บทที่ 2

การทบทวนผลงานที่ผ่านมา

แบบจำลองรูปแบบการเดินทาง (Modal Split Model) เป็นแบบจำลองหนึ่งในแบบจำลองต่อเนื่อง (Sequencial Model) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่นิยมใช้ในการศึกษาและวางแผนคมนาคมขนส่งในเมือง แบบจำลองต่อเนื่องจะประกอบด้วยแบบจำลองการเกิดการเดินทาง (Trip Generation Model) แบบจำลองการกระจายการเดินทาง (Trip Distribution Model) แบบจำลองแนวเส้นทางการเดินทาง (Traffic Assignment Model) และแบบจำลองรูปแบบการเดินทาง (Modal Split Model)

แบบจำลองรูปแบบการเดินทาง(Modal Split Model) คือแบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายการเลือกรูปแบบของการเดินทางและขนส่ง ในการวิจัยนี้จะเน้นการศึกษาถึงรูปแบบการขนส่งสินค้า โดยเริ่มจากการจำลองสภาพการขนส่งด้วยระบบขนส่งทางรถบรรทุก รถไฟ หรือเรือ ในสภาพปัจจุบัน (โดยคิดออกมาเป็นจำนวนร้อยละของการขนส่งสินค้าทั้งหมดที่เกิดขึ้น) จากนั้นจึงทดลองพยากรณ์ตัวแปรต่างๆย้อนกลับโดยแทนค่าในแบบจำลอง ซึ่งจะทำให้ทราบปริมาณการขนส่งสินค้าโดยรูปแบบต่างๆ ว่าใกล้เคียงกับที่เป็นจริงหรือไม่ ซึ่งต่อไปอาจใช้แบบจำลองนี้พยากรณ์ไปในอนาคต จะทำให้ได้ปริมาณการขนส่งในอนาคต ปริมาณการขนส่งนี้จะช่วยให้สามารถวางแผนการคมนาคมขนส่งให้มีความเหมาะสมกับสภาพการณ์ที่ควรจะเป็นมากยิ่งขึ้น พร้อมกันนั้นก็สามารถใช้เป็นข้อพิจารณาเพื่อปรับปรุงระบบการคมนาคมขนส่งและทดสอบระบบใหม่ๆ ด้วย

2.1 <u>ชนิดของแบบจำลองรูปแบบการเดินทาง (Type of Modal Split Model) (1)</u>

การพัฒนาแบบจำลองรูปแบบการเดินทาง (Modal Split Model) พอจะแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะ คือ

1. แบบจำลองการเกิดการเดินทางและจำแนกรูปแบบโดยตรง (Direct Generation and Modal Split Trips)

2. แบบจำลองรูปแบบการเดินทางที่จุดปลาย (Trip End Modal Split Model)

3. แบบจำลองการเดินทางแบบสับเปลี่ยนกัน (Trip Interchange Modal Split Model)

ในการศึกษาครั้งนี้ จะทำการศึกษาถึงรูปแบบการเดินทางของสินค้าของแต่ละรูปแบบการการขนส่ง ทางถนน ทางรถไฟ และทางเรือ โดยคิดเป็นร้อยละของการขนส่งทั้งหมดที่ใช้ในระบบการขนส่งสินค้า ฉะนั้นจึงใช้วิธีแบบจำลองการเดินทางแบบสับเปลี่ยนกัน เพราะแบบจำลองนี้จะประมาณอัตราส่วนของการเดินทางระหว่างพื้นที่ได้อย่างเหมาะสม รูปที่ 2.1 แสดงตำแหน่งแบบจำลองรูปแบบการเดินทางแบบสับเปลี่ยนกัน

การสร้างแบบจำลองรูปแบบการเดินทาง สามารถจำแนกเป็นวิธีการใหญ่ๆได้ 2 วิธี คือ

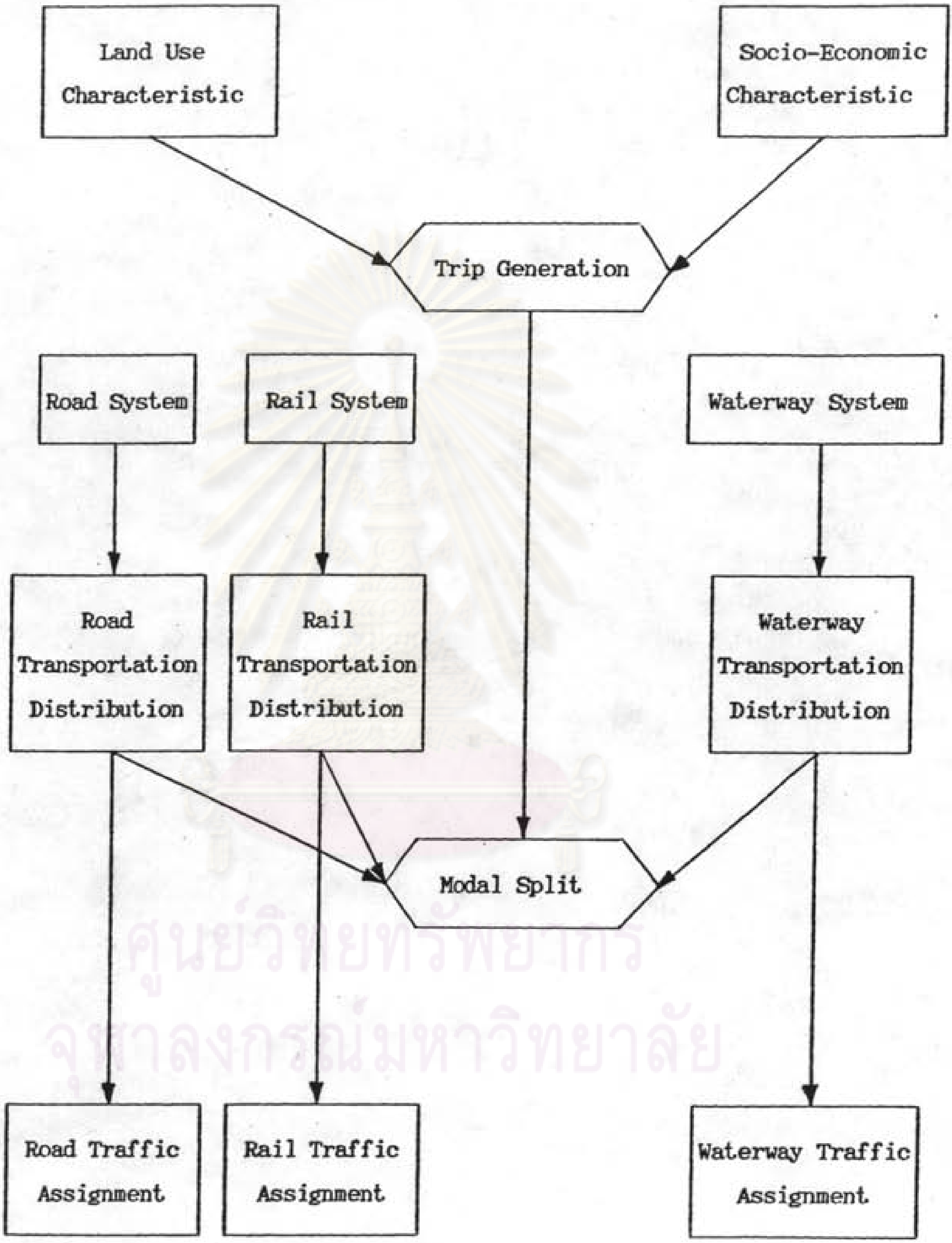
2.1.1 Aggregate Analysis

2.1.2 Disaggregate Analysis

วิธีการแรกเป็นการวิเคราะห์หารูปแบบการเดินทางอย่างกว้างๆ ซึ่งนิยมใช้มากในการศึกษาเพื่อวางแผนระบบระดับภูมิภาค โดยจะทำการแบ่งพื้นที่ที่ทำการศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อยๆ (Zone) หลายพื้นที่ย่อยซึ่งนิยมใช้กันมากในเขตเมืองประชากรอยู่หนาแน่นและรูปลักษณะในการใช้ที่ดิน สภาพเศรษฐกิจและสังคมแตกต่างกัน ส่วนวิธีหลังเป็นวิธีการที่ต้องดำเนินการให้ลึกซึ้งกว่าและให้ผลที่มีความละเอียดมากกว่า เพราะเป็นการศึกษาในระดับหน่วยย่อยคือ ครอบครัวหรือบุคคล ในการศึกษานี้จะใช้วิธี Aggregate Analysis เนื่องจากเป็นการวิเคราะห์ในระดับพื้นที่กรุงเทพมหานครและปริมณฑล ซึ่งมีลักษณะของการใช้ที่ดินแตกต่างกันมากทั้งยังมีลักษณะการพัฒนาเมืองที่เปลี่ยนแปลงได้อย่างรวดเร็ว

2.2 <u>แบบจำลอง Transportation Choice Models (2)</u>

การพัฒนาแบบจำลองประเภทนี้เริ่มต้นโดยอาศัยทฤษฎี "Utility Maximization" เป็นหลัก นั่นก็คือผู้ตัดสินใจในการเลือกรูปแบบการขนส่งสามารถจะให้มูลค่าหรือจัดลำดับให้กับแนวทางเลือกต่างๆ (รูปแบบการขนส่งหรือวิธีการขนส่ง) ในรูปของตัวแปรอธิบายความพอใจของตนเอง (ซึ่งก็มีพื้น



รูปที่ 2.1 แสดงตำแหน่งของแบบจำลองรูปแบบการเดินทางแบบสับเปลี่ยนกัน

ฐานมาจากผลประโยชน์สูงสุดที่เกิดขึ้น) หรือบุคคลทั่วไปจะเลือกเดินทางโดยรูปแบบหรือวิธีการที่ให้ความสะดวก รวดเร็ว ปลอดภัย และประหยัด นั่นคือได้ผลประโยชน์มากสุด ฉะนั้นเนื้อหาของทฤษฎีนี้จึงถูกประยุกต์ใช้เพื่อสร้างแบบจำลองอธิบายแนวทางการตัดสินใจของผู้เดินทาง โดยอาศัยตัวแปรที่อธิบายมูลค่าการเดินทางต่างๆ เช่น เวลาในการเดินทาง ค่าใช้จ่ายในการเดินทาง ฯลฯ เป็นหลัก

ตามปกติผู้ตัดสินใจในลักษณะข้างต้นจะต้องมีข้อมูลที่ค่อนข้างครบ เพื่อสามารถตัดสินใจได้ถูกต้อง แต่เรื่องนี้คงเป็นไปไม่ได้ในสาขาการคมนาคมขนส่ง เนื่องจากรูปแบบและวิธีการขนส่งชนิดต่างๆที่จะเลือกต้องเน้นประสบการณ์ที่เกิดขึ้นกับตนเองจึงมีความเข้าใจละเอียด อย่างไรก็ตามเราสามารถประยุกต์แนวทาง "Random Utility" เพื่อช่วยอธิบายปรากฏการณ์หรือสภาพการตัดสินใจของผู้เดินทางได้

แนวทางดังกล่าวอธิบายว่า "ในสภาพที่เป็นจริง ประชากรไม่จำเป็นต้องเลือกเป้าหมายที่ดีที่สุดในการกระทำที่ดีที่สุด หรือเขาไม่แน่ว่าจะเลือกแนวทางเลือกที่ดีที่สุดเพื่อการกระทำอย่างเดิมอีกทุกครั้ง หรืออีกนัยก็คือ แนวทาง Random Utility เน้นอธิบายว่าประชากรแต่ละคนจะเลือกแนวทางเลือกของเขาซึ่งเขาคิดว่าน่าจะดีที่สุดในขณะนั้น"

ในการเลือกแนวทางเลือกนั้น จะทำการหาค่า Utility ของแต่ละแนวทางเลือกแล้วจะทำการเลือกแนวทางเลือกที่ให้ค่า Utility มากที่สุด โดย Utility จะประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

1. Observed Attributes หรือบางทีก็เรียกว่า Systematic Utility หรือ Representative Utility ค่าของส่วนนี้จะสามารถหาได้โดยการสำรวจ เก็บข้อมูล รวบรวมข้อมูลต่างๆที่เกี่ยวข้อง และบ่งบอกออกมาเป็นมูลค่าได้

2. Unobserved Component หรือบางทีก็เรียกว่า Random Utility ค่าของส่วนนี้จะไม่สามารถหาได้ เพราะเป็นความไม่แน่นอน

วิธีการทางคณิตศาสตร์

ให้ U_{it} = Utility ของแนวทางเลือก i จากแนวทางเลือกทั้งหมด t

V_{it} = Representative Utility ของแนวทางเลือก i

E_{it} = Random Utility ของแนวทางเลือก i

$$\therefore U_{it} = V_{it} + E_{it}$$

ในการเลือกแนวทางการเลือกนั้น จะเลือกแนวทางเลือกที่ให้ค่า Utility สูงที่สุด ดังนั้นในแต่ละแนวทางเลือกของแนวทางเลือกทั้งหมด t แนวทางเลือก จะเลือกแนวทางเลือก i ดีกว่าแนวทางเลือก j ของแนวทางเลือกทั้งหมด t แนวทางเลือก ก็ต่อเมื่อ Utility ของแนวทางเลือก i มีค่ามากกว่า Utility ของแนวทางเลือก j ของแนวทางเลือกทั้งหมด t แนวทางเลือก

$$U_{it} > U_{jt}$$

ให้ probability ของการเลือกแนวทางเลือก i เป็น P_{it}

$$P_{it} = P\{U_{it} > U_{jt}\}$$

Utility Function

$$U_{it} = V_{it} + E_{it}$$

$$U_{jt} = V_{jt} + E_{jt}$$

$$\therefore P_{it} = P\{V_{it} + E_{it} > V_{jt} + E_{jt}\}$$

$$= P\{E_{jt} - E_{it} < V_{it} - V_{jt}\}$$

ในการเลือกแนวทางเลือก i หรือแนวทางเลือก j นั้นเราไม่สามารถบอกได้ว่าแนวทางเลือกไหนจะดีกว่ากัน ถึงแม้ว่าเราจะทราบค่า V_{it} และ V_{jt} ก็ตาม แต่เราไม่สามารถหาค่า Eit และ Ejt ได้ แต่เราสามารถทำการหาค่า probability ที่ $E_{jt} - E_{it}$ น้อยกว่า $V_{it} - V_{jt}$ ได้ โดยการสมมุติให้ E's = $E_{jt} - E_{it}$

1. ถ้า E's มีการกระจายเป็นแบบ Normally Distribution

โดยมี mean = 0

variance = σ_i^2 , σ_j^2

covariance = σ_{ij}^2

จะได้ probability ของการเลือกแนวทางเลือก i เป็น P_{it}

$$P_{it} = \int_{-\infty}^{\left(\frac{V_{it}-V_{jt}}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

โดย $\sigma^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij}^2$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $\sigma = 1$ เพื่อความสะดวกในการใช้งาน แบบจำลองชนิดนี้เรียกว่า "Binary Probit Model"

2. E's มีการกระจายเป็นแบบ Gumbel Distribution โดยฟังก์ชันการแจงแจกสะสม (Cumulative Distribution Function) เป็น

$$F(E) = \frac{1}{1 + e^{-\mu E}}$$

โดย $\mu > 0, -\infty < E < \infty$

$$P_{it} = P\{U_{it} > U_{jt}\}$$

$$= \frac{e^{V_{it}}}{e^{\mu V_{it}} + e^{\mu V_{jt}}}$$

โดยทั่วไป จะกำหนดให้ $\mu = 1$

$$P_{it} = \frac{e^{V_{it}}}{e^{V_{it}} + e^{V_{jt}}}$$

แบบจำลองชนิดนี้เรียกว่า "Binary Logit Model" ในกรณีของ Multinomial Logit Model สมการจะเป็น

$$P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j \in C_t} e^{V_j}}$$

โดย C_t คือเซทของแนวทางเลือกทั้งหมด

ตัวอย่างของการใช้สมการ Logit Model พิจารณารูปแบบการเดินทาง 3 รูปแบบที่คนต้องเลือกในการเดินทางไปทำงาน คือ รถยนต์ส่วนตัว รถเมล์ และการเดิน โดย Systematic Utility Function ของแต่ละรูปแบบเป็นดังนี้

$$V_{auto} = 1.0 - 0.1\,(TT_{auto}) - 0.05\,(TC_{auto})$$

$$V_{bus} = - 0.1\,(TT_{bus}) - 0.05\,(TC_{bus})$$

$$V_{walk} = - 0.5 - 0.1\,(TT_{walk})$$

โดย TT_i = เวลาการเดินทางของรูปแบบ i, (นาที)

TC_i = ค่าใช้จ่ายในการเดินทางของรูปแบบ i, (ดอลล่าร์)

สมมุติให้เวลาในการเดินทางของรถยนต์ส่วนตัว, รถเมล์ และการเดินทางเป็น 5, 15 และ 20 นาที ตามลำดับ และค่าใช้จ่ายในการเดินทางของรถยนต์ส่วนตัวและรถเมล์เป็น \$ 0.60 และ \$ 0.50 ตามลำดับ

เมื่อแทนค่า TT_i และ TC_i ลงในสมการข้างบน ก็จะสามารถของ Sustematic Utility Function ได้ดังนี้

$$V_{auto} = 0.47,\ V_{bus} = -1.525,\ V_{walk} = -2.50$$

จากสมการ Logit Model

$$P_{auto} = \frac{e^{0.47}}{e^{0.47} + e^{-1.525} + e^{-0.50}} = \frac{1.6000}{1.8993} = 0.843$$

$$P_{bus} = \frac{e^{-1.525}}{e^{0.47} + e^{-1.525} + e^{-0.50}} = \frac{0.2172}{1.8993} = 0.114$$

และ $$P_{walk} = \frac{e^{-0.50}}{e^{0.47} + e^{-1.525} + e^{-0.50}} = \frac{0.0821}{1.8993} = 0.043$$

2.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Model Estimation)

การประมาณค่าพารามิเตอร์มีวิธีทำอยู่หลายวิธีคือ Least Square Method, Maximum Likelihood Method ฯลฯ ในการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ต้องพิจารณาจากรูปแบบของ Probability Function ซึ่งจะมีวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมแตกต่างออกไปในกรณีของแบบจำลองการเลือกรูปแบบการขนส่งสินค้าโดยใช้ Logit Model วิธีการที่เหมาะสมที่นิยมใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ Least Square Method ซึ่งจะประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ใกล้เคียงความจริงที่สุด

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ Maximum Likelihood Method และ Least Square Method มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.3.1 Maximum Likelihood Method

1. Binary Logit Model

เป็นแบบจำลองที่ใช้สำหรับกรณีที่มีแนวทางเลือก 2 แนวการเลือก คือ แนวทางเลือก i และทางเลือก j โอกาสที่คนที่ n จะเลือกแนวทางเลือก i คือ

$$P_n(i) = P\,(U_{in} > U_{jn})$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-\mu(v_{in} - v_{jn})}} \quad \text{.......... สมการที่ 1}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $\mu = 1$

จะได้ $$P_n(i) = \frac{1}{1 + e^{-\beta' x_n}}$$

โดยที่ β' = เวกเตอร์ของค่า $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$

X_n = เวกเตอร์ผลต่างของค่า Atlributes

= $X_{in} - X_{jn}$

จากสมการที่ 1 จะเห็นว่าโอกาสที่คนที่ n จะเลือกแนวทางเลือก 1 ขึ้นอยู่กับค่า β' ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์นั่นเอง ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

โดยใช้วิธี Maximum Likelihood มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ก. จัดทำ Likelihood Function

$$L^{*}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k) = \prod_{n=1}^{N} P_n(i)^{y_{in}} \quad P_n(j)^{y_{jn}}$$

โดย L^{*} = Likelihood Function

β_k = k_{th} Parameter

N = จำนวนข้อมูล

$$Y_{in} = \begin{cases} 0 & \text{ในกรณีที่คนที่ } n \text{ เลือกแนวทางเลือก } i \\ 1 & \text{ในกรณีที่คนที่ } n \text{ เลือกแนวทางเลือก } j \end{cases}$$

ข. จัดให้อยู่ในรูปแบบของ log ดังสมการ

$$\text{Log } L^{*}(\beta') = L(\beta') = \sum_{n=1}^{N}(Y_{in} \text{ Log } P_n(i) + Y_{jn}\text{Log } P_n(j))$$

ค. Maximize Likelihood Function โดยการ derivative $L(\beta')$ เทียบกับ β_k แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial L(\beta')}{\partial \beta_k} = 0 \quad ; k = 1,2,3,\ldots,k$$

ซึ่งจากการทำ derivative ข้างต้น จะทำให้ได้สมการ k สมการ มีตัวแปร k ตัว คือ $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ แล้วแก้สมการหา β' ได้

2. Multinomial Logit Model

เป็นแบบจำลองที่ใช้ในกรณีที่มีแนวทางเลือกมากกว่า 2 แนวทางเลือก คือมีแนวทางเลือกได้ C_t ตัว รูปแบบของแบบจำลอง คือ

$$P_n(i) = \frac{e^{\beta' x_n}}{\sum_{J \in C_t} e^{\beta' x_{jn}}}$$

ขั้นตอนการคำนวณค่าพารามิเตอร์ โดยใช้ Maximum Likelihood Method มีดังนี้

ก. จัดทำ Likelihood Function

$$L^*(\beta') = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i \in C_t} P_n(i)^{y_{in}}$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \prod_{i \in C_t} \left(\frac{e^{\beta' x_{in}}}{\sum_{j \in C_t} e^{\beta' x_{jn}}} \right)$$

ข. จัดให้อยู่ในรูปแบบของ Natural Logarithm

$$\mathrm{Log}_e\, L^*(\beta') = L(\beta') = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in C_t} Y_{in} \left(\beta' X_{in} - \mathrm{Log}_e \sum_{j \in C_t} e^{\beta' x_{jn}} \right)$$

ค. Maximize Likelihood Function โดยการ derivative $L(\beta')$ เทียบกับ β_k แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial L(\beta')}{\partial \beta} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in C_t} Y_{in} \left(x_{ink} - \frac{\sum e^{\beta' x_{jn}} x_{jnk}}{\sum_{j \in C_t} e^{\beta' x_{jn}}} \right)$$

หรือจัดอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\frac{\partial L(\beta')}{\partial \beta_k} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in C_t} \{Y_{in} - P_n(i)\} x_{ink} = 0$$

2.3.2 Least Square Method

เมื่อพล็อตค่าตัวแปร x และ y ลงในกราฟแล้ว การลากเส้นตรงผ่านกลุ่มข้อมูลอาจจะลากเส้นตรงได้หลายเส้นขึ้นกับค่า α และ β ซึ่งคือค่าเฉลี่ยของ y เส้นที่ดีที่สุดจะต้องเป็นเส้นที่ลากผ่านข้อมูลโดยมีความผิดพลาดน้อยที่สุด ค่าแตกต่างระหว่างค่าที่ได้จากข้อมูล (Y_i) และค่าจากเส้นตรง $Y'_i = \alpha + \beta x$ คือ $|Y_i - Y'_i|$ ดังนั้นเส้นที่มีข้อผิดพลาดทั้งหมดน้อยที่สุดสามารถหาได้โดยการคำนวณหาผลรวมของ Squered Error

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

ในการหาค่า α และ β ของข้อมูล n ตัวอย่าง จะหาได้โดยวิธี Least Square

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial \propto} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - \propto - \beta X_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - \propto - \beta X_i)(-X_i) = 0$$

จากการประมาณค่าโดยวิธี Leart Square Method จะได้ค่า $\propto$ และ β ดังนี้

$$\propto = \frac{1}{n}\Sigma Y_i - \frac{\beta}{n} X_i = \bar{Y}_i - \beta \bar{X}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

ดังนั้น Least Square Regression Line คือ

$$Y = \propto + \beta X$$

ข้อดีที่สำคัญที่สุดของการวิเคราะห์โดยวิธีการนี้คือ นักวิเคราะห์สามารถกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม และสามารถอธิบายความแน่นอนแม่นยำของสมการที่ใช้คาดการณ์ได้โดยตัวของมันเอง ค่าสถิติที่ใช้ในการอธิบายมีดังนี้

1. สัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจ (coefficient of Multiple Determination, R^2) คือ การวัดจำนวนของความแปรปรวนที่ถูกบรรยายไว้โดยสมการ ซึ่งแสดงไว้เป็นอัตราส่วทศนิยมของผลรวมความแปรปรวนที่สังเกตในตัวแปรตาม (dependent Variable) ค่าสัมประสิทธินี้มีขีดสูงสุด 1.0 ซึ่งจะเป็นค่าสำหรับสมการที่สมบูรณ์ที่สุด

2. สถิติคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (The Standart Error Estimate, Sy) คือ การวัดความเบี่ยงเบนของค่าที่ได้มาจากการสังเกตสถิติคลาดเคลื่อนมาตรฐาน จะถึงขีดต่ำสุดคือ ศูนย์ ซึ่งเป็นค่าสำหรับแบบจำลองที่สมบูรณ์ที่สุด

3. สัมประสิทธิสหสัมพันธ์ (The Partial Correlation Coeffcient,Rj) สัมประสิทธิสหพันธ์ของตัวแปรอิสระบอกให้รู้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระบางตัวที่อยู่ภายใต้การพิจารณา

ในกรณีของ Logit Model รูปแบบของแบบจำลอง คือ

$$P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j \in C_t} e^{V_j}}$$

เมื่อพิจารณาแนวทางเลือกแต่ละแนวทางเลือก คือ แนวทางเลือก i และ แนวทางเลือก k

$$P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j \in C_t} e^{V_j}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$P_k = \frac{e^{V_k}}{\sum_{j \in C_t} e^{V_j}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \; ; \quad \frac{P_i}{P_k} \quad \frac{e^{V_i}}{e^{V_k}}$$

จัดให้อยู่ในเทอมของ natural logarithm

$$\mathrm{Log}_e \, (P_i/P_k) = V_i - V_k = \beta \, (X_i - X_k) + \alpha$$

เมื่อนำค่า $\mathrm{Log}_e \, (P_i/P_k)$ กับ $(X_i - X_k)$ ไปพล๊อตกราฟ แล้วทำการจากเส้นผ่านกลุ่มข้อมูล โดยวิธี Least rquare ก็จะสามารถหาค่า β และ $\propto$ ได้