3-4) , (3-9) และ (3-10) ลงในสมการ (3-3) รูปแบบของการแก้ปัญหาวิเคราะห์โดยวิธีพลาสติก โดยประยุกต์ใช้สมการเชิงเส้นคือ

พิจารณาหาค่า θ^+_j , θ^-_j , และ t'_i

จากการที่

$$U = \text{ค่าน้อยที่สุด} \quad \sum_{j=1}^{I} (M^+_{Pj}\, \theta^+_j + M^-_{Pj}\, \theta^-_j)$$

โดยที่

$$\theta^+_j - \theta^-_j - \sum_{i=1}^{I} (t'_i - t_o)\, \theta_{ij} = 0 \qquad (j = 1,2,..,S) \qquad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^{I} (t'_i - t_o)\, P_{oi} = EW$$

เพื่อที่จะใช้วิธีซิมเพล็กประยุกต์ (8) จัดรูปแบบการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นในรูปแบบเมตริกซ์ใหม่ได้ดังนี้คือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$
\left[\begin{array}{cccccccc:c:cc:c}
1 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & & & 0 & 0 & \theta_1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & . & . & . & 0 & & & 0 & 0 & \theta_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & & C & 0 & 0 & \theta_2 \\
. & . & . & . & . & . & . & 0 & & (s \times I) & 0 & 0 & . \\
0 & 0 & . & . & . & . & 1 & -1 & & & 0 & 0 & \theta_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & P_{e1} & . \; . \; P_{eI} & 0 & 0 & . \\
\hdashline
M_{P1} & M_{P1} & M_{P2} & . & . & . & M_{PS} & M_{PS} & 0 & 0 \; . \; . & 1 & 0 & t_1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & . & . & g_1 & . \; . \; g_I & 0 & 1 & t_2 \\
 & & & & & & & & & & & & . \\
 & & & & & & & & & & & & t_I \\
 & & & & & & & & & & & & X_1' \\
 & & & & & & & & & & & & X_2'
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
P_{a1} \\ P_{a2} \\ P_{a3} \\ . \\ P_{as} \\ P_b \\ \hdashline 0 \\ P_c
\end{array}\right]
$$

โดยที่

$$P_{aj} = \sum_{i=1}^{I} t_o \theta_{ij} \qquad (j = 1,2,.....,S)$$

$$P_b = EW + \sum_{i=1}^{I} t_o P_{ei}$$

$$g_j = -\left(\sum_{i=1}^{S} C_{ij} + P_{ej}\right) \qquad (j = 1,2,.....I)$$

$$P_c = -\left(P_b + \sum_{i=1}^{S} P_{ai}\right)$$

X_1' และ X_2' คือค่าตัวแปรตัวใหม่ที่มีค่าเหมือนกับ X_{S+1} และ X_{S+2} ตามลำดับ

หรือเขียนเป็นสัญญลักษณ์ได้ดังนี้คือ

$$A X_c = P_h$$

ตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่วิบัติ (Collapse Load Factor) จะได้จาก

$$\lambda_c = U / EW$$

ค่าของ θ_j^+ และ θ_j^- จะกำหนดตำแหน่ง ทิศทาง และมุมหมุนสัมพัทธ์ของจุดหมุนพลาสติกที่หน้าตัดวิกฤต ของกลไกวิบัติรวม ค่าของ θ_j จะได้จากการแทนค่า θ_j^+ และ θ_j^- ลงไปในสมการที่ (3-4) และเมื่อแทนค่า t'_i ลงในสมการที่ (3-10) ก็จะได้ค่าของขนาดตัวประกอบ t_i (Amplitude Factor) ซึ่งเป็นตัวกำหนดการรวมกันแบบเชิงเส้นของกลไกวิบัติแบบอิสระแต่ละกลไก ทั้งหมดของโครงสร้าง เพื่อที่จะได้กลไกวิบัติรวมของโครงสร้างที่มีค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก (λ_c) น้อยที่สุด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย