

ทฤษฎีตัวกลางยังผลสำหรับสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกลมไม่เชิงเส้นอย่างแรง



นายจิตริน ชัยประภา

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

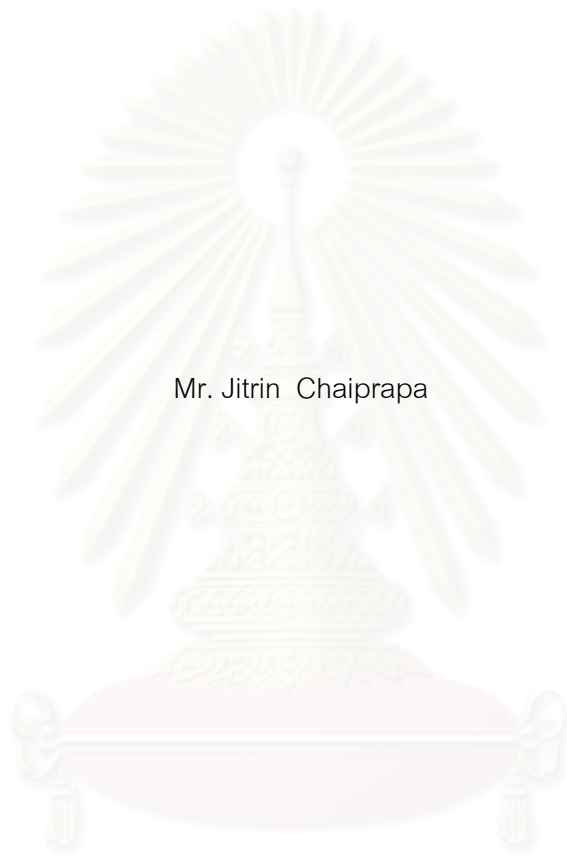
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-17-5183-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

EFFECTIVE MEDIUM THEORY FOR STRONGLY
NONLINEAR CYLINDRICAL DIELECTRIC COMPOSITES



Mr. Jitrin Chaiprapa

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Physics

Department of Physics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2003
ISBN 974-17-5183-4

นายจิตริน ชัยประภา : ทฤษฎีตัวกลางยังผลสำหรับสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกล้อมประสิทธิผลความไม่เชิงเส้นอย่างแรง (EFFECTIVE MEDIUM THEORY FOR STRONGLY NONLINEAR CYLINDRICAL DIELECTRIC COMPOSITES). อาจารย์ที่ปรึกษา: รองศาสตราจารย์ ดร. มยุรี เนตรนภิส 115 หน้า. ISBN 974-17-5183-4.

งานวิจัยนี้เป็นความพยายามที่จะขยายงานวิจัยของ ลี และ ยู (1995) ในการศึกษาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกล้อมประสิทธิผลความไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ประกอบด้วยสารฝังกระจายเป็นเส้นใยไดอิเล็กทริกทรงกระบอกล้อมประสิทธิผลอย่างแรงฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ต่างชนิดกัน ในวิธีการศึกษาของงานวิจัยนี้วิธีการแปรผันถูกนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต และทฤษฎีตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม ที ตามแบบจำลองเชิงทฤษฎีของ ฮาสชิน ถูกนำมาใช้คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกล้อมประสิทธิผลอย่างแรง (χ_e) จากผลการคำนวณได้แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า χ_e เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายในชั้นสาร (v_i) โดยที่ยังสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของสารฝังกระจายและของตัวกลางที่ต่างชนิดกันมีค่าแตกต่างกันมากเท่าไร ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า χ_e ยิ่งห่างจากกันเพิ่มมากขึ้นเท่านั้น นอกจากนี้ผลการคำนวณได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการประมาณค่า χ_e ของ ลี และ ยู ซึ่งใช้แบบจำลองของ บรูคส์แมน โดยพบว่าการคาดคะเน χ_e ด้วยขอบเขตบนและขอบเขตล่างตามแบบจำลองของ ฮาสชิน คลอบคลุมผลการประมาณค่า χ_e ของ ลี และ ยู ได้ค่อนข้างดีเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบที่ต่างชนิดกันมีค่าแตกต่างกันมาก อีกทั้งในงานวิจัยนี้ยังได้ปรับปรุงผลการประมาณค่า χ_e ให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นโดยการหาค่าสัมประสิทธิ์ทดลองแบบปรับปรุงด้วยการเพิ่มพจน์ในลำดับถัดไปและพารามิเตอร์ของการแปรผันในคีย์ทดลองแบบง่าย โดยพบว่าเส้นขอบเขตบนและเส้นขอบเขตล่างของค่า χ_e ที่คำนวณได้จากคีย์ทดลองแบบปรับปรุงอยู่ต่ำกว่าเส้นขอบเขตบนและเส้นขอบเขตล่างของค่า χ_e ที่คำนวณได้จากคีย์ทดลองแบบง่ายเพียงเล็กน้อยตลอดทั้งช่วงค่าของ v_i

ภาควิชาฟิสิกส์

สาขาวิชาฟิสิกส์

ปีการศึกษา 2546

ลายมือชื่อนิสิต.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

JITRIN CHAIPRAPA : EFFECTIVE MEDIUM THEORY FOR STRONGLY
NONLINEAR CYLINDRICAL DIELECTRIC COMPOSITES. THESIS ADVISOR:
ASSOCIATE PROFESSOR MAYUREE NATENAPIT. 11 pp. ISBN 974-17-5183-4.

This research is an attempt to extend Lee and Yu's work (1995) in study bulk effective nonlinear coefficient of strongly nonlinear cylindrical dielectric composites. They consist of strongly nonlinear cylindrical dielectric inclusions randomly embedded in another strongly nonlinear dielectric host medium. In methodology of this research, the variational method is applied to solve electrostatic boundary-value problems and the effective medium theory (EMT) according to Hashin's theoretical model is used to calculate bulk effective nonlinear coefficient of strongly nonlinear cylindrical dielectric composites (χ_e). Our results show the upper and lower bounds of χ_e when inclusion packing fraction (v_i) is varied. We also find that the greater the difference between the nonlinear coefficient of the inclusion and of host medium, the larger the gap between the upper and lower bounds. In addition, our results are compared with the approximation of χ_e by Lee and Yu using Bruggeman's model. We find that the estimations of χ_e by upper and lower bounds according to Hashin's model cover Lee and Yu's result fairly well when the nonlinear coefficient of the components are great contrasts. Furthermore, this research also improves the calculation of χ_e more accurately by using the improved trial potentials with higher order terms and variational parameters added to simple trial potentials. We find that the upper and lower bounds for χ_e calculated by the improved trial potentials are slightly below those calculated by using simple trial potentials for entire range of v_i .

Department of Physics

Student 's signature.....

Field of study Physics

Academic year 2003

Advisor 's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยการชี้แนะและคำปรึกษาอย่างดียิ่งของท่าน รองศาสตราจารย์ ดร.มยุรี เนตรนภิส ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ท่านได้ให้ความช่วยเหลือในทุกด้าน ตลอดจนข้อคิดเห็นต่าง ๆ ของงานวิจัย และขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ อาจารย์ ดร.ปัจฉา ฉัตรภรณ์ และอาจารย์ ดร.สธน วิจารย์วรรณลักษณ์ ท่านทั้งสามได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่าง ๆ ในการปรับปรุงและแก้ไขงานวิจัยเพื่อพัฒนาในระดับสูงต่อไป รวมทั้งขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.รุจิกร ธนวิทยานิล ท่านได้ให้คำปรึกษาและตอบปัญหาในเรื่องที่สงสัย รวมถึงการแนะนำหนังสือฟิสิกส์ที่ดี ๆ และต้องขอขอบคุณเพื่อนอันเป็นที่รัก นาย สมชาย สมจิตร ที่มีส่วนอย่างมากที่ทำให้รูปเล่มวิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์เรียบร้อย และด้วยการสนับสนุนและความเอื้อเฟื้อของภาควิชาฟิสิกส์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์จัดพิมพ์เอกสารและโปรแกรมการคำนวณ รวมทั้งทุนอุดหนุนส่งเสริมวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโทของ บัณฑิตวิทยาลัยซึ่งให้การสนับสนุนทางการเงิน จึงขอขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

ท้ายที่สุดผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณคุณแม่และคุณย่า คณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ จนทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญรูป.....	ญ
สารบัญตาราง.....	ฎ
สารบัญสัญลักษณ์.....	ฏ

บทที่

1	บทนำ.....	1
2	การประยุกต์หลักการแปรผันในทางไฟฟ้าสถิต.....	4
2.1	โพลาริเซชันและไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ.....	4
2.1.1	ไดโพลเหนี่ยวนำ.....	4
2.1.2	การวางตัวของโมเลกุลมีขั้ว.....	5
2.2	ตัวกลางไดอิเล็กทริก.....	7
2.2.1	ตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.....	7
2.2.2	ตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น.....	8
2.3	สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริก.....	10
2.3.1	สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.....	10
2.3.2	สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น.....	11
2.4	ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผัน.....	11
2.4.1	ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผัน ในตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.....	11
2.4.2	ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผัน ในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น.....	12

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
3	สภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น..... 15
3.1	ลักษณะปัญหาและแบบจำลองของ Hashin..... 16
3.2	การแก้ปัญหาโดยหาผลเฉลยสมการลาปลาซ..... 17
3.3	วิเคราะห์และสรุปผลการคำนวณ..... 26
3.4	การแก้ปัญหาโดยวิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน..... 29
4	สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริก ไม่เชิงเส้นอย่างแรง..... 33
4.1	ลักษณะปัญหาและการประมาณตัวกลางยังผลของ Bruggeman..... 33
4.2	อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน..... 36
4.3	อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง..... 40
4.4	สรุปและวิเคราะห์ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล ของสารประกอบ..... 44
5.	ทฤษฎีตัวกลางยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง..... 49
5.1	ลักษณะปัญหาและแบบจำลองของ Hashin..... 49
5.2	อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน..... 51
5.3	อี เอ็ม ที แบบปรับปรุง..... 57
5.4	ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ..... 62
5.4.1	ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ ความไม่เชิงเส้นยังผล..... 62
5.4.2	ผลการคำนวณด้วยศักยภาพดลของแบบปรับปรุง..... 67
5.4.3	ผลการเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ..... 70
6.	สรุปและวิเคราะห์ผลการวิจัย.....74
	รายการอ้างอิง.....79

สารบัญ(ต่อ)

ภาคผนวก	หน้า
ก. หลักการแปรผัน.....	82
ข. โปรแกรมการแก้ปัญหาการแปรผันของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น.....	91
ค1. โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล ของสารประกอบโดยวิธี คี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน.....	94
ค2. โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล ของสารประกอบโดยวิธี คี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง.....	96
ง1. โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยวิธี คี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน เมื่อสารฝังกระจายเส้นใยเป็นชนิด χ_i	98
ง2. โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยวิธี คี เอ็ม ที แบบปรับปรุง เมื่อสารฝังกระจายเส้นใยเป็นชนิด χ_i	100

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูป

รูปที่	หน้าที่
2.1	แสดงไดโพลโมเมนต์ของโมเลกุลน้ำ (H ₂ O)..... 6
2.2	แสดงการเกิดทอร์คบนโมเลกุลมีขั้ว..... 6
3.1	แสดงแบบจำลองของ Hashin ซึ่งให้อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางนำไฟฟ้าชนิด σ_m 17
3.2	แสดงแบบจำลองของ Hashin ซึ่งให้อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางนำไฟฟ้า σ_i 25
3.3	แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e 27
3.4	แสดงผลการคำนวณทางทฤษฎี และผลทางการทดลองของค่าสภาพนำไฟฟ้า ของสารประกอบ Mg ₂ Pb – Pb..... 28
4.1	แสดงภาคตัดขวางของสารประกอบที่มีส่วนประกอบ 2 ชนิดที่ต่างกัน (two – component composites)..... 34
4.2	แสดงการนิยามสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ..... 34
4.3	แสดงแบบจำลองของ Bruggeman ในการประมาณสัมประสิทธิ์ ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ..... 35
4.4	แสดงค่า χ_e / χ_m กับอัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i ของวิธีการประมาณ ตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน (—) และผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (๐) เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบ ทั้งสองของสารประกอบ $\frac{\chi_i}{\chi_m} = 0.5, 0.1, 0.01$ และ 0.001 โดยลำดับ จากเส้นบนสุดไปหาเส้นล่างสุดตามลำดับ..... 44
4.5	แสดงค่า χ_e / χ_m กับอัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i ของวิธีการประมาณ ตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน หรือ อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (---) การประมาณ ตัวกลางยังผลแบบปรับปรุง หรือ อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง (—) และผลการจำลอง โดยวิธีเชิงตัวเลข (๐) เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น ของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบในรูป (a) $\chi_i / \chi_m = 0.1$, (b) $\chi_i / \chi_m = 0.01$, (c) $\chi_i / \chi_m = 0.001$ 46

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
5.1	แสดงภาคตัดขวางของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เป็น χ_i ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m 50
5.2	แสดงแบบจำลองของ Hashin ของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เป็น χ_i ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m 51
5.3	แสดงภาคตัดขวางของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เป็น χ_m ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i 56
5.4	แสดงแบบจำลองของ Hashin ของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เป็น χ_m ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i 56
5.5	แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล χ_e กรณี (a) $\chi_i > \chi_m$, (b) $\chi_i < \chi_m$65-66
5.6	แสดงการเปรียบเทียบค่า χ_e / χ_m ที่คำนวณจากศักย์ทดลองแบบง่าย และศักย์ทดลองปรับปรุง กรณี (a) $\chi_i > \chi_m$, (b) $\chi_i < \chi_m$68-69
5.7	แสดงการเปรียบเทียบผลการทำนายค่า χ_e / χ_m จากทฤษฎีต่าง ๆ และการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข กรณี (a) $\chi_i / \chi_m = 0.1$ (b) $\chi_i / \chi_m = 0.01$71-72

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้าที่
4.1	แสดงการเปรียบเทียบค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม (third – order nonlinear susceptibility , $\chi^{(3)}$) ของสารประกอบเชิงแสง ไม่เชิงเส้น (nonlinear optical composite materials) ระหว่างผลการทดลอง และผลการคำนวณเชิงทฤษฎีตามแนวคิดของ Bruggeman..... 47

สารบัญสัญลักษณ์

α	สภาพโพลาไรซ์ของอะตอม (atomic polarizability)
ϵ_0	สภาพยอมทางไฟฟ้าของสุญญากาศ (permittivity of free space)
ϵ	สภาพยอมทางไฟฟ้าของตัวกลาง (permittivity of material)
ϵ_r	สภาพยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์ของตัวกลาง หรือ ค่าคงที่ได้อิเล็กทริก (relative permittivity or dielectric constant)
σ	สภาพนำไฟฟ้า (electric conductivity)
σ_e	สภาพนำไฟฟ้ายังผล (effective electric conductivity)
χ'	สภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าของตัวกลาง (electric susceptibility)
χ_i	ภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้นของสารฝังกระจาย (nonlinear electric susceptibility of inclusion) หรือ สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของสารฝังกระจาย (nonlinear coefficient of inclusion)
χ_m	สภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear electric susceptibility of medium) หรือ สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear coefficient of medium)
χ_e	สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ (effective nonlinear coefficient of composites)
$\chi^{(3)}$	สภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับสาม (third – order nonlinear susceptibility)
ρ_f	ความหนาแน่นเชิงปริมาตรของประจุอิสระ (volume free charge density)
ϕ	ศักย์ไฟฟ้า (electric potential)
$W[\phi]$	ฟังก์ชันนอลพลังงาน (energy functional)
v_i	ค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายในชิ้นสาร (packing fraction of inclusion)
v_m	ค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของตัวกลาง (packing fraction of medium)
\vec{p}	ไดโพลโมเมนต์ (dipole moment)
\vec{E}	สนามไฟฟ้า (electric field)
\vec{J}	ความหนาแน่นกระแส (current density)

สารบัญสัญลักษณ์(ต่อ)

\vec{D}	การกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement)
\vec{P}	โพลาริเซชัน (polarization)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

เนื่องจากสารประกอบไม่เชิงเส้น (nonlinear composite materials) มีศักยภาพในเชิงประยุกต์ในทางวิศวกรรมและฟิสิกส์ เช่น สารประกอบไม่เชิงเส้นเชิงแสง (optical nonlinear composite materials) ถูกนำไปใช้ปรับปรุงการทำงานของอุปกรณ์โฟโตนิก (photonic device) [1] นอกจากนี้ สารไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น (nonlinear dielectrics) ยังได้ถูกนำไปใช้ร่วมในการพัฒนากล้องจุลทรรศน์แบบสแกน (scanning nonlinear dielectric microscope) ซึ่งให้ความละเอียดถึงระดับนาโนเมตรเพื่อนำไปใช้ในการสังเกตการเกิดโพลาริเซชันของสารเฟอร์โรอิเล็กทริก (ferroelectric polarization) [2] รวมถึงในทางพอลิเมอร์ สารพอลิเมอร์ร่วม (copolymer) เช่น PVDF – TrFE (polyvinylidene fluoride – trifluoroethylene) [3] ก็เป็นสารประกอบไม่เชิงเส้นเช่นกัน ดังนั้นจึงเป็นประโยชน์อย่างยิ่งที่จะศึกษาและวิจัยสารประกอบดังกล่าว

เนื่องจากสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นและสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นมีสมการพื้นฐานที่อธิบายสนามไฟฟ้าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน จึงทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (exact closed form solution) ดังนั้นวิธีประมาณต่าง ๆ จึงถูกนำมาใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตเพื่อคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบซึ่งอธิบายการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของสารประกอบ โดยมีลำดับความเป็นมาดังนี้ ในปี ค.ศ. 1992 Gu และ Yu ได้นำวิธีเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation method) [4,5] ไปใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นเพื่อคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบที่มีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายต่อชั้นสารแบบเบาบาง (low concentration of inclusions) ซึ่งข้อจำกัดของวิธีนี้คือไม่สามารถแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของกรณีตัวกลางไม่เชิงเส้นอย่างแรงได้ (strongly nonlinear medium) ในช่วงเวลาต่อมาในปี ค.ศ. 1993 Yu ได้นำวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตวิธีใหม่คือ วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน [6-9] ไปใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตเพื่อคำนวณหาสภาพยอมทางไฟฟ้ายังผลและสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นทั้งชนิดอย่างอ่อน (weakly nonlinear medium) และอย่างแรง (strongly nonlinear medium) ตามลำดับ และเพื่อขยายผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ (χ_c) ที่มีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายในชั้นสารแบบเบาบางไปสู่กรณีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายในชั้นสารแบบใด ๆ ในปี ค.ศ. 1995

Lee และ Yu ได้นำวิธีการประมาณตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม เอ (effective medium approximation, EMA) [10,11] ตามแบบจำลองของ Bruggeman [12] คำนวณค่า χ_e ของสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นอย่างแรง นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 1996 Yu และคณะ ได้พบทางเลือกใหม่ในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกวิธีหนึ่งคือ วิธีการประมาณแบบแยกส่วน (decoupling technique) [13,14] โดยเป็นวิธีที่แปลงผลที่ได้จากกรณีปัญหาตัวกลางเชิงเส้นไปสู่ปัญหาตัวกลางไม่เชิงเส้นโดยมีระบบระดับจุลภาคคล้ายคลึงกัน (identical microstructure) ในงานวิจัยนี้เป็นความพยายามที่จะขยายผลงานวิจัยของ Lee และ Yu [10,11] ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้นในการศึกษาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง (χ_e) ซึ่งอธิบายการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของสารประกอบ โดยใช้แบบจำลองของ Hashin [15] คำนวณค่า χ_e ซึ่งการคำนวณค่า χ_e โดยใช้แบบจำลองของ Bruggeman ของ Lee และ Yu นั้นเป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของการคำนวณค่า χ_e ตามแบบจำลองของ Hashin

โดยรายละเอียดของงานวิจัยเล่มนี้เริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงการนำหลักการแปรผันไปประยุกต์ใช้ในทางไฟฟ้าสถิต โดยเปรียบเทียบกับภาคผนวก ก ให้เห็นว่า ในกรณีของตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ฟังก์ชันนอลและฟังก์ชันทดลองในทางไฟฟ้าสถิตคืออะไร และแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนอลดังกล่าวสามารถนำไปสู่สมการพื้นฐานของปัญหาในแต่ละชนิดของตัวกลาง โดยรายละเอียดได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 บทที่ 3 เป็นการทบทวนทฤษฎีตัวกลางยังผลของ Hashin [15] ซึ่งใช้คำนวณสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นที่ประกอบด้วยตัวกลางต่างชนิดกัน 2 ชนิด (two-phase materials) โดยกล่าวถึงแบบจำลองในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาค่าขอบโดยหาผลเฉลยของสมการลาปลาซโดยตรง พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการคำนวณกับวิธีอื่นคือ วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน เพื่อแสดงให้เห็นว่าการคำนวณโดย 2 วิธีดังกล่าวให้ผลตรงกัน โดยแนวคิดทฤษฎีของ Hashin [15] และวิธีการแปรผัน ฟังก์ชันนอลพลังงานจะถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นในบทที่ 5 ต่อไป บทที่ 4 เป็นการศึกษาของงานวิจัยของ Lee และ Yu [10,11] ที่ศึกษาสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นอย่างแรงซึ่งมีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเป็นค่าใด ๆ โดยเนื้อหาในบทนี้เป็นการศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงซึ่งมีลักษณะของสารประกอบเหมือนกับลักษณะของสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ Lee และ Yu ได้ทำการศึกษาไว้ นั่นคือ เป็นการศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่มีส่วนประกอบที่คละกันอย่างสุ่ม กล่าวคือ ไม่มีส่วนประกอบใดฝังอยู่ในอีกส่วนประกอบหนึ่งอย่างเด่นชัด แต่ส่วนประกอบทั้งสองกระจายอย่างสุ่มร่วมกันจนไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่าสารชนิดใดเป็นสารฝังกระจาย (inclusion) สารชนิดใดเป็นตัวกลาง (host medium) ซึ่งการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

เลือกใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน และคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ (χ_c) โดยใช้แบบจำลองของ Bruggeman [12] อีกทั้งได้ใช้แนวความคิดของ Lee และ Yu [11] ในการปรับปรุงผลการคำนวณค่า χ_c ให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นโดยการใช้ ศักย์ทดลองแบบปรับปรุงด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันในศักย์ทดลองเดิม บทที่ 5 เป็นงานวิจัยของวิทยานิพนธ์เรื่องนี้ที่พยายามจะขยายผลงานวิจัยของ Lee และ Yu [10,11] ดังได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 4 ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น โดยเนื้อหาของบทนี้เป็นการศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ประกอบด้วยสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงชนิดหนึ่งฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ต่างชนิดกัน ซึ่งมีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายต่อปริมาตรของชิ้นสารเป็นค่าใด ๆ ทำนองเดียวกัน วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานถูกเลือกนำมาใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต และคำนวณค่า χ_c โดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผลตามแบบจำลองของ Hashin [15] ซึ่งการคำนวณค่า χ_c ตามแบบจำลองของ Bruggeman [12] ดังได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 4 เป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของการคำนวณค่า χ_c ตามแบบจำลองของ Hashin พร้อมทั้งปรับปรุงผลการคำนวณให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นด้วยการใช้แนวความคิดของ Lee และ Yu [11] ในการปรับปรุงผลการคำนวณค่า χ_c ให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นโดยการใช้ ศักย์ทดลองแบบปรับปรุงด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันในศักย์ทดลองเดิม และในบทสุดท้าย คือ บทที่ 6 เป็นการสรุปและวิเคราะห์ผลการวิจัย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

การประยุกต์หลักการแปรผันในทางไฟฟ้าสถิต

ในภาคผนวก ก ได้กล่าวถึงหลักการแปรผันและความหมายของฟังก์ชันนอล โดยฟังก์ชันทดลอง (trial function) ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าน้อยที่สุดเป็นผลเฉลยของปัญหาการแปรผัน โดยสามารถหาผลเฉลยดังกล่าวได้จากการแก้สมการออยเลอร์-ลากรางโดยตรง หรืออาจหาได้จากวิธีตรงของริทซ์ ซึ่งเป็นวิธีที่สะดวกกว่าในทางปฏิบัติ ในบทนี้ได้กล่าวถึงการนำหลักการแปรผันไปประยุกต์ใช้ในทางไฟฟ้าสถิต โดยเปรียบเทียบกับภาคผนวก ก ให้เห็นว่า ในกรณีของตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ฟังก์ชันนอลและฟังก์ชันทดลองในทางไฟฟ้าสถิตคืออะไร และแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนอลดังกล่าวสามารถนำไปสู่สมการพื้นฐานของปัญหาในแต่ละชนิดของตัวกลาง

2.1 โพลาริเซชันและไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ (Polarization and Induced Dipole Moments)

2.1.1 ไดโพลเหนี่ยวนำ (Induced Dipoles)

เมื่ออะตอมที่มีสภาพเป็นกลางถูกนำไปวางไว้ในสนามไฟฟ้า อิทธิพลของสนามไฟฟ้าทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอน (electron cloud) และนิวเคลียสแยกออกจากกัน โดยจะเกิดสมดุลงี้ต่อเมื่อแรงที่สนามไฟฟ้าทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสแยกออกจากกันมีขนาดเท่ากับแรงที่กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสดึงดูดซึ่งกันและกัน ซึ่งสภาพดังกล่าวอะตอมถูกโพลาริซ์ และเหตุการณ์ดังกล่าวจะทำให้เกิดไดโพลเหนี่ยวนำ (induced dipole) ซึ่งมีทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า [25] ซึ่งเป็นไปตามสมการ

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (2.1)$$

โดย \vec{p} แทนไดโพลโมเมนต์ (dipole moment)

\vec{E} แทนสนามไฟฟ้า

α แทนสภาพโพลาริซ์ของอะตอม (atomic polarizability)

แต่สำหรับโมเลกุลแล้วอาจจะไม่ง่ายเหมือนกับกรณีของอะตอมที่มีสภาพเป็นกลาง เนื่องจากโมเลกุลมีสภาพโพลาไรซ์ในบางทิศมากกว่าทิศอื่น เช่น โมเลกุลของคาร์บอนไดออกไซด์ (CO_2) มีสภาพโพลาไรซ์ (polarizability) $4.5 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ เมื่อเราใส่สนามไฟฟ้าตามแนวแกนของโมเลกุล ในขณะที่เดียวกันถ้าเราใส่สนามไฟฟ้าตั้งฉากกับแกนโมเลกุล พบว่าสภาพโพลาไรซ์จะเท่ากับ $2 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \cdot \text{m/N}$ แต่ถ้าเราใส่สนามไฟฟ้าโดยทำมุมใด ๆ กับแกนของโมเลกุล เราจะต้องแก้ปัญหาโดยแยกคิดสนามไฟฟ้าเป็นส่วนประกอบในแนวขนานและตั้งฉากกับแกนของโมเลกุล และคูณสนามไฟฟ้าแต่ละส่วนประกอบด้วยสภาพโพลาไรซ์ที่เหมาะสมกัน

$$\bar{p} = \alpha_{\perp} \bar{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \bar{E}_{\parallel} \quad (2.2)$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ อาจจะได้มีทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า สำหรับโมเลกุลของคาร์บอนไดออกไซด์ เป็นตัวอย่างที่ง่ายเพราะอะตอมในโมเลกุลของคาร์บอนไดออกไซด์จัดเรียงเป็นเส้นตรง แต่สำหรับโมเลกุลที่มีความไม่สมมาตรโดยสมบูรณ์ (completely asymmetrical molecule) ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างสนามไฟฟ้าและไดโพลโดยทั่วไปจะถูกเขียนอยู่ในรูป

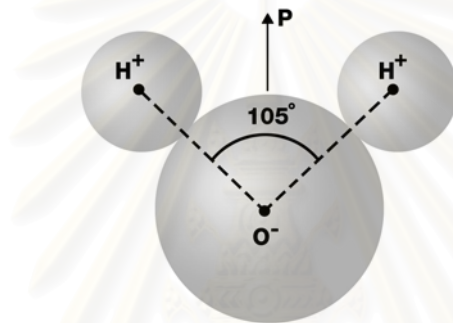
$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

โดยเซตของ α_{ij} ประกอบกันเป็นเทนเซอร์ของสภาพโพลาไรซ์ (polarizability tensor) ซึ่งค่าของสมาชิกต่าง ๆ ในเทนเซอร์ของสภาพโพลาไรซ์จะขึ้นอยู่กับการวางตัวของแกนमुखสำคัญ (principal axis) ที่เราเลือก ซึ่งเราสามารถที่จะเลือกแกนमुखสำคัญที่ทำให้สมาชิกที่ไม่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (off - diagonal element) หายไปเหลือแต่เพียงสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (diagonal element) เท่านั้น

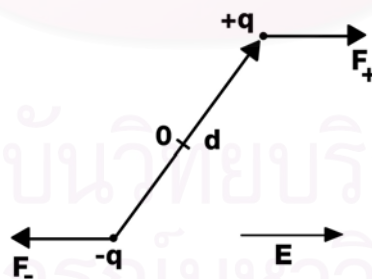
2.1.2 การวางตัวของโมเลกุลมีขั้ว (Alignment of Polar Molecules)

สำหรับอะตอมที่มีสภาพเป็นกลาง จะไม่มีไดโพลโมเมนต์ตั้งแต่ตอนเริ่มต้น แต่จะเกิด

ไดโพลโมเมนต์เหนี่ยวนำ ในขณะที่ใส่สนามไฟฟ้าเข้าไป แต่สำหรับพวกโมเลกุลมีขั้ว (polar molecules) จะมีไดโพลโมเมนต์ถาวร เช่น โมเลกุลของน้ำ (H_2O) ซึ่งจะมีการจับกลุ่มของอิเล็กตรอนรอบอะตอมของออกซิเจน และเนื่องจากโมเลกุลมีการโค้งงอเป็นมุม 105° ซึ่งจะทำให้ประจุลบไปรวมอยู่ที่ยอดหนึ่งและประจุบวกจะไปรวมอยู่ที่อีกยอดหนึ่งที่ตรงกันข้ามกัน ซึ่งจะทำให้เกิดไดโพลโมเมนต์ขึ้น เมื่อโมเลกุลมีขั้วถูกวางอยู่ในสนามไฟฟ้าที่สม่ำเสมอ ถึงแม้ว่าแรงไฟฟ้าบนประจุบวก จะหักล้างอย่างพอดีกับแรงไฟฟ้าบนประจุลบ ทอร์กก็ยังคงเกิดขึ้นอยู่ ซึ่งทอร์กที่เกิดขึ้นทำให้ไดโพลโมเมนต์หมุนอย่างอิสระจนกระทั่งชี้ไปทิศเดียวกับสนามไฟฟ้าที่ใส่เข้ามา แต่ถ้าสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ แรงไฟฟ้าบนประจุบวกจะหักล้างไม่พอดีกับแรงไฟฟ้าบนประจุลบ ซึ่งทำให้เกิดแรงลัพธ์ต่อไดโพลนอกเหนือไปจากทอร์กที่เกิดขึ้นอยู่แล้ว



รูปที่ 2.1 แสดงไดโพลโมเมนต์ของโมเลกุลน้ำ (H_2O)



รูปที่ 2.2 แสดงการเกิดทอร์กบนโมเลกุลมีขั้ว

โดยการที่ไดโพลโมเมนต์จำนวนมากมายชี้ไปทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า เหตุการณ์นี้เรียกว่า วัสดุถูกโพลาไรซ์ และค่าไดโพลโมเมนต์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ถูกเรียกว่า โพลาไรเซชัน \vec{P} (polarization)

2.2 ตัวกลางไดอิเล็กทริก (Dielectric Media)

2.2.1 ตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น (Linear Dielectrics)

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement, \vec{D}) และ โพลาริเซชัน (polarization, \vec{P})

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.4)$$

โดย ϵ_0 แทนสภาพยอมทางไฟฟ้าของสุญญากาศ (permittivity of free space)

สำหรับวัสดุหลายชนิด โพลาริเซชันแปรผันตรงกับสนามไฟฟ้าในกรณีที่สนามไฟฟ้าที่ให้กับวัสดุไม่แรงมากจนเกินไป

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi' \vec{E} \quad (2.5)$$

โดย χ' แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าของตัวกลาง (electric susceptibility) และ ϵ_0 ที่ถูกเติมเข้ามาเพื่อทำให้ χ' ไม่มีหน่วย โดยวัสดุที่เป็นไปตามสมการ (2.5) เรียกว่า ตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น ในกรณีของวัสดุไม่เชิงเส้น สมการ (2.5) จะมีพจน์อื่น ๆ บวกเข้ามา โดยพจน์ที่สอง โพลาริเซชันก็จะเป็นฟังก์ชันของสนามไฟฟ้า \vec{E} ซึ่งสมการ (2.5) อาจพิจารณาว่าเป็นพจน์แรกในการกระจายแบบเทย์เลอร์ของโพลาริเซชันในรูปของสนามไฟฟ้า

สำหรับตัวกลางที่มีสมบัติเหมือนกันหมดทุกทิศทาง ตัวกลางดังกล่าวถูกเรียกว่าเป็นตัวกลางไอโซโทรปิก (isotropic medium) โดยสมการ (2.5) เป็นสมการของตัวกลางชนิดที่เป็นไอโซโทรปิก ในทางตรงกันข้าม สำหรับตัวกลางที่ไม่ไอโซโทรปิก เช่น ผลึก โดยผลึกมีความโพลาริเซชันในแต่ละทิศไม่เท่ากัน ดังนั้นสมการ (2.5) จะถูกแทนด้วยความสัมพันธ์ทั่วไป คือ

$$P_x = \epsilon_0 (\chi'_{xx} E_x + \chi'_{xy} E_y + \chi'_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi'_{yx} E_x + \chi'_{yy} E_y + \chi'_{yz} E_z) \quad (2.6)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi'_{zx} E_x + \chi'_{zy} E_y + \chi'_{zz} E_z)$$

โดยสัมประสิทธิ์ 9 ตัว $\chi'_{xx}, \chi'_{xy}, \dots, \chi'_{zz}$ จะประกอบกันเป็นเทนเซอร์ของสภาพปรับไว้ได้ของตัวกลาง (susceptibility tensor) จะเห็นว่าสมการ (2.5) เป็นกรณีพิเศษของสมการ (2.6) โดยทั่วไปแล้วนักฟิสิกส์มักจะประหยัดคำพูดเวลาที่พูดถึงตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น (linear dielectrics) ซึ่ง ณ ที่นี้จะหมายถึง ตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นที่ไอโซโทรปิก (isotropic linear dielectric) หรือบางทีอาจจะหมายถึง ตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นที่ไอโซโทรปิกและเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous isotropic linear dielectric) [25]

จากสมการ (2.4) และ (2.5) จะได้

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (2.7)$$

โดย $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi')$ แทนค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของตัวกลาง (permittivity of material)

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \text{แทนค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์ของตัวกลางหรือค่าคงที่ไดอิเล็กทริก}$$

(relative permittivity or dielectric constant)

จากสมการ (2.7) จะเห็นว่าสำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น การกระจัดทางไฟฟ้าแปรผันตรงกับสนามไฟฟ้ากำลังหนึ่ง

2.2.2 ตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น (Nonlinear Dielectrics)

จากที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้วว่า กรณีที่ให้สนามไฟฟ้าไม่แรงมากเกินไปกับวัสดุโพลาริเซชันจะแปรผันตรงกับสนามไฟฟ้างสมการ (2.5) ในขณะเดียวกันพบว่าเมื่อให้สนามไฟฟ้าอย่างแรงประมาณ 10^6 V/m หรือมากกว่า กับวัสดุนั้น ๆ ตัวกลางไดอิเล็กทริกจะแสดงความไม่เชิงเส้นออกมา [26] โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างโพลาริเซชันกับสนามไฟฟ้าดังนี้ [24]

$$P_i = \sum_j \chi'_{ij} E_j + \sum_{j,k} d_{ijk} E_j E_k + \sum_{j,k,l} f_{ijkl} E_j E_k E_l \quad (2.8)$$

โดยที่ d_{ijk} และ f_{ijkl} เป็นเทนเซอร์แสดงความไม่เชิงเส้นของตัวกลางในแต่ละพจน์ที่เพิ่มเข้ามา

หมายเหตุ สิ่งที่ใช้แยกตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นและตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น คือ โพลาริเซชันที่เกิดขึ้นในขณะที่ให้สนามไฟฟ้ากับตัวกลางไดอิเล็กทริกนั่นเอง

โดยสมการข้างต้นเป็นความสัมพันธ์ทั่วไประหว่างโพลาริเซชันกับสนามไฟฟ้าของตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นชนิดที่ไม่ไอโซโทรปิก (anisotropic medium) โดยเราสามารถเลือกแกนมุขสำคัญ (principal axis) ที่ทำให้สมาชิกของเทนเซอร์ที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (off – diagonal element) เป็นศูนย์ได้ ในกรณีที่ตัวกลางหรือวัสดุมีสมบัติไอโซโทรปิก เทนเซอร์เหล่านั้นจะมีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม (diagonal element) เท่ากันหมด ซึ่งอาจมองว่าเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งคูณกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยในการคำนวณตอนแก้ปัญหาเราจะพิจารณาว่าเป็นค่าคงที่ค่า ๆ หนึ่งเท่านั้น เนื่องจากสารไดอิเล็กทริกมีสมบัติสมมาตรผกผัน (inversion symmetry) นั่นคือ เมื่อกลับทิศสนามไฟฟ้าโพลาริเซชันก็จะกลับทิศตามด้วยเช่นกัน นั่นคือ $\bar{P}(\bar{E}) = -\bar{P}(-\bar{E})$ ดังนั้นพจน์ที่เป็นกำลังคู่ของขนาดของสนามไฟฟ้าในสมการ (2.8) จึงต้องเป็นศูนย์ [24] ดังนั้นจะได้ว่า

$$\bar{P} = \chi' \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} + \dots \quad (2.9)$$

โดย χ' แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าของตัวกลาง (electric susceptibility)

χ แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear electric susceptibility)

ดังนั้น แทนสมการ (2.9) ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} + \dots \quad (2.10)$$

โดย $\epsilon = \epsilon_0 + \chi'$ แทนค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของตัวกลาง

ในที่นี้ต้องการพิจารณาความไม่เชิงเส้นของสนามไฟฟ้าถึงแค่เพียงกำลังสามของสนามไฟฟ้านั้นคือ

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} \quad (2.11)$$

โดยในกรณีที่ $\chi |\bar{E}|^2 \ll \epsilon$ เป็นกรณีของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างอ่อน (weakly nonlinear dielectrics) ส่วนในกรณีที่ $\chi |\bar{E}|^2 \gg \epsilon$ จนสามารถละพจน์แรกทางขวามือของสมการ (2.11) ได้ หรือ $\bar{D} \cong \chi |\bar{E}|^2 \bar{E}$ เป็นกรณีของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง (strongly nonlinear dielectrics)

2.3 สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริก

2.3.1 สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เริ่มต้นพิจารณาจากสมการแมกซ์เวลล์ โดยตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นเป็นไปตามความสัมพันธ์ของกฎของเกาส์ (Gauss's law)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.12)$$

โดย \mathbf{D} แทนการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement)

ρ_f แทนความหนาแน่นของประจุอิสระเชิงปริมาตร (volume free charge density)

แทนสมการ (2.7) ลงในสมการ (2.12) ได้เป็น

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_f \quad (2.13)$$

จากความสัมพันธ์ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ทำให้สามารถเขียนได้ว่า $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ เพราะฉะนั้นสมการ (2.13) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (2.14)$$

ในที่นี้พิจารณารณกรณีที่ไม่มีประจุอิสระนั่นคือ $\rho_f = 0$ ดังนั้นจากสมการ (2.14) จะได้ว่า

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.15)$$

โดยสมการ (2.15) เรียกว่า สมการของลาปลาซ (Laplace's equation) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานสำหรับปัญหาตัวกลางเชิงเส้น

2.3.2 สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น

ในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เมื่อแทนสมการ (2.11) ลงในสมการแมกซ์เวลล์ (2.12) และพิจารณากรณีที่ไม่มีประจุอิสระ ($\rho_f = 0$) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot (\epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E}) = 0 \quad (2.16)$$

จาก $\bar{E} = -\nabla\phi$ ทำให้เขียนได้ว่า

$$\nabla \cdot [\epsilon (\nabla\phi) + \chi |\nabla\phi|^2 \nabla\phi] = 0 \quad (2.17)$$

นั่นคือ สมการ (2.17) นี้เป็นสมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น โดยสมการดังกล่าวเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation) ซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (closed form solution) ดังนั้นในการแก้ปัญหาดังกล่าว วิธีประมาณต่าง ๆ จึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหา เช่น วิธีเพอร์เทอร์เบชัน [4,5], วิธีเทคนิคการแยก (Decoupling technique) [13,14] วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน [6-9] ซึ่งในแต่ละวิธีก็จะถูกเลือกมาใช้ให้เหมาะสมกับชนิดของปัญหา

2.4 ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผัน

2.4.1 ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผันในตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

จากฟังก์ชันนอลพลังงาน (energy functional) สำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้น [6]

$$W[\phi] = \frac{1}{2} \int_v \epsilon |\nabla\phi|^2 dv \quad (2.18)$$

โดย ϵ แทนค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของตัวกลาง (permittivity of material)

ϕ แทนศักย์ทดลอง (trial potential)

โดยต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนอลพลังงานสำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นตามสมการ (2.18) สามารถนำไปสู่สมการลาปลาซ (Laplace 's equation) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางเชิงเส้น เริ่มจาก

$$|\vec{\nabla}\varphi|^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \quad (2.19)$$

เปรียบเทียบสมการ (2.18) กับสมการ (ก.10) ในภาคผนวก ก จะได้ว่า $W[\varphi]$ ในที่นี้คือ $J[u(x,y,z)]$ และพจน์ที่อยู่ภายในเครื่องหมายอินทิเกรตในสมการ (2.18) คือ $F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)$ นั่นเอง ดังนั้นจึงได้ว่า

$$F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z) = \frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \quad (2.20)$$

$$\text{โดย } u_x = \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

เมื่อนำสมการ (2.20) ไปแทนใน สมการออยเลอร์-ลากราง (ก.17) ได้เป็น

$$-\varepsilon(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$$

$$\text{หรือ} \quad \nabla^2\varphi = 0$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การประยุกต์หลักการแปรผันในการแก้ปัญหาทางไฟฟ้าสถิตนั้นสามารถนำไปสู่สมการลาปลาซ ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางเชิงเส้นเช่นเดียวกับสมการ (2.15)

2.4.2 ฟังก์ชันนอลพลังงานและการประยุกต์หลักการแปรผันในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น

จากฟังก์ชันนอลพลังงานสำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น [6]

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon(x) |\vec{\nabla}\varphi(x)|^2 dv + \frac{1}{4} \int_v \chi(x) |\vec{\nabla}\varphi(x)|^4 dv \quad (2.21)$$

โดย χ แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear electric susceptibility) หรือ เรียกอีกอย่างว่า สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear coefficient)

ทำนองเดียวกัน จะแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนอลพลังงานสำหรับตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นตามสมการ (2.21) สามารถนำไปสู่สมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นตามสมการ (2.17) โดยเมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (2.21) กับสมการ (ก.10) ในภาคผนวก ก จะได้ว่า

$$F(x,y,z,u_x,u_y,u_z) = \frac{1}{2} \varepsilon (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + \frac{1}{4} \chi (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^2 \quad (2.22)$$

$$\text{โดย } u_x = \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

เมื่อนำสมการ (2.22) ไปแทนในสมการออยเลอร์-ลากราง ตามสมการ (ก.17) ได้เป็น

$$\begin{aligned} & \chi \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi_x (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_y (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + \frac{\partial}{\partial z} \varphi_z (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \right] \\ & + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } \nabla \cdot [\varepsilon \nabla \varphi + \chi |\nabla \varphi|^2 \nabla \varphi] = 0 \quad (2.23)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (2.23) นี้เป็นสมการเดียวกับสมการ (2.17) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การประยุกต์หลักการแปรผันในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของกรณีตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น สามารถนำไปสู่สมการพื้นฐานของปัญหาได้เช่นเดียวกัน โดยศักยภาพที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าน้อยที่สุดเป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต ซึ่งในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตโดยใช้วิธีของริทซ์ (ดูในภาคผนวก ก) ศักย์ทดลอง (trial potential) จะถูกเลือกให้สอดคล้องกับลักษณะเงื่อนไขขอบของปัญหาและติดค่าพารามิเตอร์ของการแปรผันที่ไม่ทราบค่าไว้ โดยค่าพารามิเตอร์ของการแปรผันที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าน้อยที่สุดหาได้จากการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนอลพลังงานเทียบกับพารามิเตอร์เหล่านั้น นั่นคือ

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (2.24)$$

โดย α_i แทนพารามิเตอร์ของการแปรผันที่ถูกกำหนดในศักร์ทดลอง

ซึ่งในกรณีที่อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนอลพลังงานเทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผันมีค่ามากกว่าศูนย์ ($\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} > 0$) แสดงว่าฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าต่ำสุด ในทางตรงกันข้ามถ้า

อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนอลพลังงานเทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผัน มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ($\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} < 0$) แสดงว่าฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่ามากที่สุด แต่ถ้าอนุพันธ์อันดับสองของ

ฟังก์ชันนอลพลังงานเทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผัน มีค่าเท่ากับศูนย์ ($\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0$) จะไม่

สามารถระบุได้ว่าฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด และเมื่อนำค่าพารามิเตอร์ของการแปรผันเหล่านั้นกลับไปแทนลงในศักร์ทดลองก็จะได้ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

สภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น

ในบทนี้เป็นการทบทวนปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นที่สถานะคงที่ ซึ่งสมการพื้นฐานที่อธิบายฟิสิกส์ของสารมีรูปแบบคณิตศาสตร์สอดคล้องกับสมการพื้นฐานของสารประกอบไดอิเล็กทริกเชิงเส้นในกรณีที่ไม่มีประจุอิสระ ดังนี้

สารประกอบไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

สารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

โดยที่ \vec{J} แทนความหนาแน่นกระแส (current density)

\vec{E} แทนสนามไฟฟ้า (electric field)

σ แทนสภาพนำไฟฟ้า (electric conductivity)

โดยในบทนี้เป็นการทบทวนทฤษฎีของ Hashin [15] ซึ่งใช้คำนวณสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น ที่ประกอบด้วยตัวกลางต่างชนิดกัน 2 ชนิด (two-phase materials) โดยกล่าวถึงแบบจำลองในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาค่าขอบโดยหาผลเฉลยของสมการลาปลาซโดยตรง พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการคำนวณกับวิธีอื่นคือ วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน เพื่อแสดงให้เห็นว่าการคำนวณโดย 2 วิธีดังกล่าวให้ผลตรงกัน โดยแนวคิดทฤษฎีของ Hashin และวิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานจะถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นในบทที่ 5 ต่อไป

3.1 ลักษณะปัญหาและแบบจำลองของ Hashin

พิจารณาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์

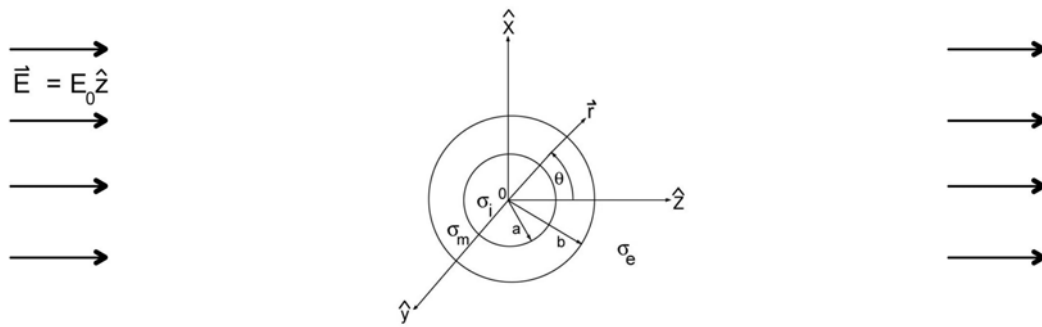
$$\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} \quad (3.1)$$

เนื่องจากต้องการดูการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของสารประกอบ เราจึงให้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก $\bar{\mathbf{E}}_0$ กับชั้นสาร โดยสารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยอนุภาคตัวนำทรงกลม (spherical conducting particle) ที่มีรัศมีค่าต่าง ๆ กัน สภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_i ฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่ง (host medium) ที่มีสภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_m=1-v_i$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิก (homogeneous and isotropic medium)

ในการคำนวณสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ซึ่งใช้อธิบายการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของสารประกอบตามแบบจำลองของ Hashin [15] อนุภาคตัวนำทรงกลมรัศมี a สภาพนำไฟฟ้า σ_i ถูกมองว่าถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่งซึ่งมีรัศมี b สภาพนำไฟฟ้า σ_m โดยอนุภาคตัวนำทรงกลมแต่ละชั้นที่ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางนำไฟฟ้าที่ต่างชนิดกันถูกพิจารณาว่าเป็นเซลล์ ๆ หนึ่ง ซึ่งสัดส่วนโดยปริมาตรของตัวนำทรงกลมต่อเซลล์ (a^3/b^3) มีค่าโดยประมาณเท่ากันสำหรับทุก ๆ เซลล์ และในการนิยามสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบ (effective conductivity) นั้น เซลล์ตัวแทนอันหนึ่ง (representative cell) จะถูกเลือกนำมาพิจารณา และเซลล์อื่น ๆ ที่ล้อมรอบเซลล์ตัวแทนจะถูกแทนที่ด้วยตัวกลางที่เสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous medium) ที่มีสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผล σ_e ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยสำหรับค่า σ_e เป็นปริมาณที่ยังไม่ทราบค่าและถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle = \sigma_e \langle \bar{\mathbf{E}} \rangle = \sigma_e \bar{\mathbf{E}}_0 \quad (3.2)$$

โดยเครื่องหมาย $\langle \rangle$ แทนการเฉลี่ยเชิงปริมาตร (volume average)



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองของ Hashin ซึ่งให้อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางนำไฟฟ้าชนิด σ_m

3.2 การแก้ปัญหาโดยหาผลเฉลยสมการลาปลาซ

จากสมการอนุรักษ์ประจุ (continuity equation)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

พิจารณาที่สถานะคงที่ (steady state) นั่นคือ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ดังนั้นจากสมการ (3.3) จะได้

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.4)$$

แทนสมการ (3.1) ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \quad (3.5)$$

จากสมการพื้นฐานของแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.6)$$

ทำให้สามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (3.7)$$

โดย \vec{E} แทนสนามไฟฟ้า และ φ แทนศักย์ไฟฟ้า

แทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.5) จะทำให้ได้

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.8)$$

ดังนั้น สมการพื้นฐานสำหรับปัญหาตัวกลางนำไฟฟ้าเชิงเส้น คือสมการลาปลาซของศักย์ไฟฟ้า ซึ่ง ณ ที่นี้จะสังเกตได้ว่าสอดคล้องกับกรณีปัญหาตัวกลางไดอิเล็กทริกเชิงเส้นกรณีที่ไม่มีการจุอิสระซึ่งก็มีสมการลาปลาซของศักย์ไฟฟ้าเป็นสมการพื้นฐานของปัญหาเช่นกัน

ในรูปที่ (3.1) เราให้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก \vec{E}_0 กับอนุภาคตัวนำทรงกลม และกำหนดให้แกน z ของพิกัดทรงกลมอยู่ในแนวเดียวกับสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ ดังนั้น ศักย์ไฟฟ้าจะมีความสมมาตรรอบมุมแอสิมัท (azimuthal symmetry) ซึ่งจะได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3.8) จะขึ้นกับพิกัด r และ θ เท่านั้น โดยมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (3.9)$$

พิจารณารูปแบบศักย์ไฟฟ้าในแต่ละตัวกลางจากเงื่อนไขขอบ ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม ($r \rightarrow 0$) ศักย์ไฟฟ้าจะต้องมีค่าจำกัดค่าหนึ่ง ดังนั้น จากสมการ (3.9) สัมประสิทธิ์ $B_n = 0$ ทุกค่าของ n สำหรับศักย์ภายในทรงกลม (φ_i) ในทำนองเดียวกัน ที่ไกลจากทรงกลมมาก ๆ ($r \rightarrow \infty$) ศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับ $-E_0 r \cos \theta + c$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่สามารถที่จะเลือกเป็นศูนย์ได้ โดยไม่มีผลต่อการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า เพราะฉะนั้น $A_1 = -E_0$, $A_n = 0$ เมื่อ $n \geq 2$ สำหรับศักย์ไฟฟ้าภายนอกเซลล์ที่ขอบบริเวณ $r \rightarrow \infty$ เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกที่เราให้กับระบบของสารประกอบขึ้นกับ $\cos \theta$ หรือ $P_1(\cos \theta)$ ดังนั้นจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ บริเวณมีศักย์ไฟฟ้าขึ้นกับ $P_n(\cos \theta)$ โดยจะพิจารณาเฉพาะพจน์อันดับ $n = 1$ เท่านั้น ดังนั้นจะได้ว่า

$$\varphi_i(r, \theta) = A r \cos \theta \quad (3.10)$$

$$\varphi_m(r, \theta) = \left(B r + \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.11)$$

$$\varphi_e(r, \theta) = \left(-E_0 r + \frac{D}{r^2} \right) \cos \theta \quad (3.12)$$

ทำการหาผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในแต่ละตัวกลางจากการพิจารณาเงื่อนไขขอบระหว่างตัวกลาง เพื่อหาค่าคงที่ A, B, C และ D ในสมการข้างต้น

- 1) ส่วนประกอบแนวสัมผัส (tangential component) ของสนามไฟฟ้า E_t ณ บริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองมีค่าต่อเนื่องกัน นั่นคือ $E_{1t} = E_{2t}$ ซึ่งจะได้ว่าศักย์ที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองก็ต่อเนื่องกันด้วย ดังนั้นจากรูปแบบศักย์ไฟฟ้าตามสมการ (3.10) - (3.12) จะได้เป็น

$$\varphi_i(r=a, \theta) = \varphi_m(r=a, \theta) \quad (3.13)$$

$$\varphi_m(r=b, \theta) = \varphi_e(r=b, \theta) \quad (3.14)$$

- 2) ส่วนประกอบในแนวตั้งฉาก (normal component) ของความหนาแน่นกระแส \vec{J} ที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองมีค่าต่อเนื่องกัน นั่นคือ $J_{1n} = J_{2n}$ หรือ $\sigma_1 E_{1r} = \sigma_2 E_{2r}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sigma_i \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right|_{r=a} = \sigma_m \left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (3.15)$$

$$\sigma_m \left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right|_{r=b} = \sigma_e \left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right|_{r=b} \quad (3.16)$$

จากสมการ (3.13) - (3.16) จะได้สมการ (3.17) - (3.20) ตามลำดับ

$$A = B + \frac{C}{a^3} \quad (3.17)$$

$$B + \frac{C}{b^3} = -E_0 + \frac{D}{b^3} \quad (3.18)$$

$$\sigma_i A = \sigma_m \left(B - \frac{2C}{a^3} \right) \quad (3.19)$$

$$\sigma_m \left(B - \frac{2C}{b^3} \right) = -\sigma_e \left(E_0 + \frac{2D}{b^3} \right) \quad (3.20)$$

แทนสมการ (3.17) ลงในสมการ (3.19) จะได้ว่า

$$B = \frac{-pC}{a^3} \quad (3.21)$$

โดยที่ $p = \frac{\sigma_i + 2\sigma_m}{\sigma_i - \sigma_m}$

นำสมการ (3.21) แทนสมการ (3.18) และ (3.20) จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{b^3} - \frac{p}{a^3}\right) C = -E_0 + \frac{D}{b^3} \quad (3.22)$$

$$-\sigma_m \left(\frac{2}{b^3} + \frac{p}{a^3}\right) C = -\sigma_e E_0 - 2\frac{\sigma_e}{b^3} D \quad (3.23)$$

นำ $(-2\sigma_e \times (3.22)) - (3.23)$ จะได้ว่า

$$[(2\sigma_m - 2\sigma_e) c' + (\sigma_m + 2\sigma_e) p] C = 3\sigma_e a^3 E_0 \quad (3.24)$$

โดยที่ $c' = \frac{a^3}{b^3}$ และ $p = \frac{\sigma_i + 2\sigma_m}{\sigma_i - \sigma_m}$

จัดรูปสมการ (3.24) ใหม่จะได้เป็น

$$C = \frac{3\sigma_e (\sigma_i - \sigma_m) a^3 E_0}{\sigma_m^2 \left[2(1 - c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (2c' + 1)\right] + 2\sigma_e \sigma_m \left[(2 + c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (1 - c')\right]} \quad (3.25)$$

นำสมการ (3.25) แทนลงในสมการ (3.21) จะได้

$$B = \frac{-3\sigma_e (\sigma_i + 2\sigma_m) E_0}{\sigma_m^2 \left[2(1 - c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (2c' + 1)\right] + 2\sigma_e \sigma_m \left[(2 + c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (1 - c')\right]} \quad (3.26)$$

จากนั้น นำสมการ (3.25) และ (3.26) แทนลงในสมการ (3.17) จะได้

$$A = \frac{-9 \sigma_e \sigma_m E_0}{\sigma_m^2 [2(1-c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (2c'+1)] + 2\sigma_e \sigma_m [(2+c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} (1-c')]} \quad (3.27)$$

จากสมการ (3.25), (3.26) และ(3.27) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$A = \frac{-9 \kappa E_0}{[2(1-c') + \beta (2c'+1)] + 2 \kappa [(2+c') + \beta(1-c')]} \quad (3.28)$$

$$B = \frac{-3 \kappa (\beta+2) E_0}{[2(1-c') + \beta (2c'+1)] + 2 \kappa [(2+c') + \beta(1-c')]} \quad (3.29)$$

$$C = \frac{3 \kappa (\beta-1) a^3 E_0}{[2(1-c') + \beta (2c'+1)] + 2 \kappa [(2+c') + \beta(1-c')]} \quad (3.30)$$

โดย $c' = \frac{a^3}{b^3}$, $\beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$ และ $\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m}$

จากสมการ (3.28) – (3.30) สังเกตเห็นว่าสัมประสิทธิ์ A, B และ C ถูกเขียนอยู่ในรูปของสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e ซึ่งไม่ทราบค่า ดังนั้น ทำการหาสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e ได้จากสมการ (3.2)

$$\sigma_e E_0 = v_i \sigma_i \langle E_z^{(i)} \rangle + v_m \sigma_m \langle E_z^{(m)} \rangle \quad (3.31)$$

โดยที่ดัชนีล่าง z แทนส่วนประกอบในแนวแกน z ของสนามไฟฟ้า

หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ของสนามไฟฟ้าแต่ละบริเวณมีค่าเป็น ศูนย์

สำหรับวัสดุหรือตัวกลางที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (inhomogeneous medium) ภายใต้เงื่อนไขขอบสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ \vec{E}_0 สนามไฟฟ้าเฉลี่ย ทั้งชั้นสารจะเท่ากับสนามไฟฟ้าที่ให้กับชั้นสารนั้น ๆ [15] นั่นคือ

$$\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_0 \quad (3.32)$$

ดังนั้น จากสมการ (3.32) จะได้ว่า

$$\langle \vec{E}_0 \rangle = v_i \langle \vec{E}_z^{(i)} \rangle + v_m \langle \vec{E}_z^{(m)} \rangle \quad (3.33)$$

ทำการกำจัดพจน์ $\langle \vec{E}_z^{(m)} \rangle$ ในสมการ (3.31) โดยใช้สมการ (3.33) ได้

$$\sigma_e \vec{E}_0 = \sigma_m \vec{E}_0 + v_i (\sigma_i - \sigma_m) \langle \vec{E}_z^{(i)} \rangle \quad (3.34)$$

นั่นคือ ถ้าเรารู้สนามไฟฟ้าเฉลี่ยของตัวกลางเดียว ก็เพียงพอที่จะหาสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e ได้

ทำการหา $\langle \vec{E}_z^{(i)} \rangle$ ซึ่งจะได้

$$\langle \vec{E}_z^{(i)} \rangle = -A \quad (3.35)$$

นำสมการ (3.35) และค่า A ที่ได้จากสมการ (3.28) แทนลงในสมการ (3.34) จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\kappa = 1 + \frac{9 v_i (\beta - 1) \kappa}{[2(1 - c') + \beta (2c' + 1)] + 2 \kappa [(2 + c') + \beta (1 - c')]} \quad (3.36)$$

$$\text{เมื่อ } \kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m}, \beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \text{ และ } c' = \frac{a^3}{b^3}$$

ซึ่ง c' ถูกจำกัดอยู่ในช่วง $c \leq c' \leq 1$ โดยที่ c คือค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของอนุภาคตัวนำทรงกลมทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสาร โดย ณ ที่นี้เห็นได้ว่า c' มีค่าได้มากที่สุดเท่ากับ 1 เนื่องจากรัศมีของเซลล์ตัวแทนเล็กได้มากที่สุดเท่ากับรัศมีของอนุภาคตัวนำทรงกลม ($b=a$) ใน

ขณะเดียวกัน c' มีค่าน้อยที่สุดได้เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของอนุภาคตัวนำทรงกลมทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสารเนื่องจากขณะนี้เรากำลังพิจารณาเซลล์ตัวแทนซึ่งใช้แทนระบบของสารประกอบที่กำลังพิจารณานั้นเอง

ในที่นี่จะพิจารณา 2 กรณีที่ c' มีค่าสูงสุดและต่ำสุด คือ กรณีที่ 1.1 $c' = v_i$ และกรณีที่ 1.2 $c' = 1$ ซึ่งจะได้ว่า

กรณีที่ 1.1 c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของอนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ทั้งหมดที่ฝังในชั้นสาร ($c' = v_i$)

เมื่อแทน $c' = v_i$ ลงในสมการ (3.36) และจัดรูปสมการจะได้เป็น

$$2[(2+v_i) + \beta(1-v_i)] \kappa^2 - [(2-5v_i) + \beta(1+5v_i)] \kappa - [2(1-v_i) + \beta(1+2v_i)] = 0 \quad (3.37)$$

ทำการแก้สมการ (3.37) จะได้รากของ $\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m}$ ที่เป็นทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่เนื่องจากรากของ $\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m}$ ที่เป็นค่าลบผิดความหมายทางฟิสิกส์ ดังนั้นรากที่เป็นค่าบวกจะถูกนำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งจะได้

$$\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m} = \frac{(2 + \beta) + 2(\beta - 1)v_i}{(2 + \beta) + (1 - \beta)v_i} \quad (3.38)$$

เมื่อ $\beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$

ในสมการ (3.38) คือ ผลเฉลยของปัญหากรณีที่ $c' = v_i$

กรณีที่ 1.2 $c' = 1$

เมื่อแทน $c' = 1$ ลงในสมการ (3.36) จะได้

$$\kappa = 1 + \frac{9v_i(\beta - 1)\kappa}{3(\beta + 2\kappa)} \quad (3.39)$$

แทน $\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_m}$ และ $\beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$ ลงในสมการ (3.39) และจัดรูปสมการ จะได้

$$-2\sigma_e^2 + 2\sigma_e\sigma_m - \sigma_e\sigma_i - 2v_i\sigma_e\sigma_m - v_i\sigma_e\sigma_m + 2v_i\sigma_e\sigma_i + v_i\sigma_e\sigma_i + \sigma_i\sigma_m = 0 \quad (3.40)$$

เนื่องจาก $v_i + v_m = 1$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} & -2(v_i+v_m)\sigma_e^2 + 2\sigma_e\sigma_m - \sigma_e\sigma_i - 2(1-v_m)\sigma_e\sigma_m - v_i\sigma_e\sigma_m + 2v_i\sigma_e\sigma_i \\ & + (1-v_m)\sigma_e\sigma_i + (v_i+v_m)\sigma_i\sigma_m = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

จัดรูปสมการ (3.41) จะได้

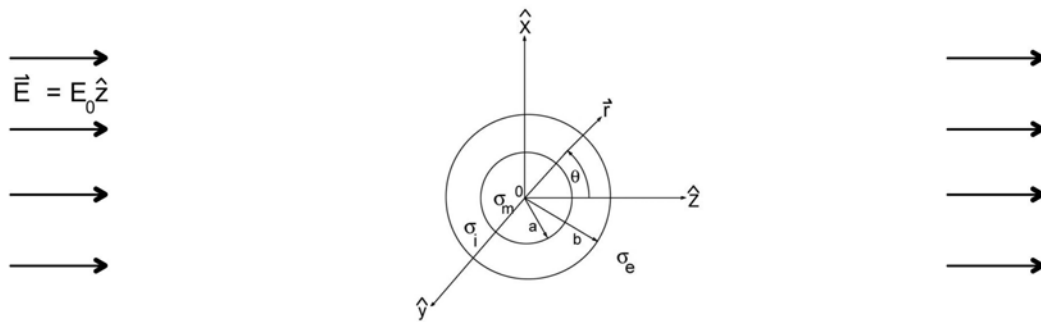
$$v_i(\sigma_i - \sigma_e)(\sigma_m + 2\sigma_e) + v_m(\sigma_m - \sigma_e)(\sigma_i + 2\sigma_e) = 0 \quad (3.42)$$

นำ $(\sigma_i + 2\sigma_e)(\sigma_m + 2\sigma_e)$ หารตลอดสมการ (3.42) จะได้

$$v_i\left(\frac{\sigma_i - \sigma_e}{\sigma_i + 2\sigma_e}\right) + v_m\left(\frac{\sigma_m - \sigma_e}{\sigma_m + 2\sigma_e}\right) = 0 \quad (3.43)$$

โดยสมการ (3.43) นี้คือ ผลเฉลยของปัญหากรณีที่ $c'=1$ ซึ่งสอดคล้องกับผลของ Landauer [16]

สำหรับกรณีตรงข้ามกับที่กล่าวมาแล้วในรูปที่ 3.1 คือ ให้สารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นประกอบไปด้วยอนุภาคตัวนำทรงกลม ที่มีรัศมีค่าต่าง ๆ กันมี สภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_m อัตราส่วนเชิงปริมาตร v_m ฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่ง (host medium) มีสภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_i อัตราส่วนเชิงปริมาตร $v_i = 1 - v_m$ และแก้ปัญหตามแบบจำลองของ Hashin นั่นคืออนุภาคตัวนำทรงกลมที่มีรัศมี a สนามไฟฟ้า σ_m ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่งที่มีรัศมี b สภาพนำไฟฟ้า σ_i โดยทั้งหมดนี้ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางยังผล σ_e และกำหนดให้อัตราส่วนของ a/b สำหรับทุก ๆ อนุภาคตัวนำทรงกลมมีค่าเท่ากันหมด ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงแบบจำลองของ Hashin ซึ่งให้อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางนำไฟฟ้า σ_i

โดยลักษณะของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปที่ 3.2 เหมือนกับที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นตามรูปที่ 3.1 ซึ่งจะได้ผลเฉลยทั่วไปทำนองเดียวกับสมการ (3.36) เพียงแต่สลับค่าระหว่าง σ_i กับ σ_m และ v_i กับ v_m คือ

$$\kappa = 1 + \frac{9 v_m (\beta - 1) \kappa}{[2(1 - c') + \beta(2c' + 1)] + 2\kappa [(2 + c') + \beta(1 - c')]} \quad (3.44)$$

โดยในที่นี้ $\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_i}$, $\beta = \frac{\sigma_m}{\sigma_i}$ และ $c' = \frac{a^3}{b^3}$

ในที่นี้พิจารณาค่า c' ที่สูงสุดและต่ำสุดเช่นกัน คือ กรณีที่ 2.1 c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของอนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ทั้งหมดที่ฝังในชิ้นสาร นั่นคือ $c' = v_m$ และกรณีที่ 2.2 $c' = 1$ ซึ่งจะได้ว่า

กรณีที่ 2.1 c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของอนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ทั้งหมดที่ฝังในชิ้นสาร ($c' = v_m$)

เมื่อแทน $c' = v_m$ ลงในสมการ (3.44) และจัดรูปสมการจะได้เป็น

$$2[(2 + v_m) + \beta(1 - v_m)] \kappa^2 - [(2 - 5v_m) + \beta(1 + 5v_m)] \kappa - [2(1 - v_m) + \beta(1 + 2v_m)] = 0$$

(3.45)

เช่นเดียวกันเมื่อแก้สมการ (3.45) จะได้รากที่เป็นทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่เนื่องจากรากที่เป็นค่าลบไม่มีความหมายทางฟิสิกส์ ดังนั้น รากที่เป็นค่าบวก จะถูกนำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งจะได้

$$\kappa = \frac{\sigma_e}{\sigma_i} = \frac{(2+\beta) + 2(\beta-1)v_m}{(2+\beta) + (1-\beta)v_m} \quad (3.46)$$

โดยในที่นี้ $\beta = \frac{\sigma_m}{\sigma_i}$

โดยสมการ (3.46) นี้คือ ผลเฉลยของปัญหากรณีที่ $c' = v_m$

กรณีที่ 2.2 $c' = 1$

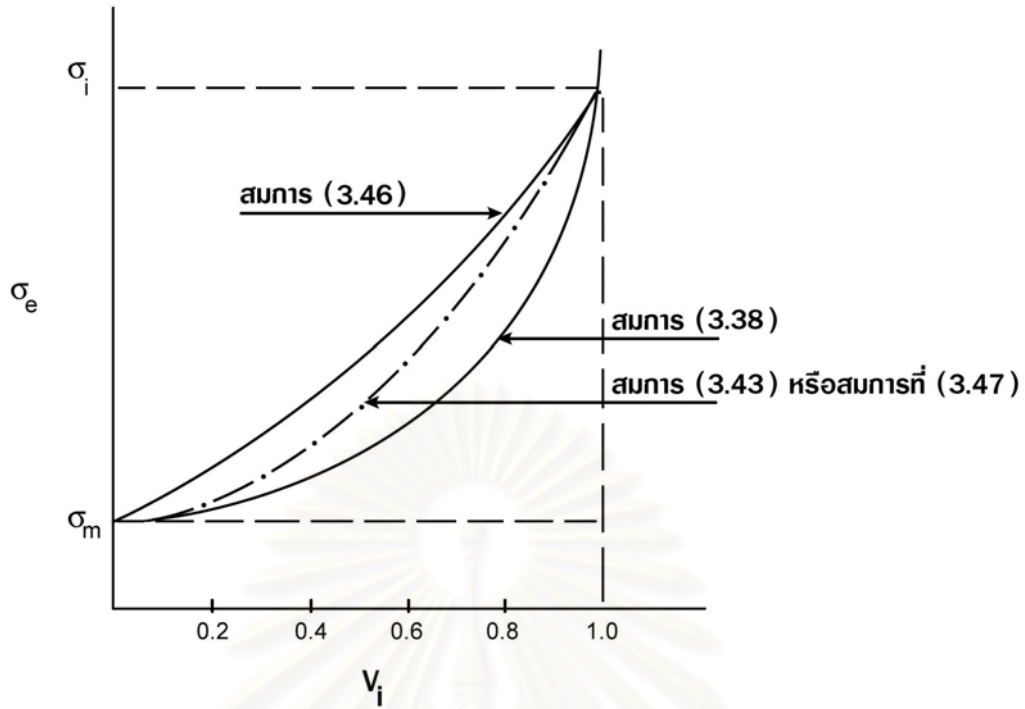
เมื่อแทน $c' = 1$ ลงในสมการ (3.44) และจัดรูปสมการจะได้

$$v_m \left(\frac{\sigma_m - \sigma_e}{\sigma_m + 2\sigma_e} \right) + v_i \left(\frac{\sigma_i - \sigma_e}{\sigma_i + 2\sigma_e} \right) = 0 \quad (3.47)$$

จะเห็นว่าสมการ (3.47) และสมการ (3.43) เหมือนกัน โดยเป็นการสลับที่ระหว่าง v_i กับ v_m และ σ_i กับ σ_m นั่นเอง ทั้งที่ในการคำนวณเริ่มจากรูปแบบจำลองรูปที่ 3.2 และ 3.1 ตามลำดับ นั่นคือผลเฉลยของปัญหาทั้ง 2 กรณี เมื่อ $c' = 1$ จะมาพ้องกันหรือประจวบกัน (coincide) ซึ่งจะอธิบายให้เข้าใจมากยิ่งขึ้นในหัวข้อถัดไป

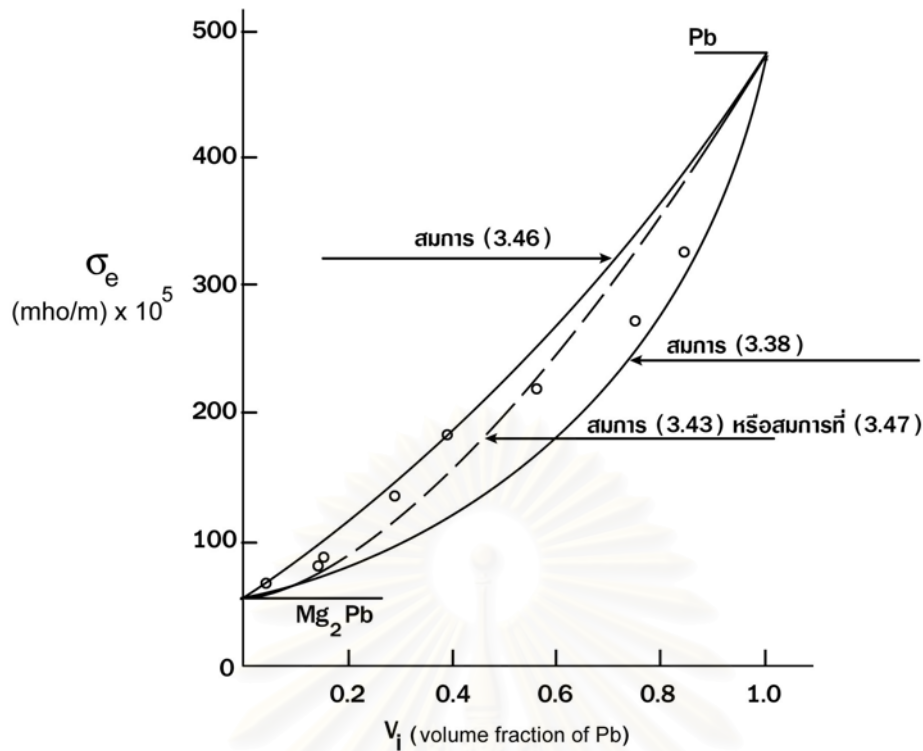
3.3 วิเคราะห์และสรุปผลการคำนวณ

เมื่อนำสมการ (3.38), (3.43), (3.46) และ (3.47) มาเขียนกราฟระหว่างค่าสภาพนำไฟฟ้า ยังผล σ_e กับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารตัวนำชนิด σ_i แทนด้วย v_i ได้รูปที่ (3.3)



รูปที่ 3.3 แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e [15]

จากรูปที่ (3.3) ได้กำหนดให้ $\sigma_i > \sigma_m$ โดยในกรณีที่ 1.1 เมื่ออนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลาง σ_m และกำหนดให้ $c' = v_i$ ผลการคำนวณได้เส้นที่เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของค่าสภาพนำไฟฟ้ายังผล ในขณะที่ กรณีที่ 2.1 เมื่ออนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลาง σ_i และกำหนดให้ $c' = v_m$ ผลการคำนวณได้เส้นที่เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของค่าสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e นอกจากนี้เมื่อเขียนกราฟของสมการ (3.43) และ (3.47) ได้เส้นกราฟ 2 เส้นที่ทับกันพอดี ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นที่เป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ สภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_e โดยสามารถอธิบายได้ว่า สำหรับเส้นขอบเขตบนหรือเส้นที่ได้จากสมการ (3.46) หากเปลี่ยนแปลงค่า c' ที่น้อยกว่าจากค่า $c' = v_m$ ไปสู่ค่า $c' = 1$ จะได้เส้นดังกล่าวลู่ต่ำลงมาอยู่ตรงกลางระหว่างค่าเส้นขอบเขตบนและเส้นขอบเขตล่าง ในทำนองเดียวกัน สำหรับเส้นขอบเขตล่าง หรือเส้นที่ได้จากสมการ (3.38) หากทำการเปลี่ยนแปลงค่า c' ที่น้อยกว่าจากค่า $c' = v_i$ ไปสู่ค่า $c' = 1$ เส้นดังกล่าวจะลู่ขึ้นมาอยู่ตรงกลางระหว่างเส้นขอบเขตบนและเส้นขอบเขตล่าง โดยซ้อนทับกับเส้นที่ได้จากสมการ (3.47) พอดี ซึ่งเส้นที่ได้จากสมการ (3.43) หรือ (3.47) นี้ สอดคล้องกับผลการคำนวณของ Landauer [16] ซึ่งแก้ปัญหาตามแบบจำลองของ Bruggeman ในกรณีสารประกอบที่มีส่วนประกอบต่างชนิดคละกันอย่างสม่ำเสมอจนไม่สามารถระบุได้ว่า สารใดเป็นสารฝังกระจาย (inclusion) สารใดเป็นตัวกลาง (host medium) นั่นคือ สารฝังกระจายเป็นไปได้ทั้ง σ_i และ σ_m นั่นเอง (statistically symmetrical components)



รูปที่ 3.4 แสดงผลการคำนวณทางทฤษฎี และผลทางการทดลองของค่าสภาพนำไฟฟ้าของสารประกอบ $Mg_2Pb - Pb$ [17]

จากรูปที่ (3.4) [15] แสดงผลทางทฤษฎีและผลการทดลองของค่าสภาพนำไฟฟ้าของสารประกอบ $Mg_2Pb - Pb$ โดยผลการทดลอง [17] แทนด้วยสัญลักษณ์วงกลม (o) จากกราฟจะเห็นได้ว่า ผลการทดลองจะอยู่ระหว่างเส้นขอบเขตบน (3.46) และเส้นขอบเขตล่าง (3.38) โดยเส้นประตรงกลางแทนผลการคำนวณทางทฤษฎีของ Landauer [16] ซึ่ง Hashin [15] ได้สรุปและวิเคราะห์ไว้ว่า “ ผลการทดลองทั้งหมดไม่สามารถถูกแทนได้เป็นอย่างดีด้วยผลการคำนวณทางทฤษฎีของ Landauer หรือผลการคำนวณทางทฤษฎีตามสมการ (3.37) และ (3.45) เนื่องจากค่าแม่นยำ (rigorous value) ของสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบขึ้นอยู่กับการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบไม่ใช่แค่เพียงสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจาย (inclusion) ในชิ้นสาร ถึงกระนั้นก็ตามผลการคำนวณทางทฤษฎีตามสมการ (3.38) และ (3.46) ก็ยังเป็นขอบเขตที่ดีที่สุดที่เป็นไปได้สำหรับค่าสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผลที่มีการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบเป็นแบบใด ๆ นอกจากนี้ยังสามารถคาดการณ์ผลการทดลองได้ว่า ในกรณีที่อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ฝังอยู่ในตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่งที่มีสภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_m ผลการทดลองควรอยู่ระหว่างเส้นประ (3.43) และเส้นขอบเขตล่าง (3.38) ในทำนองเดียวกันกรณีที่อนุภาคตัวนำทรงกลม σ_m ฝังอยู่ในตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่งซึ่งมีสภาพนำไฟฟ้า σ_i ผลการทดลองควรอยู่ระหว่างเส้นประ (3.43) และเส้นขอบเขตบน (3.46) โดยถ้าผลการทดลองมีข้อมูล

จำนวนมากจะทำให้สามารถหาพารามิเตอร์ c' ที่เป็นตัวแทนของผลการทดลอง (fitting parameter) ได้ “

3.4 การแก้ปัญหาโดยวิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน

จากหัวข้อที่ 3.2 เราได้หาค่าศักย์ไฟฟ้าโดยหาผลเฉลยของสมการลาปลาซของศักย์โดยตรง ร่วมกับเงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อของตัวนำต่างชนิดกัน ในหัวข้อนี้ เราหาผลเฉลยของสมการลาปลาซโดยใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานตามแนวคิดของริทซ์ ซึ่งรายละเอียดของการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHEMATICA ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข และจะเปรียบเทียบให้เห็นว่าการคำนวณโดยสองวิธีดังกล่าวให้ผลตรงกัน

เริ่มต้นจากสมการฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น [6]

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int_V \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \, dv \quad (3.48)$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi$ และ φ แทนศักย์ทดลอง

ในการแก้ปัญหาเริ่มต้นจากการเลือกศักย์ทดลองในแต่ละบริเวณของตัวกลาง โดยในที่นี้จะเลือกศักย์ทดลองที่มีรูปแบบคณิตศาสตร์สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการลาปลาซ และเงื่อนไขขอบของปัญหา นั่นคือ

$$\varphi_i(r, \theta) = -c E_0 r \cos\theta \quad , 0 < r < a \quad (3.49)$$

$$\varphi_m(r, \theta) = -E_0 \left(f r - g \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta \quad , a < r < b \quad (3.50)$$

$$\varphi_e(r, \theta) = -E_0 \left(r - d \frac{b^3}{r^2} \right) \cos\theta \quad , r > b \quad (3.51)$$

โดย φ_i , φ_m และ φ_e แทนศักย์ทดลองบริเวณอนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ตัวกลางนำไฟฟ้า σ_m ที่ล้อมรอบอนุภาคตัวนำทรงกลม และตัวกลางยังผล σ_e ตามลำดับ จากสมการ (3.49) – (3.51) จะเห็นว่ามีพารามิเตอร์ของการแปรผัน 4 ค่า คือ c , f , g , และ d ที่ผันค่าไปเพื่อทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบมีค่าสุดขีด (extremum) และเพื่อสะดวกในการคำนวณ ทำการ

ลดพารามิเตอร์โดยใช้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองต่อเนื่อง ดังสมการ (3.13) และ (3.14) จะได้

$$c = f - g \quad (3.52)$$

$$d = 1 - f + g c' \quad (3.53)$$

โดยที่ $c' = \frac{a^3}{b^3}$

เนื่องจาก $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ และ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ ดังนั้น จากสมการ (3.48) จะได้

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \left[\int_{v_i} \sigma_i (\vec{\nabla}\varphi_i)^2 dv + \int_{v_m} \sigma_m (\vec{\nabla}\varphi_m)^2 dv + \int_{v_e} \sigma_e (\vec{\nabla}\varphi_e)^2 dv \right] + W_s \quad (3.54)$$

โดยพจน์ W_s คือพลังงานที่พื้นผิว (surface energy term) ซึ่งถูกนำเข้ามาพิจารณาด้วย เนื่องจากในการอินทิเกรตครอบคลุมปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ แต่มีค่าจำกัด (finite) และเงื่อนไขขอบที่ศักย์ไม่ทำให้ผลการอินทิเกรตของพจน์พลังงานที่พื้นผิวเป็นศูนย์ [27]

ทำการหาเกรเดียนท์ของศักย์ทดลองในแต่ละตัวกลางในสมการ (3.49) – (3.51) ซึ่งจะได้

$$\vec{\nabla}\varphi_i = -c E_0 [\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}] \quad (3.55)$$

$$\vec{\nabla}\varphi_m = -E_0 \left[\left(f + 2g \frac{a^3}{r^3} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(f - g \frac{a^3}{r^3} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right] \quad (3.56)$$

$$\vec{\nabla}\varphi_e = -E_0 \left[\left(1 + 2d \frac{b^3}{r^3} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 - d \frac{b^3}{r^3} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right] \quad (3.57)$$

นำสมการ (3.55) – (3.57) แทนลงในสมการ (3.54) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} E_0^2 \left[\frac{4}{3} \pi a^3 \epsilon_i c^2 + \epsilon_m \left(-\frac{4}{3} \pi a^3 f^2 + \frac{4}{3} \pi b^3 f^2 - \frac{8}{3} \pi \frac{a^6}{b^3} g^2 + \frac{8}{3} \pi a^3 g^2 \right) \right. \\ \left. + \epsilon_e \left(-\frac{8}{3} \pi \frac{b^6}{R^3} d^2 - \frac{4}{3} \pi b^3 + \frac{8}{3} \pi b^3 d^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 \right) + W_s \right] \quad (3.58)$$

เนื่องจากปริมาตรของตัวกลางยังผลใหญ่กว่าปริมาตรของตัวกลางนำไฟฟ้า σ_m มาก ๆ ($R \gg b$) ดังนั้นจะได้ว่า

$$W[\phi] \cong E_0^2 V [p \epsilon_i c^2 + p \epsilon_m (-f^2 + \frac{f^2}{c'} - 2c'g^2 + 2g^2) + p \epsilon_e (-\frac{1}{c'} + \frac{2d^2}{c'}) + \epsilon_e] + 2W_s \quad (3.59)$$

โดย $p = \frac{a^3}{R^3}$, $c' = \frac{a^3}{b^3}$

แทนพจน์พลังงานที่พื้นผิว $W_s = E_0^2 V p \epsilon_e \frac{d}{c'}$ ซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในโครงการการเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์ของ ยอดชาย จอมพล [27] จะได้

$$W[\phi] = E_0^2 V [p \epsilon_i c^2 + p \epsilon_m (-f^2 + \frac{f^2}{c'} - 2c'g^2 + 2g^2) + p \epsilon_e (-\frac{1}{c'} + \frac{2d}{c'} + \frac{2d^2}{c'}) + \epsilon_e] \quad (3.60)$$

กำจัดพารามิเตอร์ c และ d โดยใช้สมการ (3.52) และ (3.53) แทนลงในสมการ (3.60) หาค่า f และ g ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสุดขีด (extremum) ได้จากความสัมพัทธ์

$$\frac{\partial W}{\partial f} = p [2\sigma_i (f - g) + \sigma_m (-2f + \frac{2f}{c'}) + \sigma_e (-\frac{6}{c'} + \frac{4f}{c'} - 4g)] = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial W}{\partial g} = p [-2\sigma_i (f - g) + \sigma_m (4g - 4c'g) + \sigma_e (6 - 4f + 4c'g)] = 0 \quad (3.62)$$

ทำการแก้สมการ (3.61) และ (3.62) จะได้

$$f = \frac{3 \sigma_e (\sigma_i + 2\sigma_m)}{2\sigma_e \sigma_i + 4\sigma_e \sigma_m + \sigma_i \sigma_m + 2\sigma_m^2 - 2\sigma_e \sigma_i c' + 2\sigma_e \sigma_m c' + 2\sigma_i \sigma_m c' - 2\sigma_m^2 c'} \quad (3.63)$$

$$g = \frac{3\sigma_e(\sigma_i - \sigma_m)}{2\sigma_e\sigma_i + 4\sigma_e\sigma_m + \sigma_i\sigma_m + 2\sigma_m^2 - 2\sigma_e\sigma_i c' + 2\sigma_e\sigma_m c' + 2\sigma_i\sigma_m c' - 2\sigma_m^2 c'} \quad (3.64)$$

จัดรูปสมการ (3.63) และ (3.64) ใหม่จะได้เป็น

$$f = \frac{3\sigma_e(\sigma_i + 2\sigma_m)}{\sigma_m^2[2(1 - c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(2c' + 1)] + 2\sigma_e\sigma_m[(2 + c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(1 - c')]} \quad (3.65)$$

$$g = \frac{3\sigma_e(\sigma_i - \sigma_m)}{\sigma_m^2[2(1 - c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(2c' + 1)] + 2\sigma_e\sigma_m[(2 + c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(1 - c')]} \quad (3.66)$$

นำสมการ (3.65) และ (3.66) แทนลงในสมการ (3.52) จะได้

$$c = \frac{9\sigma_e\sigma_m}{\sigma_m^2[2(1 - c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(2c' + 1)] + 2\sigma_e\sigma_m[(2 + c') + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}(1 - c')]} \quad (3.67)$$

เมื่อนำค่า c , f และ g จากสมการ (3.65) – (3.67) แทนลงในศักยภาพทดลองในสมการ (3.49) – (3.51) จะได้ผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในแต่ละบริเวณของตัวกลางตรงกับผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าที่ได้จากการแก้ปัญหาโดยหาผลเฉลยจากสมการลาปลาซโดยตรง ซึ่งรายละเอียดแสดงการเทียบค่า c , f , และ g ได้แสดงไว้ในโครงการการเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์ของยอดชาย จอมพล [27] ทั้งนี้สังเกตว่าพารามิเตอร์ c , f และ g ถูกเขียนอยู่ในรูปสภาวะนำไฟฟ้ายังผล σ_e ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (3.2) ทำนองเดียวกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้นดังในหัวข้อที่ (3.2)

ดังนั้น ในบทนี้สามารถสรุปได้ว่า สำหรับสารประกอบใด ๆ ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของตัวกลางยังผลของสารประกอบสามารถหาได้จากแบบจำลองของ Hashin ในการแก้ปัญหา อีกทั้งในการคำนวณโดยหาผลเฉลยของสมการลาปลาซโดยตรงกับวิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานให้ผลเฉลยของปัญหาที่ตรงกัน โดยในกรณีของปัญหาตัวกลางไม่เชิงเส้น วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานจะถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดในบทถัดไป

สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง

สารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นที่มีส่วนประกอบที่คละกันอย่างสุ่มนั้นคือ ไม่มี ส่วนประกอบใดฝังอยู่ในอีกส่วนประกอบหนึ่งอย่างเด่นชัด แต่ส่วนประกอบทั้งสองกระจายอย่าง สุ่มร่วมกัน ถูกนำมาศึกษาโดย Landauer [16] ซึ่งใช้แบบจำลองของ Bruggeman ในการ แก้ปัญหา ในบทนี้เป็นผลงานวิจัยที่ได้ขยายผลการศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นที่มี ค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของส่วนประกอบอย่างเบาบาง (dilute – limite composites) [9] ไปสู่กรณี สารประกอบที่มีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรเป็นค่าใด ๆ ตามแนวคิดของ Lee และ Yu [10,11] โดย งานวิจัยนี้ ได้ศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่มีส่วนประกอบที่คละกันอย่าง สุ่มโดยใช้แบบจำลองของ Bruggeman [12] ในการแก้ปัญหา ซึ่งแบบจำลองของ Bruggeman เป็นกรณีพิเศษของการคำนวณโดยการแก้ปัญหาตามแบบจำลองของ Hashin [15] คือกรณีที่ $c' = 1$ (ดูรายละเอียดในหัวข้อ 3.1) โดยในการคำนวณใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน พร้อมทั้งปรับปรุงผลการคำนวณให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์และ พารามิเตอร์ของการแปรผันในศักราชทดลอง

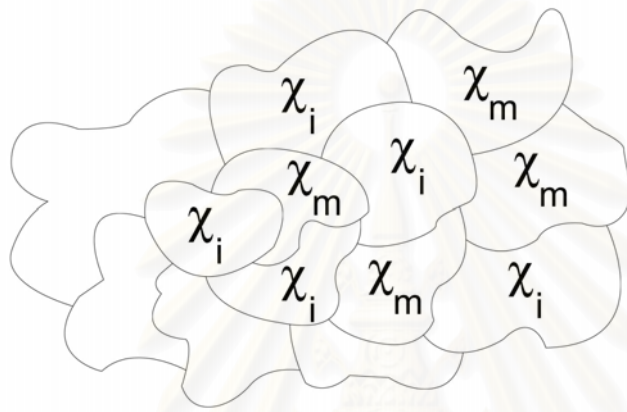
4.1 ลักษณะปัญหาและการประมาณตัวกลางยังผลของ Bruggeman

พิจารณาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\bar{D} = \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} \quad (4.1)$$

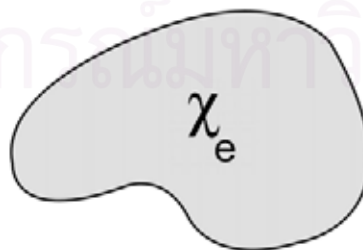
โดยที่ \bar{D} แทนการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement)
 \bar{E} แทนสนามไฟฟ้า (electric field)
 χ แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้น (nonlinear electric susceptibility) หรือ เรียกอีกอย่างว่า สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear coefficient)

ถูกวางอยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยสารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_i อัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i และไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_m อัตราส่วนเชิงปริมาตร $v_m = 1 - v_i$ โดยส่วนประกอบทั้งสองต่างฝังกระจายอย่างสุ่มร่วมกัน และสารแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิก (homogeneous and isotropic medium) ดังรูปที่ 4.1



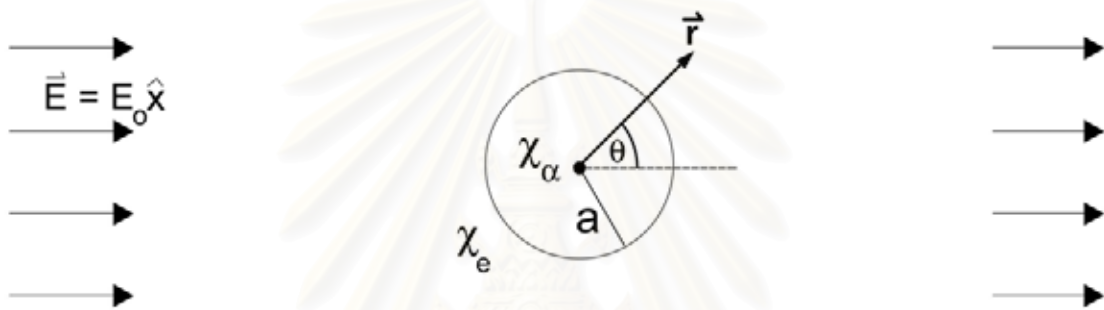
รูปที่ 4.1 แสดงภาคตัดขวางของสารประกอบที่มีส่วนประกอบ 2 ชนิดที่ต่างกัน (two – component composites) [18]

ในการนิยามสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบเป็น χ_e (effective nonlinear coefficient) สารประกอบทั้งชิ้นถูกมองเป็นเนื้อเดียวกันและถูกแทนด้วยสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลเป็น χ_e ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงการนิยามสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

ในการแก้ปัญหาตามแบบจำลองของ Bruggeman พิจารณาส่วนประกอบแต่ละชั้นที่ประกอบรวมกันจนเป็นสารประกอบดังรูปที่ 4.1 มีลักษณะเป็นเส้นใยยาวและประมาณให้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกยาวรัศมี a ซึ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับรัศมีของชั้นสารและมีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลางแต่ละชนิดเป็น χ_α ($\alpha = i, m$ ซึ่ง i และ m แทนแต่ละชนิดของส่วนประกอบของสารประกอบ) โดยที่แต่ละชั้นของส่วนประกอบไม่ได้ฝังอยู่ในสิ่งแวดล้อมจริง ๆ ของมัน แต่ให้ฝังอยู่ในตัวกลางยังผลที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น χ_e และมีปริมาตรใหญ่กว่ามาก ๆ โดยสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอถูกให้ในแนวตั้งฉากกับแกนทรงกระบอกซึ่งมีความยาวมากเมื่อเทียบกับรัศมี a พอที่จะพิจารณาปัญหาเป็นแบบสองมิติดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงแบบจำลองของ Bruggeman ในการประมาณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ [18]

จากรูปที่ 4.3 นี้เป็นการพิจารณาปัญหาทั้ง 2 กรณีไปพร้อมกัน เนื่องจากลักษณะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เหมือนกัน โดยกรณีที่ 1 ได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i ฝังกระจายอยู่ในตัวกลางยังผล χ_e และกรณีที่ 2 ได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m ฝังอยู่ในตัวกลางยังผล χ_e และในการประมาณตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม เอ (effective medium approximation, EMA) ตามแบบจำลองของ Bruggeman จะใช้เงื่อนไขที่แสดงความสอดคล้องในตัวมันเอง (self - consistency condition) โดยเงื่อนไขกล่าวว่า “ ค่าเฉลี่ยเชิงปริมาตรของสนามไฟฟ้าเฉพาะที่ (local electric field) จะเท่ากับสนามไฟฟ้าที่ให้กับชั้นสารนั้น ๆ “ ซึ่ง เป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\langle \vec{E}_\alpha \rangle = \vec{E}_0 \quad (4.2)$$

เครื่องหมาย $\langle \rangle$ แทนการเฉลี่ยเชิงปริมาตร (volume average) และ α เป็นดัชนีซึ่งแสดงตัวกลางแต่ละชนิด

4.2 อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (simple EMA)

ในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตได้เลือกใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยเริ่มต้นจากสมการฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง จากสมการ (2.21) [6]

$$W[\varphi] = \frac{1}{4} \int \chi \left| \nabla \varphi \right|^4 dv \quad (4.3)$$

ในการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน หรือ อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (simple EMA) เริ่มต้นจากการเลือกศักย์ทดลองแบบง่ายในแต่ละบริเวณของตัวกลาง โดย ณ ที่นี้ศักย์ทดลองที่เลือกให้เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซของกรณีปัญหาตัวกลางเชิงเส้นในระบบปิดทรงกระบอก เนื่องจากศักย์ทดลองที่เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบของปัญหา (ดูรายละเอียดการแก้ปัญหาการแปรผันโดยวิธีตรงของริทซ์ ในภาคผนวก ก) นั่นคือ

$$\varphi_\alpha(r, \theta) = -c_\alpha E_0 r \cos \theta, \quad r < a \quad (4.4)$$

$$\varphi_e(r, \theta) = -E_0 \left(r - b_\alpha \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad r > a \quad (4.5)$$

โดย φ_α และ φ_e แทนศักย์ทดลองของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_α ($\alpha = i, m$) และตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e ตามลำดับ จากสมการ (4.4) และ (4.5) จะเห็นว่ามีพารามิเตอร์ของการแปรผัน 2 ค่าคือ b_α และ c_α ที่ผันค่าไปเพื่อทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบมีค่าสุดขีด (extremum) และเพื่อสะดวกในการคำนวณ ทำการลดพารามิเตอร์โดยใช้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองต้องต่อเนื่องจากความสัมพันธ์

$$\varphi_\alpha(r = a, \theta) = \varphi_e(r = a, \theta) \quad (4.6)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.6) จะได้

$$c_\alpha = 1 - b_\alpha \quad (4.7)$$

จากสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$W[\varphi] = \frac{1}{4} \left[\int_{V_\alpha} \chi_\alpha |\bar{\nabla} \varphi_\alpha|^4 dv + \int_{V_e} \chi_e |\bar{\nabla} \varphi_e|^4 dv \right] + W_s \quad (4.8)$$

โดยพจน์ W_s คือพลังงานที่พื้นผิว (surface energy) ซึ่งถูกนำมาพิจารณาในการแก้ปัญหาด้วย เนื่องจากในการอินทิเกรตตลอดปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ แต่มีค่าจำกัด (finite) และเงื่อนไขขอบที่ค้ำยันไม่ทำให้ผลการอินทิเกรตของพจน์พลังงานที่พื้นผิวเป็นศูนย์ [27] ดังได้กล่าวในหัวข้อ 3.4

ทำการหาเกรเดียนท์ของศักย์ทดลองในแต่ละตัวกลางในสมการ (4.4) และ (4.5) ซึ่งจะได้

$$\bar{\nabla} \varphi_\alpha = -c_\alpha E_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \quad (4.9)$$

$$\bar{\nabla} \varphi_e = -E_0 \left[\left(1 + b_\alpha \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(1 - b_\alpha \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \hat{\theta} \right] \quad (4.10)$$

นำสมการ (4.9) และ (4.10) แทนลงในสมการ (4.8) ดังนั้นจะได้

$$W_\alpha[\varphi] = \frac{1}{4} E_0^4 \left[\chi_\alpha \pi a^2 c_\alpha^4 + \chi_e \left(-\frac{1}{3} b_\alpha^4 \pi \frac{a^8}{R^6} - 4b_\alpha^2 \pi \frac{a^4}{R^2} - \pi a^2 + 4b_\alpha^2 \pi a^2 + \frac{1}{3} b_\alpha^4 \pi a^2 + \pi R^2 \right) \right] + W_s \quad (4.11)$$

เนื่องจากปริมาตรของตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผลใหญ่กว่าปริมาตรของไดอิเล็กทริกทรงกระบอกรูปไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_α มาก ๆ ($R \gg a$) ดังนั้นจากสมการ (4.11) สามารถประมาณได้เป็น

$$W[\varphi] \cong \frac{1}{4} E_0^4 \left[\chi_\alpha \pi a^2 c_\alpha^4 + \chi_e \left(-\pi a^2 + 4b_\alpha^2 \pi a^2 + \frac{1}{3} b_\alpha^4 \pi a^2 + \pi R^2 \right) \right] + W_s$$

$$= \frac{1}{4} E_0^4 \Omega \left[v_\alpha \chi_\alpha c_\alpha^4 + v_e \chi_e \left(-1 + 4b_\alpha^2 + \frac{1}{3} b_\alpha^4 \right) + \chi_e \right] + W_s \quad (4.12)$$

เมื่อ $\Omega = \pi R^2$ โดยที่ $v_\alpha = \frac{\pi a^2}{\Omega}$ แทนอัตราส่วนเชิงปริมาตรของไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_α ที่ฝังในตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e แทนพจน์พลังงานที่พื้นผิว [6] $W_s = E_0^4 \Omega v_\alpha \chi_e b_\alpha$ ลงในสมการ (4.12) จะได้

$$W[\varphi] = \frac{1}{4} E_0^4 \Omega [v_\alpha \chi_\alpha c_\alpha^4 + v_\alpha \chi_e (-1 + 4b_\alpha + 4b_\alpha^2 + \frac{1}{3} b_\alpha^4) + \chi_e] \quad (4.13)$$

กำจัดพารามิเตอร์ c_α โดยใช้สมการ (4.7) แทนลงในสมการ (4.13) และหาค่า b_α ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสุดขีด (extremum) ได้จากความสัมพันธ์ $\frac{\partial W}{\partial b_\alpha} = 0$ ซึ่งจะได้

$$-4(1 - b_\alpha)^3 \chi_\alpha + \chi_e (4 + 8b_\alpha + \frac{4}{3} b_\alpha^3) = 0 \quad (4.14)$$

จัดรูปสมการ (4.14) ใหม่จะได้

$$(1 + 3y_\alpha) b_\alpha^3 - 9y_\alpha b_\alpha^2 + 3(2 + 3y_\alpha) b_\alpha + 3(1 - y_\alpha) = 0 \quad (4.15)$$

$$\text{โดย } y_\alpha = \frac{\chi_\alpha}{\chi_e}$$

ทำการแก้สมการ (4.15) เพื่อหารากจริงของ b_α ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของ y_α จะได้

$$b_\alpha(y_\alpha) = \frac{3y_\alpha}{1+3y_\alpha} - \frac{2^{1/3}(18+81y_\alpha)}{3(1+3y_\alpha)(-81-891y_\alpha-2430y_\alpha^2+27(1+3y_\alpha)\sqrt{41+384y_\alpha+900y_\alpha^2})^{1/3}} + \frac{(-81-891y_\alpha-2430y_\alpha^2+27(1+3y_\alpha)\sqrt{41+384y_\alpha+900y_\alpha^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}(1+3y_\alpha)} \quad (4.16)$$

ทำการหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล χ_e จากเงื่อนไขที่แสดงความสอดคล้องในตัวเอง (self – consistency condition) ดังสมการ (4.2) จะได้ว่า

$$v_i \langle E_x^{(i)} \rangle + (1-v_i) \langle E_x^{(m)} \rangle = E_0 \quad (4.17)$$

โดยเครื่องหมาย $\langle \rangle$ แทนการเฉลี่ยเชิงปริมาตร และดัชนี x แทนส่วนประกอบในแนวแกน x ของสนามไฟฟ้า

หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของส่วนประกอบในแนวแกน y และ z ของสนามไฟฟ้าแต่ละบริเวณมีค่าเป็นศูนย์

โดยค่าเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าเฉพาะที่ (local electric field) ของตัวกลางไม่เชิงเส้นอย่างแรงชนิด α สามารถหาได้จากสมการที่ (4.9) ซึ่งจะได้

$$\langle E_x^{(\alpha)} \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_x^{(\alpha)}) r dr d\theta$$

หรือ $\langle E_x^{(\alpha)} \rangle = c_\alpha E_0 \quad (4.18)$

แทนสมการ (4.18) และ (4.7) ลงในสมการ (4.17) จะได้

$$v_i b_i(y_i) + (1-v_i) b_m(y_m) = 0 \quad (4.19)$$

ทำการกำหนดตัวแปรใหม่ โดยกำหนดให้

$$y_i = \frac{\chi_i}{\chi_e} = \frac{\chi_i}{\chi_m} \frac{\chi_m}{\chi_e} = \frac{y}{x}$$

$$\text{และ} \quad y_m = \frac{\chi_m}{\chi_e} = \frac{1}{x}$$

$$\text{เมื่อ} \quad y = \frac{\chi_i}{\chi_m} \quad \text{และ} \quad x = \frac{\chi_e}{\chi_m}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (4.19) จะได้

$$v_i b_i \left(\frac{y}{x}\right) + (1-v_i) b_m \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (4.20)$$

เนื่องจากสมการที่ (4.20) เป็นสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งไม่สามารถแก้สมการเพื่อหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลสัมพัทธ์ $x = \chi_e / \chi_m$ ที่แสดงผลในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (closed form) ดังนั้นการคำนวณเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาโดย ณ ที่นี้เลือกใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica ช่วยในการคำนวณ ซึ่งในส่วนของโปรแกรมแสดงอยู่ในภาคผนวก ค1

4.3 อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง (improved EMA)

จากการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน หรือ อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (simple EMA) ด้วยศักย์ทดลองแบบง่ายตามสมการ (4.4) และ(4.5) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซของกรณีปัญหาตัวกลางเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยศักย์ทดลองดังกล่าวเป็นผลเฉลยของปัญหาตัวกลางไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ค่อนข้างไม่สมบูรณ์ เพื่อให้การประมาณตัวกลางยังผลและผลเฉลยของปัญหาตัวกลางไม่เชิงเส้นอย่างแรงมีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น จึงทำการเลือกศักย์ทดลองใหม่โดยเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันมากยิ่งขึ้นในฟังก์ชันศักย์ทดลองเดิม โดยการประมาณตัวกลางยังผลแบบปรับปรุง หรือ อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง (improved EMA) เริ่มต้นจากการเลือกศักย์ทดลองแบบปรับปรุงที่ได้จากการสังเกตผลเฉลยของปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าไม่เชิงเส้นอย่างอ่อน [4] โดยศักย์ทดลองที่เลือกจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ นั่นคือ $\varphi_a(r, \theta)$ จะต้องมีค่าจำกัดเมื่อ r เข้าใกล้ศูนย์ และ $\varphi_e(r, \theta)$ มีค่า $E_0 r \cos\theta$ เมื่อ r เข้าสู่ค่าอนันต์ นอกจากนี้ ยังต้องสอดคล้องกับความสมมาตรของปัญหาตามรูปที่ 4.3 นั่นคือ เมื่อให้สนามไฟฟ้ากับสารไดอิเล็กทริก ประจุโพลาไรซ์ที่ผิว (surface polarized charge) ที่เกิดขึ้น ณ ค่ามุม $\theta = 0$ และค่ามุม $\theta = \pi$ จะต้องมีค่าของประจุโพลาไรซ์ที่มีขนาดเท่ากันและมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกัน ดังนั้นศักย์ทดลองใหม่ที่เลือกขึ้นมาจึงมีได้แต่เพียงเฉพาะพจน์ $\cos n\theta$ เมื่อ n เป็นเลขคี่เท่านั้น นั่นคือ

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(r, \theta) = E_0 [& (c_{11}^\alpha r + c_{13}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{15}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) \cos\theta + (c_{31}^\alpha r + c_{33}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{35}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) \cos 3\theta \\ & + (c_{51}^\alpha r + c_{53}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{55}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) \cos 5\theta], \quad 0 < r < a \quad (4.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r, \theta) = E_0 [& (r \cos\theta + (b_{11}^\alpha \frac{a^2}{r} + b_{13}^\alpha \frac{a^4}{r^3} + b_{15}^\alpha \frac{a^6}{r^5}) \cos\theta \\ & + (b_{31}^\alpha \frac{a^2}{r} + b_{33}^\alpha \frac{a^4}{r^3} + b_{35}^\alpha \frac{a^6}{r^5}) \cos 3\theta \\ & + (b_{51}^\alpha \frac{a^2}{r} + b_{53}^\alpha \frac{a^4}{r^3} + b_{55}^\alpha \frac{a^6}{r^5}) \cos 5\theta], \quad r > a \quad (4.22) \end{aligned}$$

โดย φ_α และ φ_e แทนศักย์ทดลองของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_α ($\alpha = i, m$) และของตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e ตามลำดับ

จากสมการ (4.21) และ (4.22) จะเห็นว่ามีพารามิเตอร์ของการแปรผัน 18 ค่า คือ $c_{11}^\alpha, c_{13}^\alpha, c_{15}^\alpha, \dots, b_{53}^\alpha, b_{55}^\alpha$ โดยการผันค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นไปเพื่อให้ฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบตามสมการ (4.8) มีค่าสุดขีด (extremum) และเพื่อให้ง่ายขึ้นในการคำนวณ ทำการลดพารามิเตอร์โดยใช้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางต้องต่อเนื่องตามความสัมพันธ์ (4.6) จะได้

$$c_{11}^\alpha + c_{13}^\alpha + c_{15}^\alpha = 1 + b_{11}^\alpha + b_{13}^\alpha + b_{15}^\alpha \quad (4.23)$$

$$c_{31}^\alpha + c_{33}^\alpha + c_{35}^\alpha = b_{31}^\alpha + b_{33}^\alpha + b_{35}^\alpha \quad (4.24)$$

$$c_{51}^\alpha + c_{53}^\alpha + c_{55}^\alpha = b_{51}^\alpha + b_{53}^\alpha + b_{55}^\alpha \quad (4.25)$$

ทำการหาเกรเดียนท์ของศักย์ทดลองในแต่ละตัวกลางในสมการ (4.21) และ (4.22) ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \vec{E}_\alpha = \vec{\nabla} \varphi_\alpha = E_0 [\hat{r} \{ & (c_{11}^\alpha + 3c_{13}^\alpha \frac{r^2}{a^2} + 5c_{15}^\alpha \frac{r^4}{a^4}) \cos\theta + (c_{31}^\alpha + 3c_{33}^\alpha \frac{r^2}{a^2} + 5c_{35}^\alpha \frac{r^4}{a^4}) \cos 3\theta \\ & + (c_{51}^\alpha + 3c_{53}^\alpha \frac{r^2}{a^2} + 5c_{55}^\alpha \frac{r^4}{a^4}) \cos 5\theta \} + \frac{\hat{\theta}}{r} \{ (c_{11}^\alpha r + c_{13}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{15}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) (-\sin\theta) \\ & + (c_{31}^\alpha r + c_{33}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{35}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) (-3\sin 3\theta) + (c_{51}^\alpha r + c_{53}^\alpha \frac{r^3}{a^2} + c_{55}^\alpha \frac{r^5}{a^4}) (-5\sin 5\theta) \}] \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_e = \vec{\nabla} \varphi_e = E_0 [\hat{r} \{ & 1 - b_{11}^\alpha \frac{a^2}{r^2} - 3b_{13}^\alpha \frac{a^4}{r^4} - 5b_{15}^\alpha \frac{a^6}{r^6} \} \cos\theta \\ & + (-b_{31}^\alpha \frac{a^2}{r^2} - 3b_{33}^\alpha \frac{a^4}{r^4} - 5b_{35}^\alpha \frac{a^6}{r^6}) \cos 3\theta + (-b_{51}^\alpha \frac{a^2}{r^2} - 3b_{53}^\alpha \frac{a^4}{r^4} - 5b_{55}^\alpha \frac{a^6}{r^6}) \cos 5\theta \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hat{\theta}}{r} \left\{ (r + b_{11}^{\alpha} \frac{a^2}{r} + b_{13}^{\alpha} \frac{a^4}{r^3} + b_{15}^{\alpha} \frac{a^6}{r^5}) (-\sin\theta) \right. \\
& + (b_{31}^{\alpha} \frac{a^2}{r} + b_{33}^{\alpha} \frac{a^4}{r^3} + b_{35}^{\alpha} \frac{a^6}{r^5}) (-3\sin 3\theta) \\
& \left. + (b_{51}^{\alpha} \frac{a^2}{r} + b_{53}^{\alpha} \frac{a^4}{r^3} + b_{55}^{\alpha} \frac{a^6}{r^5}) (-5\sin 5\theta) \right\} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

นำสมการ (4.26) กับ (4.27) และพจน์พลังงานที่พื้นผิว [6] $W_s = -E_0^4 \Omega v_{\alpha} \chi_e b_{11}^{\alpha}$ แทนลงในสมการ (4.8) จะได้

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}[\varphi] = E_0^4 \Omega [\chi_e + v_{\alpha} \chi_e \{ -1 - 4b_{11}^{\alpha} + 4(b_{11}^{\alpha})^2 + \frac{1}{3}(b_{11}^{\alpha})^4 + \dots \} \\
+ v_{\alpha} \chi_{\alpha} \{ (c_{11}^{\alpha})^4 + 4(c_{11}^{\alpha})^3 c_{13}^{\alpha} + \frac{28}{3}(c_{11}^{\alpha})^2 (c_{13}^{\alpha})^2 + \dots \}] \quad (4.28)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\Omega = \pi R^2$, $v_{\alpha} = \frac{\pi a^2}{\Omega}$ โดยที่ v_{α} แทนอัตราส่วนเชิงปริมาตรของไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรงชนิด χ_{α} ที่ฝังในตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e จัดรูปสมการ (4.28) ใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}[\varphi] = E_0^4 \Omega \chi_{\alpha} [y'_{\alpha} + v_{\alpha} y'_{\alpha} \{ -1 - 4b_{11}^{\alpha} + 4(b_{11}^{\alpha})^2 + \frac{1}{3}(b_{11}^{\alpha})^4 + \dots \} \\
+ v_{\alpha} \{ (c_{11}^{\alpha})^4 + 4(c_{11}^{\alpha})^3 c_{13}^{\alpha} + \frac{28}{3}(c_{11}^{\alpha})^2 (c_{13}^{\alpha})^2 + \dots \}] \quad (4.29)
\end{aligned}$$

โดย $y'_{\alpha} = \frac{\chi_e}{\chi_{\alpha}}$

เพื่อให้สะดวกในการคำนวณมากยิ่งขึ้น ทำการกำจัดพารามิเตอร์ c_{11}^{α} , c_{31}^{α} และ c_{51}^{α} โดยใช้สมการ (4.23) – (4.25) ดังนั้นจากสมการ (4.30) จะทำให้ได้ฟังก์ชันนอลพลังงานที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ของการแปรผัน b_{11}^{α} , b_{13}^{α} , b_{15}^{α} , b_{31}^{α} , b_{33}^{α} , b_{35}^{α} , b_{51}^{α} , b_{53}^{α} , b_{55}^{α} , c_{13}^{α} , c_{15}^{α} , c_{33}^{α} , c_{35}^{α} , c_{53}^{α} และ c_{55}^{α} ทำการหาพารามิเตอร์ของการแปรผันที่ทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสุดขีด (extremum) ได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอลพลังงานเทียบกับพารามิเตอร์เหล่านั้น

$$\frac{\partial W}{\partial b_{11}^{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial b_{13}^{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial b_{15}^{\alpha}} = 0, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial c_{53}^{\alpha}} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial W}{\partial c_{55}^{\alpha}} = 0 \quad (4.30)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.30) เราจะได้สมการคู่ควบ (couple equation) 15 สมการที่จะต้องแก้สำหรับ ตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงชนิด α ($\alpha = i, m$) โดยพารามิเตอร์ $b_{11}^\alpha, b_{13}^\alpha, \dots, c_{53}^\alpha$ และ c_{55}^α ที่ได้จากการแก้สมการคู่ควบตามสมการ (4.30) จะเป็นฟังก์ชันของ $y'_\alpha = \chi_e / \chi_\alpha$ แต่เนื่องจากสมการคู่ควบเหล่านี้เป็นสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนมาก ซึ่งไม่สามารถแก้สมการเพื่อหาพารามิเตอร์ที่แสดงผลในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (closed form) ของ y'_α ได้ จาก $y'_\alpha = \chi_e / \chi_\alpha$ ($\alpha=i, m$) ทำการกำหนดตัวแปรใหม่ จะได้ว่า

$$y'_i = \frac{\chi_e}{\chi_i} = \frac{\chi_e}{\chi_m} \frac{\chi_m}{\chi_i} = \frac{x}{y}$$

$$y'_m = \frac{\chi_e}{\chi_m} = x$$

$$\text{โดย } y = \frac{\chi_i}{\chi_m} \text{ และ } x = \frac{\chi_e}{\chi_m}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.30) เราจะได้ 30 สมการคู่ควบ ในที่นี้จะทำการคำนวณเชิงตัวเลขโดย กำหนดค่า $y = \frac{\chi_i}{\chi_m}$ แล้วหาค่า $x = \frac{\chi_e}{\chi_m}$ เนื่องจากเรามี 30 สมการคู่ควบ แต่มี 31 ตัวแปร คือ $b_{11}^\alpha, b_{13}^\alpha, \dots, c_{53}^\alpha, c_{55}^\alpha$ และ x ($\alpha = i, m$) เพราะฉะนั้นเราจะใช้เงื่อนไขที่แสดงความสอดคล้องในตัวมันเอง (self - consistency condition) จากสมการ (4.2) มาช่วยลดตัวแปร โดยทำการหาค่าเฉลี่ยเชิงปริมาตรของสนามไฟฟ้าเฉพาะที่ (local electric field) ของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างชนิด α นั่นคือ

$$\langle E_x^{(\omega)} \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_x^{(\omega)}) r dr d\theta$$

ซึ่งจะได้

$$\langle E_x^{(\omega)} \rangle = (c_{11}^\alpha + c_{13}^\alpha + c_{15}^\alpha) E_0 \quad (4.31)$$

หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของส่วนประกอบในแนวแกน y และ z ของสนามไฟฟ้าแต่ละบริเวณมีค่าเป็นศูนย์

นำสมการ (4.31) แทนลงในสมการ (4.17) จะได้

$$v_i(c_{11}^i + c_{13}^i + c_{15}^i) + (1-v_i)(c_{11}^m + c_{13}^m + c_{15}^m) = 1 \quad (4.32)$$

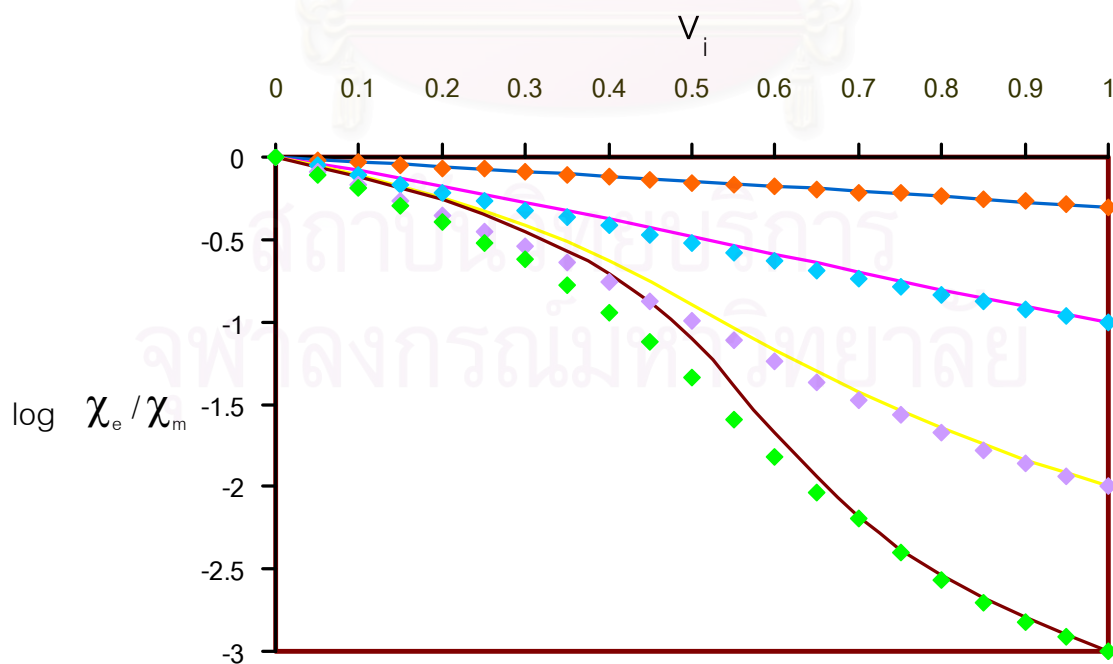
นำสมการ (4.23) แทนลงในสมการ (4.32) จะได้

$$v_i(1 + b_{11}^i + b_{13}^i + b_{15}^i) + (1-v_i)(1 + b_{11}^m + b_{13}^m + b_{15}^m) = 1 \quad (4.33)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.30) และ (4.33) เรามีสมการคู่ควบ 31 สมการ 31 ตัวแปร ซึ่งสามารถแก้ปัญหาโดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขได้ โดย ณ ที่นี้เลือกใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica ช่วยในการคำนวณ ซึ่งในส่วนของโปรแกรมแสดงอยู่ในภาคผนวก ค2

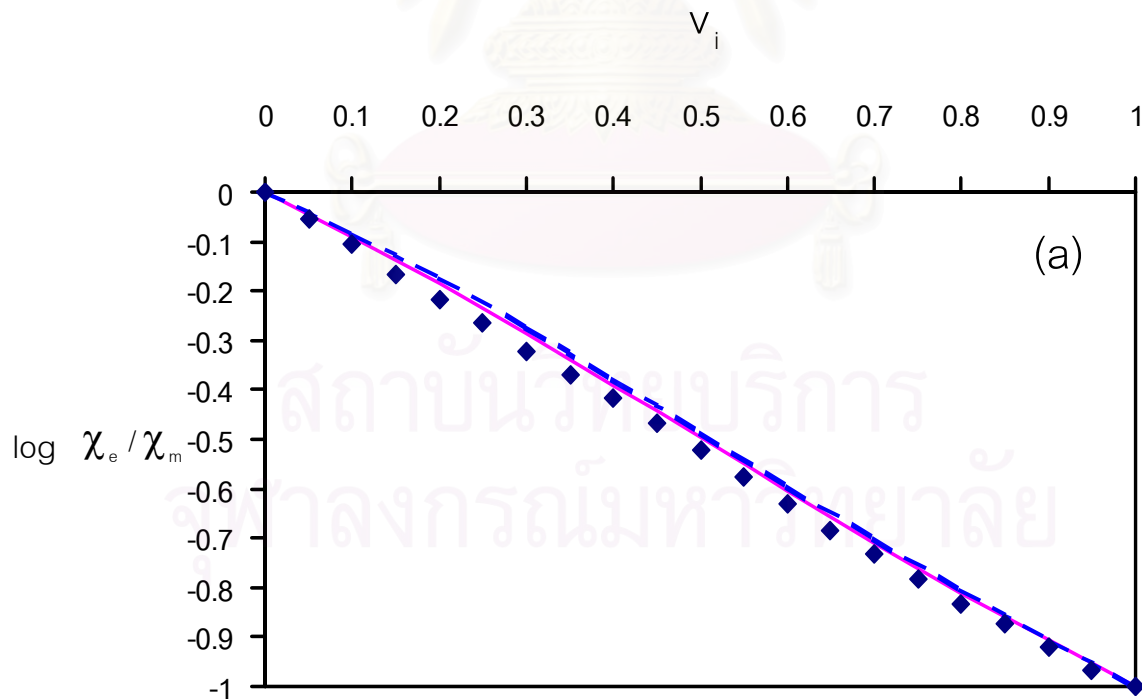
4.4 สรุปและวิเคราะห์ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

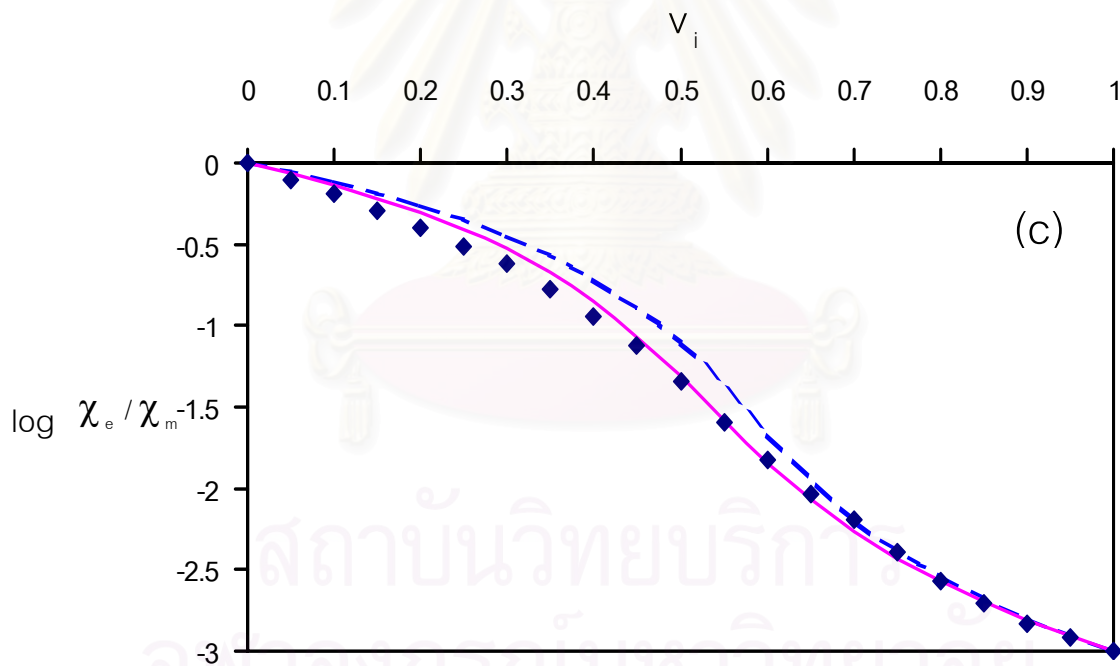
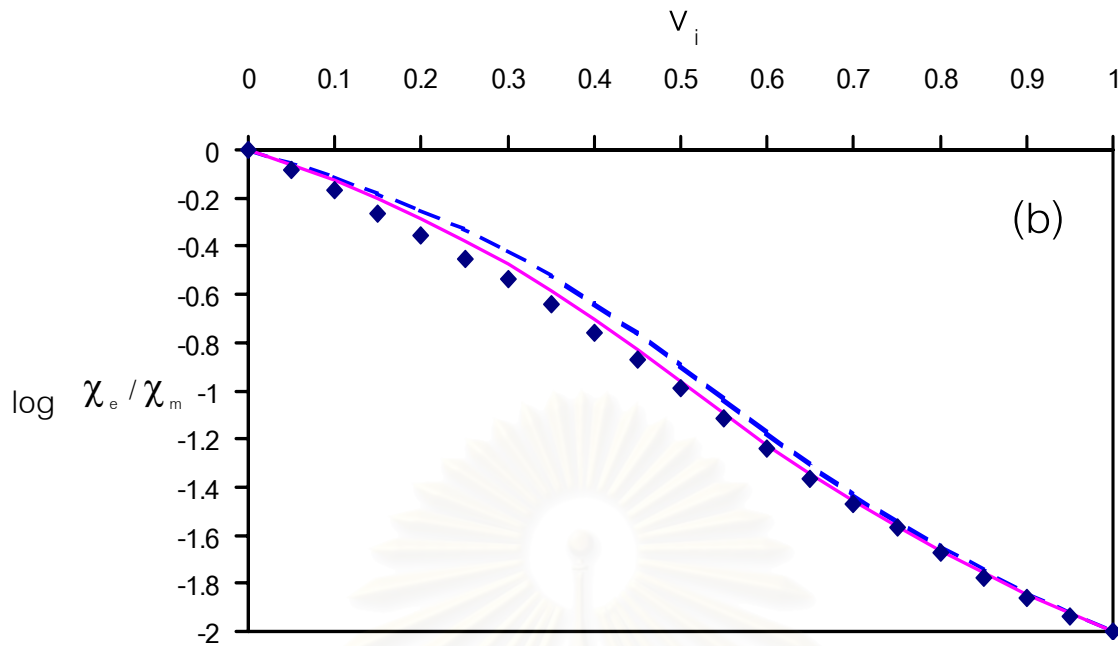
ในหัวข้อนี้ เป็นการแสดงผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง โดยวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน หรือ อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (simple EMA) ด้วยศักร์ทดลองแบบง่าย และการประมาณตัวกลางยังผลแบบปรับปรุง หรือ อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง (improved EMA) ด้วยศักร์ทดลองที่ได้รับการปรับปรุง โดยการเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผัน โดยใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการคำนวณ



รูปที่ 4.4 แสดงค่า χ_e / χ_m กับอัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i ของวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน (—) และผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (o) เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบ $\frac{\chi_i}{\chi_m} = 0.5, 0.1, 0.01$ และ 0.001 โดยลำดับจากเส้นบนสุดไปหาเส้นล่างสุดตามลำดับ

จากรูปที่ 4.4 จะเห็นได้ว่า สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลสัมพัทธ์ $x = \chi_e / \chi_m$ ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน (simple EMA) ให้ผลสอดคล้องอย่างดีเยี่ยมกับผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) [19,20] ทุก ๆ ค่าอัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i เมื่อสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันไม่มาก ($y = \frac{\chi_i}{\chi_m} \geq 0.1$) ในขณะที่สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลสัมพัทธ์ $x = \chi_e / \chi_m$ ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐานให้ผลที่สอดคล้องกับผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลขเมื่อสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($y = \frac{\chi_i}{\chi_m} \leq 0.01$)





รูปที่ 4.5 (a), (b) และ (c) แสดงค่า χ_e / χ_m กับอัตราส่วนเชิงปริมาตร v_i ของวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน หรือ อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (---) การประมาณตัวกลางยังผลแบบปรับปรุง หรือ อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง (—) และผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (v) เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบในรูป (a) $\chi_i / \chi_m = 0.1$, (b) $\chi_i / \chi_m = 0.01$, (c) $\chi_i / \chi_m = 0.001$

รูปที่ 4.5 แสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลสัมพัทธ์ $x = \chi_e / \chi_m$ ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบปรับปรุง (improved EMA) ให้ผลที่ดีกว่าการคำนวณโดยวิธีการประมาณตัวกลางยังผลแบบพื้นฐาน (simple EMA) เมื่อถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) โดยเฉพาะเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก $\frac{\chi_i}{\chi_m} = 0.01, 0.001$

ของเหลว	ผลการทดลอง		ผลการคำนวณเชิงทฤษฎี $\chi_{\text{eff}}^{(3)} / \chi_{\text{fluid}}^{(3)}$
	$\chi_{\text{glass}}^{(3)} / \chi_{\text{fluid}}^{(3)}$	$\chi_{\text{eff}}^{(3)} / \chi_{\text{fluid}}^{(3)}$	
เมทานอล	0.62	0.80	0.750
คาร์บอนเตตระคลอไรด์	0.32	0.51	0.51
คาร์บอนไดซัลไฟด์	0.00	0.25	0.231
ไดโอไอโดมีเทน	0.03	0.20	0.222

ตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม (third – order nonlinear susceptibility, $\chi^{(3)}$) ของสารประกอบเชิงแสงไม่เชิงเส้น (nonlinear optical composite materials) ระหว่างผลการทดลอง และผลการคำนวณเชิงทฤษฎีตามแนวคิดของ Bruggeman [21]

เนื่องจากสารประกอบเชิงแสง (optical composite materials) จัดว่าเป็นสารประกอบไดอิเล็กทริกชนิดหนึ่ง และมีผู้ทำการทดลองในทางทัศนศาสตร์ได้นำการประมาณตัวกลางยังผลตามแบบจำลองของ Bruggeman ไปทำนายค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม (third – order nonlinear susceptibility, $\chi^{(3)}$) ของสารประกอบแก้วพรุนเชิงแสงไม่เชิงเส้น [21] (nonlinear optical porous – glass – based composite materials) ซึ่งสารประกอบดังกล่าวถูกเตรียมโดยการนำ Corning Vycor glass ซึ่งเป็นแก้วพรุนที่มีช่องว่างประมาณ 28 เปอร์เซ็นต์ของปริมาตร และมีเส้นผ่านศูนย์กลางของรูโดยประมาณ 4 นาโนเมตร มาทำความสะอาดโดยการนำไปแช่ในสารละลายไฮโดรเจนเปอร์ออกไซด์ที่มีความเข้มข้น 30 เปอร์เซ็นต์ และให้ความร้อนกับแก้วประมาณ 100 องศาเซลเซียส หลังจากนั้น Vycor glass ถูกนำไปล้างด้วยน้ำที่ถูทำให้ไม่มีไอออน (deionized water) และถูกนำไปอบให้แห้งภายใต้อุณหภูมิห้อง อุณหภูมิของ

เตาอบจะถูกเพิ่มอย่างช้า ๆ จากอุณหภูมิห้องไปจนถึง 100 องศาเซลเซียส ด้วยอัตรา 1 องศาเซลเซียส ต่อ 1 นาที เพื่อให้ทำให้น้ำออกจากแก้วโดยปราศจากการทำให้แก้วเสียหาย หลังจากนั้นสารตัวอย่าง (sample) จะถูกอบ ณ อุณหภูมินี้เป็นเวลา 1 ชั่วโมง และอุณหภูมิจะถูกเพิ่มไปถูกไปสู่ 300 องศาเซลเซียสทันที และแก้วจะถูกอบ ณ อุณหภูมินี้เป็นเวลา 2 – 3 ชั่วโมง หลังจากนั้นสิ่งตัวอย่างจะถูกทำให้เย็นและถูกนำลงไปยังจุ่มในของเหลวไม่เชิงเส้น (nonlinear fluid) ทันทีเพื่อหลีกเลี่ยงการปนเปื้อนจากสิ่งอื่น โดยแก้วจะดูดของเหลวอย่างรวดเร็วและจะอิมตัวอย่างสมบูรณ์ภายในหลายนาทีหลังจากการจุ่ม โดยปริมาตรของรูพรุนในแก้วถูกแทนที่ด้วยปริมาตรของของเหลว

จากตารางที่ 4.1 เป็นการวัดค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม ($\chi_{\text{eff}}^{(3)}$) ของสารประกอบแก้วพอร์ซิงแสงไม่เชิงเส้นที่ต่างชนิดกัน โดยสารประกอบแก้วพอร์ซิงแสงไม่เชิงเส้นที่ต่างชนิดกัน ถูกเตรียมโดยการเปลี่ยนชนิดของของเหลวที่แสดงในคอลัมน์ที่สอง และผลของการวัดค่า $\chi_{\text{eff}}^{(3)}$ ถูกแสดงในคอลัมน์ที่สาม จะเห็นได้ว่าผลการทำนายค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับสาม $\chi_{\text{eff}}^{(3)}$ ของสารประกอบในเชิงทฤษฎีตามแบบจำลองของ Bruggeman ให้ผลที่สอดคล้องอย่างดีและใกล้เคียงกับผลการทดลอง ซึ่งผลเหล่านี้มีส่วนสำคัญในการยืนยันว่าการประมาณตัวกลางยังผลตามแบบจำลองของ Bruggeman เป็นไปได้ที่จะทำนายการสร้างสารประกอบเชิงแสงไม่เชิงเส้นที่มีการตอบสนองไม่เชิงเส้นเพิ่มมากขึ้นโดยการเลือกส่วนประกอบที่เหมาะสม ซึ่งถูกนำมาใช้ในการสร้างสารประกอบเชิงแสงที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงการทำงานของอุปกรณ์โฟโตนิก (photonic device)

บทที่ 5

ทฤษฎีตัวกลางยังผลของสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง

ในบทนี้เป็นงานวิจัยของวิทยานิพนธ์เรื่องนี้ที่ได้ขยายงานวิจัยของ Lee และ Yu [10,11] ดังได้กล่าวในรายละเอียดไว้ในบทที่ 4 ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น โดยเนื้อหาในบทนี้เป็น การศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่มีค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของ ส่วนประกอบเป็นค่าใด ๆ โดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม ที (effective medium theory, EMT) ตามแบบจำลองของ Hashin [15] ซึ่งได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 3 แก้ปัญหา โดย ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบตามแบบจำลองของ Bruggeman ซึ่งได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 4 เป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของการคำนวณค่า สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบตามแบบจำลองของ Hashin คือ กรณีที่ $c' = 1$ จึงทำให้ผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบตาม แบบจำลอง Hashin ที่ได้ คลอบคลุมกรณีที่คำนวณโดยใช้แบบจำลองของ Bruggeman แก้ปัญหา และจากผลการคำนวณทำให้ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น ยังผลของสารประกอบ โดยในการคำนวณเลือกใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน พร้อมทั้ง ปรับปรุงผลการคำนวณให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของ การแปรผันในศักราชทดลอง

5.1 ลักษณะปัญหาและแบบจำลองของ Hashin

พิจารณาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\bar{D} = \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} \quad (5.1)$$

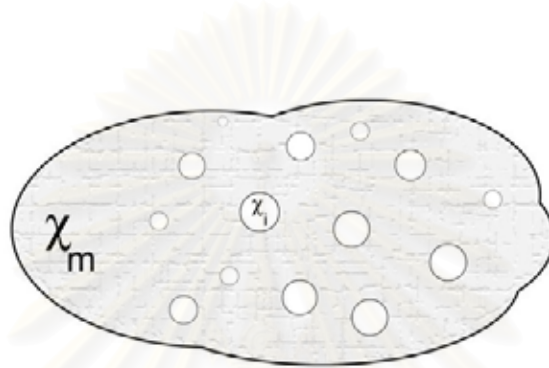
โดย \bar{D} แทนการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement)

\bar{E} แทนสนามไฟฟ้า (electric field)

χ แทนสภาพรับไว้ได้ทางไฟฟ้าไม่เชิงเส้น (nonlinear electric susceptibility)

หรือ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลาง (nonlinear coefficient)

ถูกวางอยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยสารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยสารฝังกระจาย เส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงยาวมาก ซึ่งประมาณให้มีลักษณะทรงกระบอกยาวที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_i ฝังตัวกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_m = 1 - v_i$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิก (homogeneous and isotropic medium) ดังรูปที่ 5.1

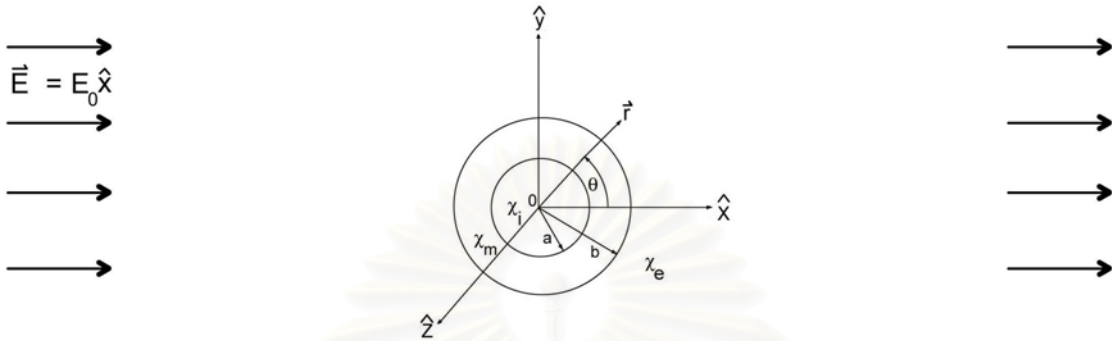


รูปที่ 5.1 แสดงภาคตัดขวางของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i กระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m

ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบโดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม ที (effective medium theory, EMT) ตามแบบจำลองของ Hashin [15] ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 สารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i ยาวมาก รัศมี a ถูกมองว่าถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m รัศมี b โดยสารฝังกระจายเส้นใยแต่ละเส้นที่ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นที่ต่างชนิดกันพิจารณาว่าเป็นเซลล์ ๆ หนึ่ง ซึ่งสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยต่อเซลล์ ($c' = a^2/b^2$) มีค่าเท่ากันสำหรับทุก ๆ เซลล์ และในการนิยามสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบนั้น เซลล์ตัวแทนอันหนึ่ง (representative cell) จะถูกนำมาพิจารณา และเซลล์อื่น ๆ ที่ล้อมรอบเซลล์ตัวแทนจะถูกแทนที่ด้วยตัวกลางที่เสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous medium) ที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลางเป็น χ_e และมีปริมาตรใหญ่กว่าเซลล์ตัวแทนมาก ๆ โดยสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอถูกให้ในแนวตั้งฉากกับแกนของสารฝังกระจายรูปทรงกระบอกยาวมาก (เมื่อเทียบกับรัศมีของสารฝังกระจาย) พอที่จะพิจารณาปัญหาเป็นแบบสองมิติดังรูปที่ 5.2 โดยสำหรับค่า χ_e เป็นปริมาณที่ยังไม่ทราบค่าและถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\langle \vec{E} \rangle_{\text{cell}} = \langle \vec{E}_e \rangle \quad (5.2)$$

โดยเครื่องหมาย $\langle \rangle$ แทนการเฉลี่ยเชิงปริมาตร (volume average)



รูปที่ 5.2 แสดงแบบจำลองของ Hashin ของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m

เนื่องจากค่า c' ถูกจำกัดอยู่ในช่วง $c \leq c' \leq 1$ (ดูคำอธิบายในหัวข้อที่ 3.2) โดยที่ c คือค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสารประกอบ ซึ่งกรณีค่า $c' = 1$ เป็นการคำนวณค่า χ_e ตามแบบจำลองของ Bruggeman โดยการคำนวณดังกล่าวเรียกว่า อี เอ็ม เอ (effective medium approximation, EMA) ดังได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 4 สำหรับบทนี้เป็นการคำนวณหาค่า χ_e ในกรณีที่ c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสารประกอบ

5.2 อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน (Simple EMT)

ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยศักย์ทดลองแบบง่าย หรือ อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน (simple EMT) วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานถูกเลือกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต โดยเริ่มต้นจากสมการฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง ซึ่งเป็นไปตามสมการ (4.3) [6] โดยเริ่มต้นการแก้ปัญหาด้วยการเลือกศักย์ทดลองแบบง่ายในแต่ละบริเวณของตัวกลาง โดย ณ ที่นี้ ศักย์ทดลองที่เลือกมีลักษณะพื้นฐานรูปแบบคณิตศาสตร์ของผลเฉลยเหมือนกับผลเฉลยของสมการลาปลาซของกรณีปัญหาตัวกลางเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกระบอก เนื่องจากรูปแบบศักย์ทดลองดังกล่าว

สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบของปัญหา(ดูรายละเอียดการแก้ปัญหาการแปรผันโดยวิธีตรงของริทซ์ ในภาคผนวก ก) นั่นคือ

$$\varphi_i(r,\theta) = -c E_0 r \cos\theta, \quad 0 < r < a \quad (5.3)$$

$$\varphi_m(r,\theta) = -E_0 \left(f r - g \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta, \quad a < r < b \quad (5.4)$$

$$\varphi_e(r,\theta) = -E_0 \left(r - d \frac{b^2}{r} \right) \cos\theta, \quad r > b \quad (5.5)$$

โดย φ_i , φ_m และ φ_e แทนศักย์ทดลองของเส้นใยทรงกระบอกไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_i ตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_m ที่ล้อมรอบทรงกระบอก และตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e ตามลำดับ จากสมการ (5.3) – (5.5) จะเห็นว่าพารามิเตอร์ของการแปรผัน 4 ค่า คือ c , f , g และ d ที่ผันค่าไปเพื่อทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบมีค่าสุดขีด (extremum) และเพื่อสะดวกในการคำนวณ ทำการลดพารามิเตอร์โดยใช้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองต้องต่อเนื่อง จากความสัมพันธ์

$$\varphi_i(r=a, \theta) = \varphi_m(r=a, \theta) \quad (5.6)$$

$$\varphi_m(r=b, \theta) = \varphi_e(r=b, \theta) \quad (5.7)$$

ดังนั้นจากสมการ (5.6) และ (5.7) จะได้

$$c = f - g \quad (5.8)$$

$$d = 1 - f + g c' \quad (5.9)$$

โดยที่ $c' = \frac{a^2}{b^2}$

จากสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$W[\varphi] = \frac{1}{4} \left[\int_{v_i} \chi_i |\vec{\nabla} \varphi_i|^4 dv + \int_{v_m} \chi_m |\vec{\nabla} \varphi_m|^4 dv + \int_{v_e} \chi_e |\vec{\nabla} \varphi_e|^4 dv \right] + W_s \quad (5.10)$$

โดยพจน์ W_s คือพลังงานที่พื้นผิว (surface energy) ซึ่งถูกนำเข้ามาพิจารณาในการแก้ปัญหาด้วยดังที่อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.2

ทำการหาเกรเดียนท์ของศักย์ทดลองในแต่ละตัวกลางในสมการ (5.3) – (5.5) ซึ่งได้

$$\bar{\nabla}\varphi_i = -c E_0[\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}] \quad (5.11)$$

$$\bar{\nabla}\varphi_m = -E_0 \left[(f+g\frac{a^2}{r^2}) \cos\theta \hat{r} - (f-g\frac{a^2}{r^2}) \sin\theta \hat{\theta} \right] \quad (5.12)$$

$$\bar{\nabla}\varphi_e = -E_0 \left[(1+d\frac{b^2}{r^2}) \cos\theta \hat{r} - (1-d\frac{b^2}{r^2}) \sin\theta \hat{\theta} \right] \quad (5.13)$$

นำสมการ (5.11) – (5.13) แทนลงในสมการ (5.10) ดังนั้นได้เป็น

$$\begin{aligned} W[\varphi] = & \frac{1}{4}E_0^4 \left[\chi_m (-f^4\pi a^2 + f^4\pi b^2 - 4f^2g^2\frac{\pi a^4}{b^2} + 4f^2g^2\pi a^2 - \frac{1}{3}g^4\frac{\pi a^8}{b^6} + \frac{1}{3}g^4\pi a^2) \right. \\ & \left. + \chi_e (-\frac{1}{3}d^4\frac{\pi b^8}{R^6} - 4d^2\frac{\pi b^4}{R^2} - \pi b^2 + 4d^2\pi b^2 + \frac{1}{3}d^4\pi b^2 + \pi R^2) + \chi_i c^4\pi a^2 + W_s \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

เนื่องจากปริมาตรของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นยังผลใหญ่กว่าปริมาตรของเซลล์ทรงกระบอกตัวแทนมาก ๆ ($R \gg b$) ดังนั้นจากสมการ (5.14) สามารถประมาณได้เป็น

$$\begin{aligned} W[\varphi] \cong & \frac{1}{4}E_0^4 \left[\chi_m (-f^4\pi a^2 + f^4\pi a^2\frac{b^2}{a^2} - 4f^2g^2\pi a^2\frac{a^2}{b^2} + 4f^2g^2\pi a^2 - \frac{1}{3}g^4\pi a^2\frac{a^6}{b^6} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3}g^4\pi a^2) + \chi_e (-\pi a^2\frac{b^2}{a^2} + 4d^2\pi a^2\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{3}d^4\pi a^2\frac{b^2}{a^2} + \pi R^2) \right. \\ & \left. + \chi_i c^4\pi a^2 \right] + W_s \\ = & \frac{1}{4}E_0^4\Omega \left[p\chi_i c^4 + p\chi_m (-f^4 + \frac{f^4}{c'} - 4f^2g^2c' + 4f^2g^2 - \frac{1}{3}g^4(c')^3 + \frac{1}{3}g^4) \right. \\ & \left. + p\chi_e (-\frac{1}{c'} + \frac{4d^2}{c'} + \frac{1}{3}\frac{d^4}{c'}) + \chi_e \right] + W_s \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\text{เมื่อ } \Omega = \pi R^2, c' = \frac{a^2}{b^2} \text{ และ } p = \frac{a^2}{R^2}$$

แทนพจน์พลังงานที่พื้นผิว [6] $W_s = E_0^4 \Omega p \chi_e d \frac{b^2}{a^2}$ ลงในสมการ (5.15) จะได้

$$\begin{aligned} W_s = & \frac{1}{4} E_0^4 \Omega [p \chi_i c^4 + p \chi_m (-f^4 + \frac{f^4}{c'} - 4f^2 g^2 c' + 4f^2 g^2 - \frac{1}{3} g^4 (c')^3 + \frac{1}{3} g^4) \\ & + p \chi_e (-\frac{1}{c'} + \frac{4d}{c'} + \frac{4d^2}{c'} + \frac{1}{3} \frac{d^4}{c'}) + \chi_e] \end{aligned} \quad (5.16)$$

กำจัดพารามิเตอร์ c และ d โดยใช้สมการ (5.8) และ (5.9) แทนลงในสมการ (5.16) และหาค่าพารามิเตอร์ f และ g ที่ทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสุดขีด (extremum) ได้จาก

ความสัมพันธ์ $\frac{\partial W}{\partial f} = 0$ และ $\frac{\partial W}{\partial g} = 0$ ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial f} = & y (4f^3 - 12f^2g + 12fg^2 - 4g^3) + (-4f^3 + 8fg^2 + \frac{4f^3}{c'} - 8fg^2c') \\ & + x (-12g + 8fg - 4f^2g - \frac{40}{3c'} + \frac{12f}{c'} - \frac{4f^2}{c'} + \frac{4f^3}{3c'} - 4g^2c' \\ & + 4fg^2c' - \frac{4}{3}g^3(c')^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial g} = & y (-4f^3 + 12f^2g - 12fg^2 + 4g^3) + (8f^2g + \frac{4g^3}{3} - 8f^2gc' - \frac{4}{3}g^3(c')^3) \\ & + x (\frac{40}{3} - 12f + 4f^2 - \frac{4f^3}{3} + 12gc' - 8fgc' + 4f^2gc' + 4g^2(c')^2 \\ & - 4fg^2(c')^2 + \frac{4}{3}g^3(c')^3) = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\text{เมื่อ } x = \frac{\chi_e}{\chi_m} \text{ และ } y = \frac{\chi_i}{\chi_m}$$

เนื่องจากสมการ (5.17) และ (5.18) เป็นสมการไม่เชิงเส้น จึงไม่สามารถแก้สมการเพื่อหา f และ g ที่แสดงผลในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (closed form) ดังนั้นการคำนวณเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหา โดยทำการกำหนดค่า y และ c' (x เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า) ซึ่งจะ

พบว่าเมื่อกำหนดค่า y และ c' จะเหลือตัวแปรสามตัว คือ f, g และ x แต่เนื่องจากเรามีสองสมการคู่ควบ เพราะฉะนั้นเราจะใช้เงื่อนไขที่แสดงความสอดคล้องในตัวเอง (self-consistency condition) ดังสมการ (5.2) มาช่วยกำจัดตัวแปร ซึ่งจะได้ว่า

$$\langle \mathbf{E}_x^{(e)} \rangle = v_i \langle \mathbf{E}_x^{(i)} \rangle + v_m \langle \mathbf{E}_x^{(m)} \rangle \quad (5.19)$$

โดยเครื่องหมาย $\langle \rangle$ แทนการเฉลี่ยเชิงปริมาตร และดัชนีล่าง x แทนส่วนประกอบในแนวแกน x ของสนามไฟฟ้า

หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของส่วนประกอบในแนวแกน y และ z ของสนามไฟฟ้าแต่ละบริเวณมีค่าเป็นศูนย์

ทำการหา $\langle \mathbf{E}_x^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{E}_x^{(m)} \rangle$ และ $\langle \mathbf{E}_x^{(e)} \rangle$ ได้จากสมการ (5.11) - (5.13) ซึ่งได้

$$\langle \mathbf{E}_x^{(i)} \rangle = c \mathbf{E}_0 \quad (5.20)$$

$$\langle \mathbf{E}_x^{(m)} \rangle = f \mathbf{E}_0 \quad (5.21)$$

$$\langle \mathbf{E}_x^{(e)} \rangle = \mathbf{E}_0 \quad (5.22)$$

แทนสมการ (5.8) และ (5.20) - (5.22) ลงในสมการ (5.19) ซึ่งได้เป็น

$$f = 1 + v_i g \quad (5.23)$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทนสมการ (5.23) ลงในสมการ (5.17) และ (5.18) จะทำให้ได้สมการคู่ควบ 2 สมการ 2 ตัวแปร ซึ่งสามารถแก้ปัญหาโดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขได้ โดยในการคำนวณ ได้กำหนดค่า c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_i ที่ฝังกระจายอย่างสุ่มในชิ้นสารประกอบ หรือ $c' = v_i$ ซึ่งโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงอยู่ในภาคผนวก 1

สำหรับกรณีตรงข้ามกับที่กล่าวมาแล้วในรูปที่ 5.1 นั่นคือ ให้สารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นยาวมาก ซึ่งประมาณให้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกยาวที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_m ฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_i = 1-v_m$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิกดังรูปที่ 5.3 และแก้ปัญหาตามแบบจำลองของ Hashin นั่นคือ สารฝังกระจายเส้นใยทรงกระบอกไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m รัศมี a ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i รัศมี b โดยทั้งหมดนี้ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e และกำหนดอัตราส่วนของ a/b สำหรับทุก ๆ สารฝังกระจายเส้นใยทรงกระบอกมีค่าเท่ากันหมดดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.3 แสดงภาคตัดขวางของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i



รูปที่ 5.4 แสดงแบบจำลองของ Hashin ของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i

โดยลักษณะของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปที่ 5.4 เหมือนกับที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นตามรูปที่ 5.2 และในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบกำหนดให้ค่า c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_m ทั้งหมดที่ฝังกระจายอย่างสุ่มในชั้นสารประกอบ หรือ $c' = v_m$ ทั้งนี้ผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ χ_e ทั้งสองกรณีได้แสดงไว้ในหัวข้อ 5.4 ต่อไป

5.3 อี เอ็ม ที แบบปรับปรุง (improved EMT)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยศักย์ทดลองแบบง่าย หรือ อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน (simple EMT) ตามสมการ (5.3) – (5.5) ซึ่งมีลักษณะพื้นฐานรูปแบบคณิตศาสตร์ของผลเฉลยเหมือนกับผลเฉลยของสมการลาปลาซของกรณีปัญหาตัวกลางเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกระบอก เพื่อให้ผลเฉลยของปัญหาตัวกลางไม่เชิงเส้นอย่างแรงมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นจึงทำการเลือกศักย์ทดลองใหม่ในแต่ละบริเวณของตัวกลาง โดยเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันมากยิ่งขึ้นในฟังก์ชันศักย์ทดลองเดิม ซึ่งการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยศักย์ทดลองแบบปรับปรุง ถูกเรียกว่า อี เอ็ม ที แบบปรับปรุง (improved EMT)

โดยศักย์ทดลองที่เลือกจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ นั่นคือ $\varphi_1(r, \theta)$ จะต้องมีค่าจำกัดเมื่อ r เข้าใกล้ศูนย์ และ $\varphi_e(r, \theta)$ มีค่า $E_0 r \cos \theta$ เมื่อ r เข้าสู่ออนันต์ นอกจากนี้ยังต้องสอดคล้องกับความสมมาตรของปัญหาตามรูปที่ 5.2 นั่นคือ เมื่อให้สนามไฟฟ้ากับสารไดอิเล็กทริก ประจุโพลารไรซ์ที่ผิว (surface polarized charge) ที่เกิดขึ้น ณ ค่ามุม $\theta = 0$ และค่ามุม $\theta = \pi$ จะต้องมีค่าของประจุโพลารไรซ์ที่มีขนาดเท่ากันและมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกัน ดังนั้นศักย์ทดลองใหม่ที่เลือกขึ้นมาจึงมีได้แต่เพียงเฉพาะพจน์ $\cos n\theta$ เมื่อ n เป็นเลขคี่เท่านั้น นั่นคือ

$$\varphi_1(r, \theta) = E_0 \left[\left(c_{11}r + c_{13} \frac{r^3}{a^2} + c_{15} \frac{r^5}{a^4} \right) \cos \theta + \left(c_{31}r + c_{33} \frac{r^3}{a^2} + c_{35} \frac{r^5}{a^4} \right) \cos 3\theta + \left(c_{51}r + c_{53} \frac{r^3}{a^2} + c_{55} \frac{r^5}{a^4} \right) \cos 5\theta \right], \quad 0 < r < a \quad (5.24)$$

$$\varphi_m(r, \theta) = E_0 \left[\left(f_{11}r + f_{13} \frac{r^3}{b^2} + f_{15} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos \theta + \left(f_{31}r + f_{33} \frac{r^3}{b^2} + f_{35} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos 3\theta + \left(f_{51}r + f_{53} \frac{r^3}{b^2} + f_{55} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos 5\theta + \left(g_{11} \frac{a^2}{r} + g_{13} \frac{a^4}{r^3} + g_{15} \frac{a^6}{r^5} \right) \cos \theta \right]$$

$$+ (g_{31} \frac{a^2}{r} + g_{33} \frac{a^4}{r^3} + g_{35} \frac{a^6}{r^5}) \cos 3\theta + (g_{51} \frac{a^2}{r} + g_{53} \frac{a^4}{r^3} + g_{55} \frac{a^6}{r^5}) \cos 5\theta],$$

$$a < r < b \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r, \theta) = E_0 [& (r \cos \theta + (d_{11} \frac{b^2}{r} + d_{13} \frac{b^4}{r^3} + d_{15} \frac{b^6}{r^5}) \cos \theta \\ & + (d_{31} \frac{b^2}{r} + d_{33} \frac{b^4}{r^3} + d_{35} \frac{b^6}{r^5}) \cos 3\theta \\ & + (d_{51} \frac{b^2}{r} + d_{53} \frac{b^4}{r^3} + d_{55} \frac{b^6}{r^5}) \cos 5\theta], \quad r > a \end{aligned} \quad (5.26)$$

โดย φ_i , φ_m และ φ_e แทนศักย์ทดลองของเส้นใยทรงกระบอกไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_i ตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น χ_m ที่ล้อมรอบทรงกระบอก และตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_e ตามลำดับ

จากสมการ (5.24) – (5.26) จะเห็นว่าพารามิเตอร์ของการแปรผัน 36 ค่า คือ c_{11} , c_{13} , c_{15} , ..., g_{53} และ g_{55} โดยพารามิเตอร์เหล่านี้ผันค่าไปเพื่อให้ฟังก์ชันนอลพลังงานของระบบตามสมการ (5.10) มีค่าสุดขีด (extremum) และเพื่อให้ง่ายขึ้นในการคำนวณ ทำการกำจัดพารามิเตอร์โดยใช้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองต้องต่อเนื่องตามสมการ (5.6) และ (5.7) จะได้

$$c_{11} + c_{13} + c_{15} = f_{11} + f_{13}c' + f_{15}(c')^2 + g_{11} + g_{13} + g_{15} \quad (5.27)$$

$$c_{31} + c_{33} + c_{35} = f_{31} + f_{33}c' + f_{35}(c')^2 + g_{31} + g_{33} + g_{35} \quad (5.28)$$

$$c_{51} + c_{53} + c_{55} = f_{51} + f_{53}c' + f_{55}(c')^2 + g_{51} + g_{53} + g_{55} \quad (5.29)$$

$$1 + d_{11} + d_{13} + d_{15} = f_{11} + f_{13} + f_{15} + g_{11}c' + g_{13}(c')^2 + g_{15}(c')^3 \quad (5.30)$$

$$d_{31} + d_{33} + d_{35} = f_{31} + f_{33} + f_{35} + g_{31}c' + g_{33}(c')^2 + g_{35}(c')^3 \quad (5.31)$$

$$d_{51} + d_{53} + d_{55} = f_{51} + f_{53} + f_{55} + g_{51}c' + g_{53}(c')^2 + g_{55}(c')^3 \quad (5.32)$$

$$\text{โดย } c' = \frac{a^2}{b^2}$$

ทำการหาเกรเดียนท์ของศักย์ที่ทดลองในแต่ละตัวกลางในสมการ (5.24) – (5.26) ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \vec{E}_i = \vec{\nabla}\phi_i = E_0 [\hat{r} \{ (c_{11} + 3c_{13} \frac{r^2}{a^2} + 5c_{15} \frac{r^4}{a^4}) \cos\theta + (c_{31} + 3c_{33} \frac{r^2}{a^2} + 5c_{35} \frac{r^4}{a^4}) \cos 3\theta \\ + (c_{51} + 3c_{53} \frac{r^2}{a^2} + 5c_{55} \frac{r^4}{a^4}) \cos 5\theta \} + \frac{\hat{\theta}}{r} \{ (c_{11}r + c_{13} \frac{r^3}{a^2} + c_{15} \frac{r^5}{a^4})(-\sin\theta) \\ + (c_{31}r + c_{33} \frac{r^3}{a^2} + c_{35} \frac{r^5}{a^4})(-3\sin 3\theta) + (c_{51}r + c_{53} \frac{r^3}{a^2} + c_{55} \frac{r^5}{a^4})(-5\sin 5\theta) \}] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_m = \vec{\nabla}\phi_m = E_0 [\hat{r} \{ (f_{11} + 3f_{13} \frac{r^2}{b^2} + 5f_{15} \frac{r^4}{b^4}) \cos\theta + (f_{31} + 3f_{33} \frac{r^2}{b^2} + 5f_{35} \frac{r^4}{b^4}) \cos 3\theta \\ + (f_{51} + 3f_{53} \frac{r^2}{b^2} + 5f_{55} \frac{r^4}{b^4}) \cos 5\theta + (-g_{11} \frac{a^2}{r^2} - 3g_{13} \frac{a^4}{r^4} - 5g_{15} \frac{a^6}{r^6}) \cos\theta \\ + (-g_{31} \frac{a^2}{r^2} - 3g_{33} \frac{a^4}{r^4} - 5g_{35} \frac{a^6}{r^6}) \cos 3\theta + (-g_{51} \frac{a^2}{r^2} - 3g_{53} \frac{a^4}{r^4} - 5g_{55} \frac{a^6}{r^6}) \cos 5\theta \} \\ + \frac{\hat{\theta}}{r} \{ (f_{11}r + f_{13} \frac{r^3}{b^2} + f_{15} \frac{r^5}{b^4})(-\sin\theta) + (f_{31}r + f_{33} \frac{r^3}{b^2} + f_{35} \frac{r^5}{b^4})(-3\sin 3\theta) \\ + (f_{51}r + f_{53} \frac{r^3}{b^2} + f_{55} \frac{r^5}{b^4})(-5\sin 5\theta) + (g_{11} \frac{a^2}{r} + g_{13} \frac{a^4}{r^3} + g_{15} \frac{a^6}{r^5})(-\sin\theta) \\ + (g_{31} \frac{a^2}{r} + g_{33} \frac{a^4}{r^3} + g_{35} \frac{a^6}{r^5})(-3\sin 3\theta) + (g_{51} \frac{a^2}{r} + g_{53} \frac{a^4}{r^3} + g_{55} \frac{a^6}{r^5})(-5\sin 5\theta) \}] \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_e = \vec{\nabla}\phi_e = E_0 [\hat{r} \{ 1 - d_{11} \frac{b^2}{r^2} - 3d_{13} \frac{b^4}{r^4} - 5d_{15} \frac{b^6}{r^6} \} \cos\theta \\ + (-d_{31} \frac{b^2}{r^2} - 3d_{33} \frac{b^4}{r^4} - 5d_{35} \frac{b^6}{r^6}) \cos 3\theta \\ + (-d_{51} \frac{b^2}{r^2} - 3d_{53} \frac{b^4}{r^4} - 5d_{55} \frac{b^6}{r^6}) \cos 5\theta \} \\ + \frac{\hat{\theta}}{r} \{ (r + d_{11} \frac{b^2}{r} + d_{13} \frac{b^4}{r^3} + d_{15} \frac{b^6}{r^5})(-\sin\theta) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(d_{31} \frac{b^2}{r} + d_{33} \frac{b^4}{r^3} + d_{35} \frac{b^6}{r^5} \right) (-3\sin 3\theta) \\
& + \left(d_{51} \frac{b^2}{r} + d_{53} \frac{b^4}{r^3} + d_{55} \frac{b^6}{r^5} \right) (-5\sin 5\theta)]
\end{aligned}
\tag{5.35}$$

นำสมการ (5.33) - (5.35) และพจน์พลังงานที่พื้นผิว [6] $W_s = -E_0^4 \Omega p \chi_e d_{11} \frac{b^2}{a^2}$ แทนลงในสมการ (5.10) จะได้

$$\begin{aligned}
W_s \cong \frac{1}{4} E_0^4 \Omega \chi_m [p y (c_{11}^4 + 4 c_{11}^3 c_{13} + \frac{28}{3} c_{11}^2 c_{13}^2 + \dots) + p (-f_{11}^4 - 20 f_{11}^2 f_{31}^2 - 33 f_{31}^4 + \dots) \\
+ p x \left(-\frac{1}{c'} - \frac{4d_{11}}{c'} + \frac{4d_{11}^2}{c'} + \frac{d_{11}^4}{3c'} + \dots \right) + x]
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

$$\text{เมื่อ } \Omega = \pi R^2, p = \frac{a^2}{R^2}, y = \frac{\chi_i}{\chi_m}, x = \frac{\chi_e}{\chi_m}$$

เพื่อสะดวกในการคำนวณมากยิ่งขึ้น ทำการลดพารามิเตอร์ $c_{11}, c_{31}, c_{51}, d_{11}, d_{31}$ และ d_{51} โดยใช้สมการ (5.27) - (5.32) ดังนั้นจากสมการ (5.36) จะทำให้ได้สมการฟังก์ชันนอลพลังงานที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ของการแปรผัน 30 ค่า คือ $c_{13}, c_{15}, c_{33}, c_{35}, c_{53}, c_{55}, d_{13}, d_{15}, d_{33}, d_{35}, d_{53}, d_{55}, f_{11}, f_{13}, f_{15}, f_{31}, f_{33}, f_{35}, f_{51}, f_{53}, f_{55}, g_{11}, g_{13}, g_{15}, g_{31}, g_{33}, g_{35}, g_{51}, g_{53}$ และ g_{55}

ทำการหาค่าพารามิเตอร์ของการแปรผันที่ทำให้ฟังก์ชันนอลพลังงานมีค่าสุดขีด (extremum) ได้จากการหาอนุพันธ์เทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผันเหล่านั้น

$$\frac{\partial W}{\partial c_{13}} = 0, \frac{\partial W}{\partial c_{15}} = 0, \frac{\partial W}{\partial c_{33}} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial g_{53}} = 0, \frac{\partial W}{\partial g_{55}} = 0
\tag{5.37}$$

ดังนั้นจากสมการ (5.37) เราจะได้สมการคู่ควบ (couple equation) 30 สมการ โดยพารามิเตอร์ $c_{13}, c_{15}, c_{33}, \dots, g_{53}$ และ g_{55} ที่ได้จากการแก้สมการคู่ควบตามสมการ (5.37) จะเป็นฟังก์ชันของ c', y และ x แต่เนื่องจากสมการคู่ควบเหล่านี้ เป็นสมการไม่เชิงเส้น จึงไม่สามารถแก้สมการเพื่อหาพารามิเตอร์เหล่านั้นที่แสดงผลในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ (closed form)

ดังนั้นการคำนวณเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหา โดยทำการกำหนดค่า y และค่า c' (x เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า) ซึ่งจะพบว่าเมื่อกำหนดค่า y และ c' แล้วจะเหลือตัวแปร 31 ตัวแปร คือ $c_{13}, c_{15}, c_{33}, \dots, g_{53}, g_{55}$ และ x แต่เนื่องจากเรามี 30 สมการคู่ควบ เพราะฉะนั้นเราจะใช้เงื่อนไขที่แสดงความสอดคล้องในตัวเอง (self - consistency condition) ดังสมการ (5.2) มาช่วยกำจัดตัวแปร ดังนั้นจากสมการ (5.19) ทำการหา $\langle E_x^{(i)} \rangle$, $\langle E_x^{(m)} \rangle$ และ $\langle E_x^{(e)} \rangle$ ได้จากสมการ (5.33) – (5.35) ซึ่งได้เป็น

$$\langle E_x^{(i)} \rangle = (c_{11} + c_{13} + c_{15}) E_0 \quad (5.38)$$

$$\langle E_x^{(m)} \rangle = (f_{11} + f_{13}(1+c') + f_{15}(1+c'+(c')^2) - g_{13}c' - g_{15}(c' + (c')^2)) E_0 \quad (5.39)$$

$$\langle E_x^{(e)} \rangle = \left(1 - \frac{d_{13}b^2}{R^2} - d_{15} \frac{b^2(R^2 + b^2)}{R^4}\right) E_0 \quad (5.40)$$

โดยที่ดัชนีล่าง x แทนส่วนประกอบในแนวแกน x ของสนามไฟฟ้า

หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของส่วนประกอบในแนวแกน y และ z ของสนามไฟฟ้าแต่ละบริเวณมีค่าเป็นศูนย์

แต่เนื่องจากปริมาตรของตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผลใหญ่กว่าปริมาตรของเซลล์ทรงกระบอกรอบตัวแทนมาก ๆ ($R \gg b$) ดังนั้นจากสมการ (5.40) จึงสามารถได้เป็น

$$\langle E_x^{(e)} \rangle \cong E_0 \quad (5.41)$$

นำสมการ (5.27), (5.38), (5.39) และ (5.41) แทนลงในสมการ (5.19) ซึ่งได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{11} = & 1 - v_i \{ f_{13} c' + f_{15} (c')^2 + g_{11} + g_{13} + g_{15} \} \\ & - (1 - v_i) \{ f_{13} (1+c') + f_{15} (1 + c' + (c')^2) - g_{13}c' - g_{15}(c' + (c')^2) \} \end{aligned} \quad (5.42)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อแทนสมการ (5.42) ลงในสมการ (5.37) จะทำให้ได้สมการคู่ควบ 30 สมการ 30 ตัวแปร ซึ่งสามารถแก้ปัญหาโดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขได้ โดยในการคำนวณ จะกำหนดให้

c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝั่งกระจายเส้นใยไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้น χ_i ที่ฝั่งกระจายอย่างสม่ำเสมอในชั้นสารประกอบ หรือ $c' = v_i$ ซึ่งโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงในภาคผนวก ง2

สำหรับกรณีตรงข้ามกับที่กล่าวมาแล้วในรูปที่ 5.1 นั่นคือ ให้สารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยสารฝั่งกระจายเส้นใยไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้นยาวมากซึ่งประมาณให้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกยาวที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_m ฝั่งกระจายอย่างสม่ำเสมอในตัวกลางไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_i = 1 - v_m$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิกดังรูปที่ 5.3 และแก้ปัญหาตามแบบจำลองของ Hashin นั่นคือ สารฝั่งกระจายเส้นใยทรงกระบอกไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m รัศมี a ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_i รัศมี b โดยทั้งหมดนี้ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไม่เชิงเส้นยังผล χ_c และกำหนดอัตราส่วนของ a/b สำหรับทุก ๆ สารฝั่งกระจายเส้นใยทรงกระบอกมีค่าเท่ากันหมดดังรูปที่ 5.4 โดยลักษณะของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปที่ 5.4 เหมือนกับที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นตามรูปที่ 5.2 และในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ กำหนดให้ค่า c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝั่งกระจายเส้นใยไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้น χ_m ทั้งหมดที่ฝั่งกระจายอย่างสม่ำเสมอในชั้นสารประกอบ หรือ $c' = v_m$

5.4 ผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงผลการคาดคะเนสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบไดอิลิกทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง โดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผลที่คำนวณได้จากศักยภาพทดลองแบบง่ายและศักยภาพทดลองแบบปรับปรุง ด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica ช่วยในการคำนวณพร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการคาดคะเนกับผลการประมาณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแบบจำลองของ Bruggeman และการจำลองโดยใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) [19,20]

5.4.1 ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล

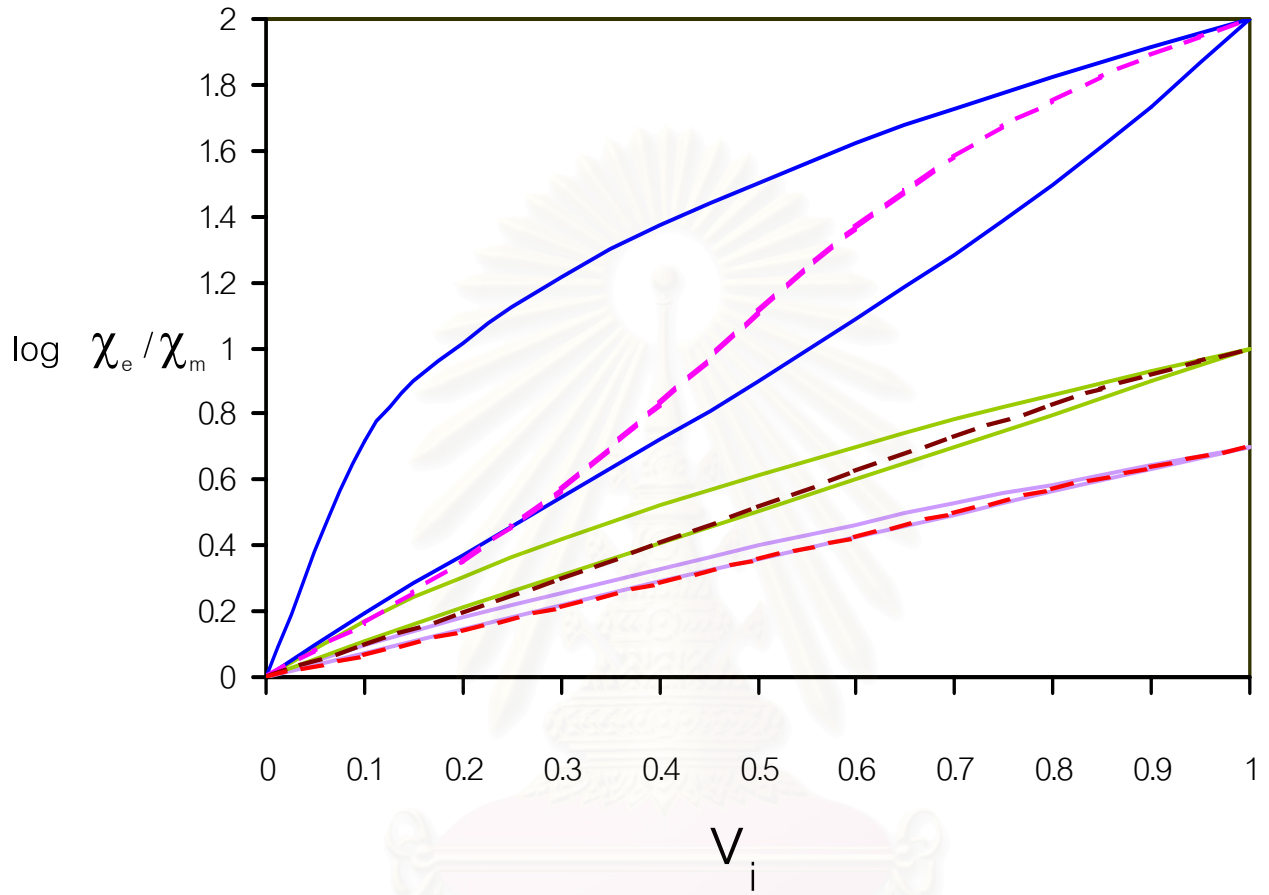
เนื่องจากข้อมูลที่เราทราบเกี่ยวกับสารประกอบมีเพียงอย่างเดียวก็คือ ค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของส่วนประกอบต่าง ๆ ในสารประกอบ แต่ในขณะเดียวกันเราไม่ทราบถึงลักษณะการ

จัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบต่าง ๆ ในสารประกอบ ซึ่ง Hashin [15] ให้ความเห็นว่าการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบต่าง ๆ ของสารประกอบมีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ดังนั้นจึงทำให้เราไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบได้อย่างแน่นอน ผลงานวิจัยนี้เราได้ค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรงจากกรณีสารประกอบสองรูปแบบตามลำดับคือ กรณีที่สารได้อิเล็กทริกทรงกระบอกที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น χ_i ฝังกระจายในสารได้อิเล็กทริกที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น χ_m กับกรณีตรงข้ามคือ สารได้อิเล็กทริกทรงกระบอกที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น χ_m ฝังกระจายในสารได้อิเล็กทริกที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้น χ_i ด้วยเหตุผลอันเนื่องมาจากถ้าสารประกอบทั้งก่อนเป็นตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เพียงชนิดเดียว ค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบก็ควรเท่ากับ χ_i ในทำนองเดียวกันถ้าสารประกอบทั้งก่อนเป็นตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m เพียงชนิดเดียว ค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบก็ควรเท่ากับ χ_m เพราะฉะนั้น ในกรณีที่สารประกอบประกอบด้วยตัวกลางทั้งสองชนิดคือตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i และ χ_m ค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบก็ควรอยู่ระหว่างค่า χ_i และ χ_m โดยจากรูป 5.5(a) และ 5.5(b) เป็นผลการคาดคะเนสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยวิธี อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน (simple EMT) (—) และวิธี อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน (simple EMA) (- - -) ซึ่งผลการคาดคะเนค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงด้วยวิธี อี เอ็ม ที พื้นฐาน เกิดขึ้นในลักษณะทำนองเดียวกับกรณีปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นในบทที่ 4 นั่นคือ จากรูป 5.5(a) คือกรณีที่กำหนดให้ $\chi_i > \chi_m$ และจากรูป 5.5(b) คือกรณีที่กำหนดให้ $\chi_i < \chi_m$ ซึ่งพบว่าในกรณีแรก χ_i / χ_m มีค่ามากกว่าหนึ่งนั้น เมื่อให้สารได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เป็นขึ้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งคือ χ_m ได้เส้นที่เป็นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ในขณะที่เมื่อให้สารได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m เป็นขึ้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_i ผลที่ได้เป็นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

ในทางตรงข้าม สำหรับรูป 5.5(b) กรณี χ_i / χ_m มีค่าน้อยกว่าหนึ่งนั้น เมื่อให้สารได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เป็นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_m ผลที่ได้เป็นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ และในขณะที่เมื่อให้สารได้อิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m เป็นขึ้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางได้อิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_i ผลที่ได้เป็น

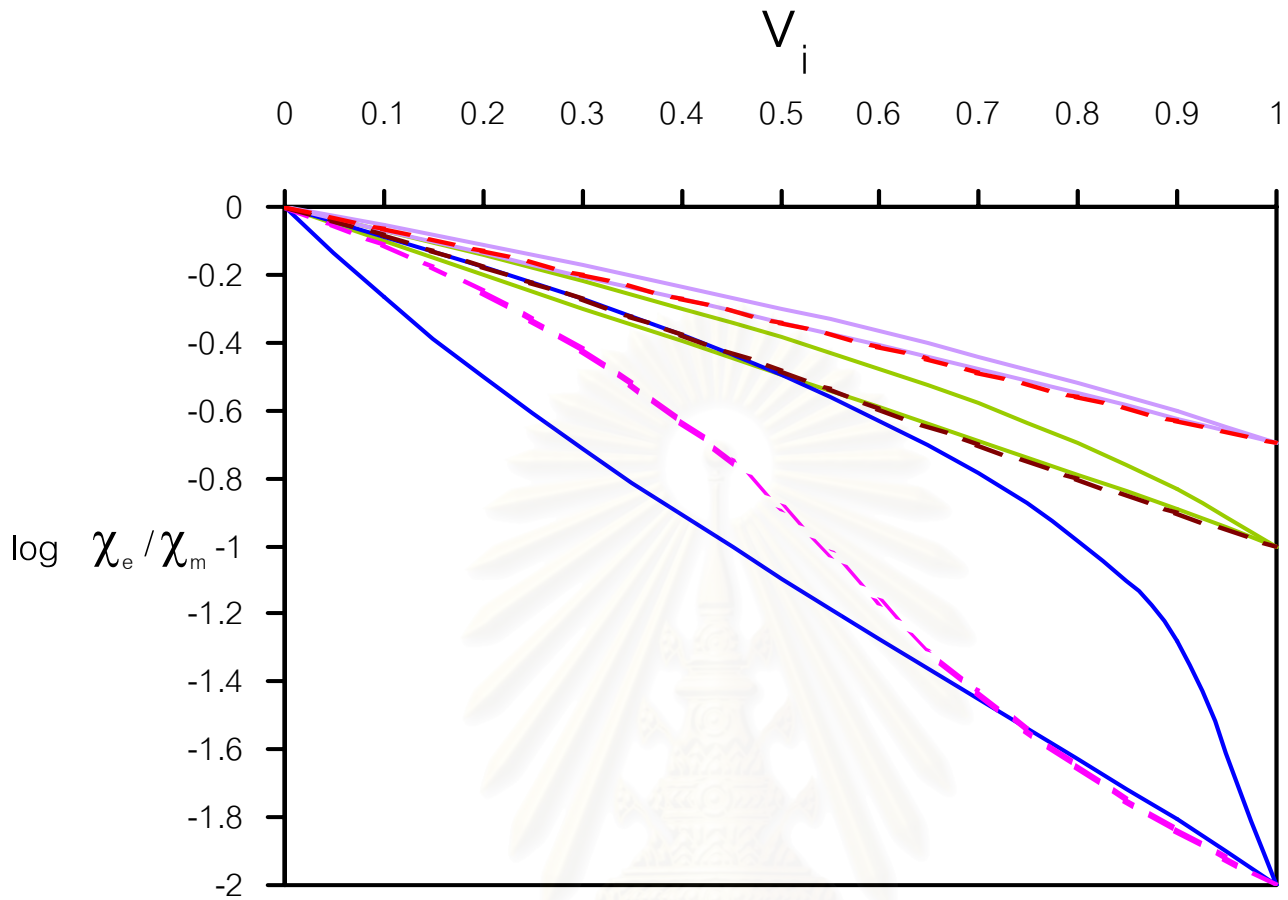
ขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยเส้นประตรงกลางระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างเป็นผลการคาดคะเนค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบโดยวิธี อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน ตามแบบจำลองของ Bruggeman ซึ่งเป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแบบจำลองของ Hashin คือกรณีที่ $c' = 1$ (ดูรายละเอียดในหัวข้อที่ 4.2) โดยกรณีที่ $c' = 1$ เป็นกรณีของสารประกอบที่ไม่มีส่วนประกอบใดฝังอยู่ในอีกส่วนประกอบหนึ่งอย่างเด่นชัด แต่ส่วนประกอบทั้งสองกระจายอย่างสุ่มร่วมกันดังรูปที่ 4.1

จากรูป 5.5(a) สามารถคาดการณ์ผลการทดลองได้ว่า กรณีที่สารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i ฝังอยู่ในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m ผลการทดลองควรอยู่ระหว่างเส้นประและเส้นขอบเขตล่าง ในขณะที่ถ้าสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_m ฝังอยู่ในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i ผลการทดลองควรอยู่ระหว่างเส้นประและเส้นขอบเขตบน และสำหรับรูป 5.5(b) สามารถอธิบายได้ทำนองเดียวกัน นอกจากนี้ ในกรณีที่ค่า χ_i เท่ากับค่า χ_m นั้นก็หมายความว่า ชิ้นสารประกอบประกอบไปด้วยสารเพียงชนิดเดียว ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบก็ต้องเท่ากับค่า χ_i หรือ χ_m นั่นเองซึ่งจะได้กราฟเป็นเส้นตรงบนแกนนอน โดยจากรูป 5.5(a) และ 5.5(b) จะเห็นได้ว่าเส้นขอบเขตบนและเส้นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะมาบรรจบกันเมื่อค่าสัดส่วนเชิงปริมาตร $v_i = 0$ และ $v_i = 1$ เนื่องจากในกรณีดังกล่าวสารประกอบทั้งก้อนประกอบไปด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงเพียงชนิดเดียวเท่านั้น ดังนั้นไม่ว่าในกรณีที่ไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง $\chi_i(\chi_m)$ เป็นชิ้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง $\chi_m(\chi_i)$ ก็ได้ค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบทั้งสองกรณีเป็นค่าเดียวกัน ทำนองเดียวกันในกรณีที่ค่าสัดส่วนเชิงปริมาตร $v_i = 1$ สามารถสื่อความหมายได้ว่าสารประกอบทั้งก้อนประกอบไปด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริก ไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เพียงชนิดเดียวเท่านั้น ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีจริงในทางปฏิบัติ ดังนั้นในสองกรณีที่กล่าวไปแล้วในข้างต้นย่อมต้องให้ผลของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบเป็นค่าเดียวกันหรือเท่ากันนั่นเอง ซึ่งจากรูปสังเกตได้ว่า เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ($\chi_i/\chi_m = 10, 5, 0.2, 0.1$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะใกล้กัน ในขณะที่เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($\chi_i/\chi_m = 100, 0.01$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะห่างออกจากกันมากขึ้น



รูปที่ 5.5 (a)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



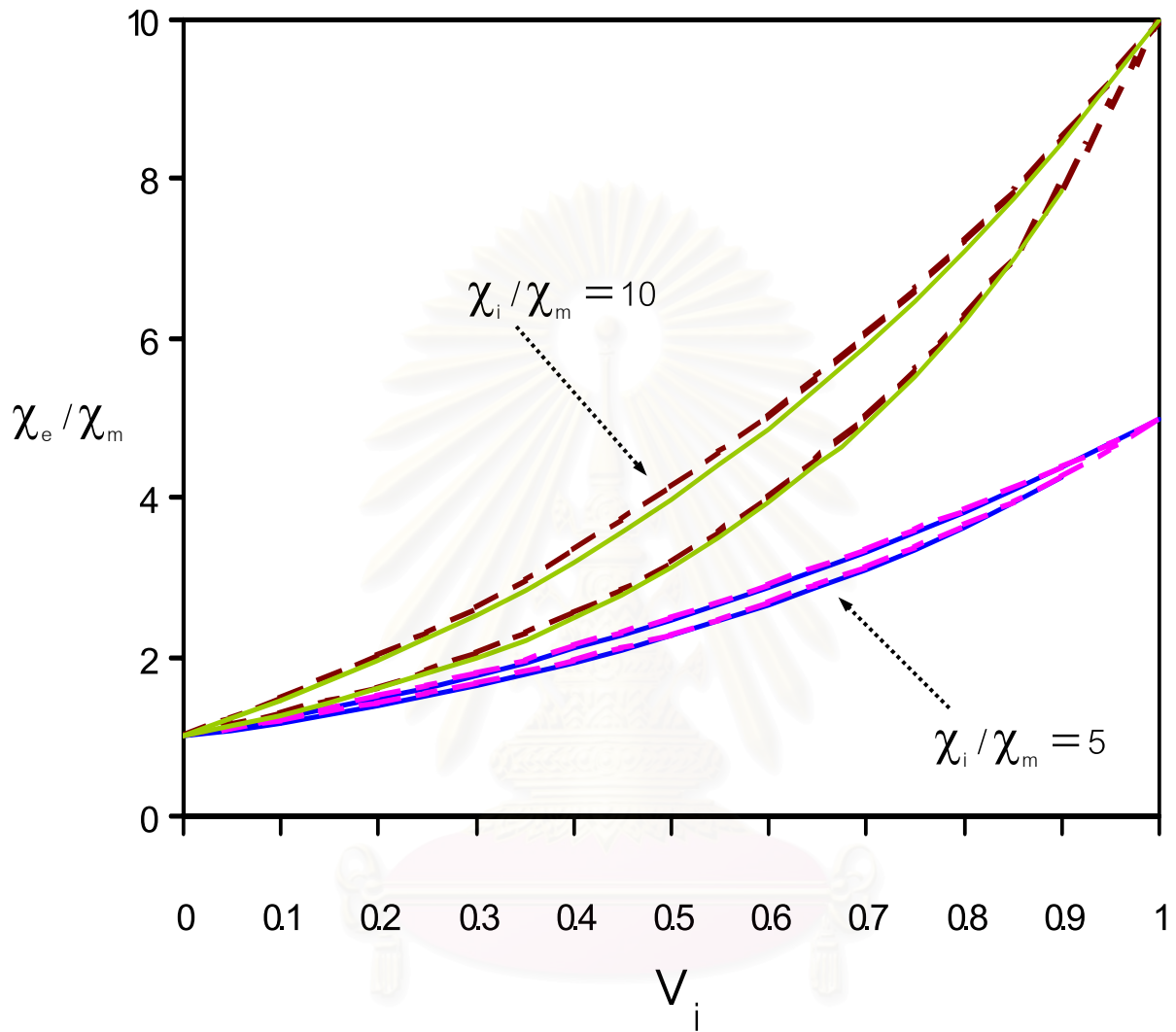
รูปที่ 5.5 (b)

รูปที่ 5.5 แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผล χ_e กรณี (a) $\chi_i > \chi_m$ (b) $\chi_i < \chi_m$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

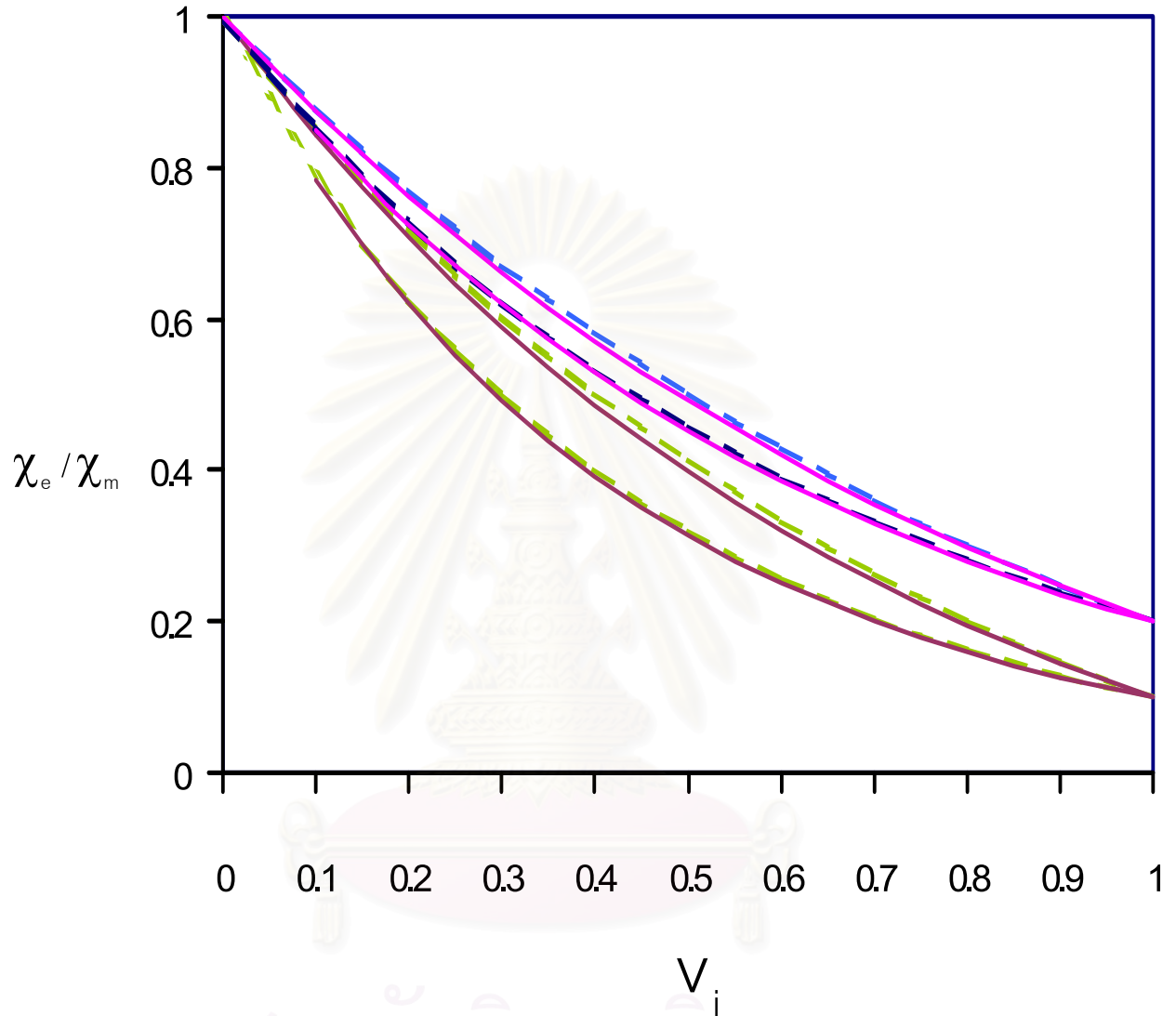
5.4.2 ผลการคำนวณด้วยศักร์ทดลองแบบปรับปรุง

จากรูปที่ 5.6(a) และ 5.6(b) แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลที่คำนวณได้จากศักร์ทดลองแบบง่าย (— — —) และศักร์ทดลองแบบปรับปรุง (———) โดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผลตามแบบจำลองของ Hashin [15] โดยจากรูป 5.6(a) และ 5.6(b) พบว่าเส้นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบที่คำนวณได้จากศักร์ทดลองแบบปรับปรุง อยู่ต่ำกว่าเส้นขอบเขตล่างที่คำนวณได้จากศักร์ทดลองแบบง่ายเพียงเล็กน้อย ทำนองเดียวกันเส้นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบที่คำนวณได้จากศักร์ทดลองแบบปรับปรุงอยู่ต่ำกว่าเส้นขอบเขตบนที่คำนวณได้จากศักร์ทดลองแบบง่ายเพียงเล็กน้อยเช่นเดียวกัน ซึ่งผลการคาดคะเนด้วยศักร์ทดลองแบบปรับปรุงให้ผลในลักษณะเดียวกับผลการทดลองด้วยศักร์ทดลองแบบง่ายนั่นคือ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ($\chi_i / \chi_m = 10, 5, 0.2, 0.1$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะใกล้กัน ในขณะที่เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($\chi_i / \chi_m = 100, 0.01$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะห่างจากกันมากขึ้น



รูปที่ 5.6 (a)

สถาบันวิจัยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



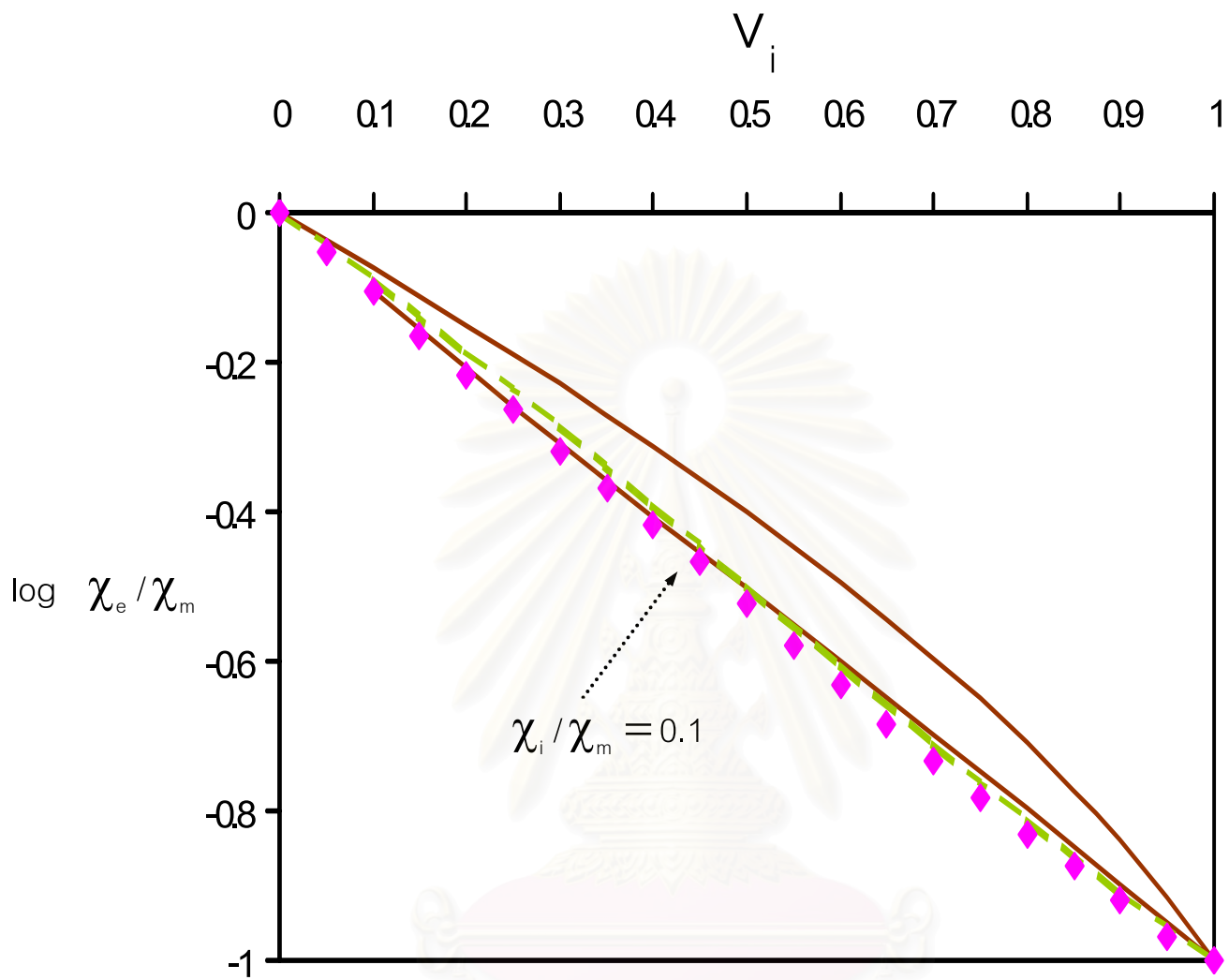
รูปที่ 5.6 (b)

รูปที่ 5.6 แสดงการเปรียบเทียบค่า χ_e/χ_m ที่คำนวณได้จาก
 ศักย์ทดลองแบบง่ายและศักย์ทดลองแบบปรับปรุง

กรณี (a) $\chi_i/\chi_m = 0.1$ (b) $\chi_i/\chi_m = 0.01$

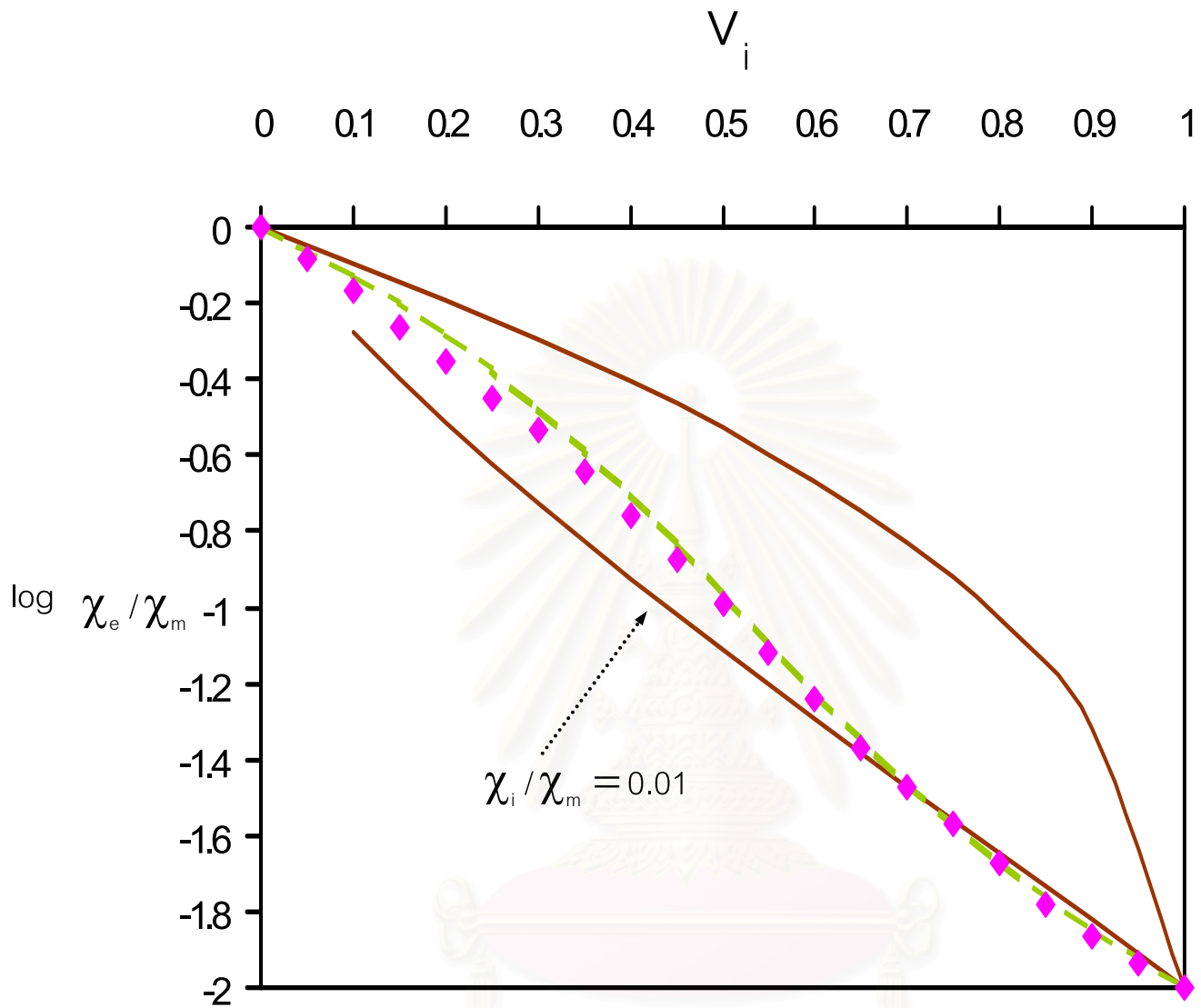
5.4.3 ผลการเปรียบเทียบเกี่ยวกับวิธีอื่น ๆ

รูปที่ 5.7(a) และ 5.7(b) แสดงการเปรียบเทียบผลการคาดคะเนค่า χ_e / χ_m เมื่อค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารชนิด χ_i คือ v_i เป็นค่าใด ๆ ระหว่างวิธี อี เอ็ม ที แบบปรับปรุง (—) วิธี อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง ตามแนวคิดของ Bruggeman (- - -) และผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (o) โดยจากรูป 5.7(a) คือกรณีที่ $\chi_i / \chi_m = 0.1$ จะเห็นได้ว่าผลการทำนายค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแนวคิดของ Bruggeman (สำหรับกรณีที่สารฝังกระจาย (inclusion) เป็นได้ทั้ง χ_i และ χ_m) จะมีบางช่วงเท่านั้นที่อยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) [19,20] ให้ผลที่ค่อนข้างใกล้เคียงกับวิธี อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง เนื่องจากลักษณะปัญหาของการจำลองขึ้นสารคล้ายคลึงกับโครงสร้างของสารประกอบที่ Bruggeman พิจารณาและผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลขดังกล่าวไม่ได้้นำการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบต่าง ๆ ในสารประกอบเข้ามาร่วมพิจารณาด้วยเช่นกัน ในขณะที่รูป 5.7(b) คือกรณีที่ $\chi_i / \chi_m = 0.01$ ผลการทำนายค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแนวคิดของ Bruggeman เกือบทั้งหมดจะอยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ซึ่งเกิดขึ้นในลักษณะทำนองเดียวกับกรณีปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นในบทที่ 3 นั้นเอง และยังเห็นได้ว่าผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) อยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยเช่นกัน



รูป 5.7 (a)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 5.7 (b)

รูปที่ 5.7 แสดงการเปรียบเทียบผลการทำนายค่า χ_e / χ_m จากทฤษฎีต่าง ๆ และการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลขกรณี (a) $\chi_i / \chi_m = 0.1$ (b) $\chi_i / \chi_m = 0.01$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า การทำนายและคาดคะเนตัวกลางยังผลไม่เชิงเส้นด้วยขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแนวคิดของ Hashin มีความสมบูรณ์มากกว่าการประมาณตัวกลางยังผลของสารประกอบตามแนวคิดของ Bruggeman เนื่องจากครอบคลุมกรณีของลักษณะการจัดตัวของสารประกอบเป็นแบบใด ๆ โดยในทางปฏิบัติถ้ามีข้อมูลของผลการทดลองจำนวนมากก็จะทำให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ c' ที่เป็นตัวแทนของผลการทดลองได้ (fitting parameter)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

สรุปและวิเคราะห์ผลการวิจัย

เนื่องจากสารประกอบไม่เชิงเส้น (nonlinear composite materials) มีศักยภาพในเชิงประยุกต์ในทางวิศวกรรมและฟิสิกส์ ดังนั้นจึงเป็นประโยชน์อย่างยิ่งที่จะศึกษาและวิจัยสารประกอบดังกล่าว งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง โดยมีสมการพื้นฐานที่อธิบายสนามไฟฟ้าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน จึงทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันคณิตศาสตร์ได้ลงตัว (exact closed form solution) ดังนั้นวิธีประมาณต่าง ๆ จึงถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ได้แก่ วิธีเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation method) [4,5] ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาดังกล่าวไม่เชิงเส้น แต่ข้อจำกัดของวิธีนี้คือไม่สามารถใช้แก้ปัญหามาตรฐานของกรณีปัญหาดังกล่าวไม่เชิงเส้นอย่างแรงได้ (strongly nonlinear medium) วิธีการประมาณแบบแยกส่วน (decoupling technique) [13,14] เป็นวิธีประมาณอีกวิธีหนึ่ง โดยเป็นวิธีที่แปลงผลที่ได้จากกรณีปัญหาดังกล่าวเชิงเส้นไปสู่ปัญหาดังกล่าวไม่เชิงเส้นโดยมีระบบระดับจุลภาคคล้ายคลึงกัน (identical microstructure) นอกจากนี้วิธีประมาณอีกวิธีหนึ่งคือ วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงาน (energy functional) [6-9] เป็นวิธีที่ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาดังกล่าวเชิงเส้นและปัญหาดังกล่าวไม่เชิงเส้นทั้งชนิดอย่างอ่อน (weakly nonlinear medium) และอย่างแรง (strongly nonlinear medium) ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีการแปรผันฟังก์ชันนอลพลังงานเพื่อแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตและใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผล หรือ อีเอ็มที (effective medium theory, EMT) ตามแบบจำลองของ Hashin [15] คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

ลำดับแรกของการวิจัยเริ่มต้นจากการทบทวนงานวิจัยของ Hashin ซึ่งเป็นการคำนวณสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น โดยสารประกอบดังกล่าวประกอบไปด้วยสารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลม (spherical conducting particle inclusion) ที่มีรัศมีค่าต่าง ๆ กัน สภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_i ฝังกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่ง (host medium) ที่มีสภาพนำไฟฟ้าเป็น σ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_m=1-v_i$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิก (homogeneous and isotropic medium) และในการคำนวณสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผลของสารประกอบตามแบบจำลองของ Hashin [15] สารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลมรัศมี a สภาพนำไฟฟ้า σ_i ถูกมองว่าถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางนำไฟฟ้าอีกชนิดหนึ่งซึ่งมีรัศมี b สภาพนำไฟฟ้า σ_m โดยอนุภาคตัวนำทรงกลมแต่ละชิ้นที่ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางนำไฟฟ้า

ที่ต่างชนิดกันถูกพิจารณาว่าเป็นเซลล์ ๆ หนึ่ง ซึ่งสัดส่วนโดยปริมาตรของตัวนำทรงกลมต่อเซลล์ ($c' = a^3/b^3$) มีค่าโดยประมาณเท่ากันสำหรับทุก ๆ เซลล์ และในการนิยามสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบ (effective conductivity) นั้น เซลล์ตัวแทนอันหนึ่ง (representative cell) จะถูกเลือกนำมาพิจารณา และเซลล์อื่น ๆ ที่ล้อมรอบเซลล์ตัวแทนจะถูกแทนที่ด้วยตัวกลางที่เสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous medium) ที่มีสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผล σ_c ซึ่ง c' ถูกจำกัดอยู่ในช่วง $c \leq c' \leq 1$ โดยที่ c คือค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลมทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสาร โดย ณ ที่นี้เห็นได้ว่า c' มีค่าได้มากที่สุดเท่ากับ 1 เนื่องจากรัศมีของเซลล์ตัวแทนเล็กได้มากที่สุดเท่ากับรัศมีของอนุภาคตัวนำทรงกลม ($b=a$) ในขณะเดียวกัน c' มีค่าน้อยที่สุดได้เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลมทั้งหมดที่ฝังกระจายในชั้นสารเนื่องจากขณะนี้เรากำลังพิจารณาเซลล์ตัวแทนซึ่งใช้แทนระบบของสารประกอบที่กำลังพิจารณานั้นเอง ในที่นี้ Hashin ได้พิจารณากรณีที่ c' มีค่าสูงสุดและต่ำสุด คือ กรณีที่ $c' = v_i$ และ $c' = 1$ ซึ่งจากผลการคำนวณค่า σ_c Hashin พบว่า เมื่อสารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลม σ_i ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลาง σ_m และกำหนดให้ $c' = v_i$ ผลการคำนวณได้เส้นที่เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของค่าสภาพนำไฟฟ้ายังผล ในทางตรงกันข้ามถ้ากำหนดให้สารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลมเป็น σ_m ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลาง σ_i และกำหนดให้ c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายอนุภาคตัวนำทรงกลมชนิด σ_m ที่ฝังกระจายในชั้นสาร หรือ $c' = v_m$ ซึ่งผลการคำนวณได้เส้นที่เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของค่าสภาพนำไฟฟ้ายังผล σ_c โดยเส้นที่อยู่ตรงกลางระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างคือผลการคำนวณค่า σ_c กรณีที่ $c' = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับผลการคำนวณค่า σ_c ของ Landauer [16] ซึ่งเป็นการศึกษาสารประกอบที่ไม่มีส่วนประกอบใดฝังอยู่ในอีกส่วนประกอบหนึ่งอย่างเด่นชัด แต่ส่วนประกอบทั้งสองกระจายอย่างสุม่ร่วมกันโดยเป็นการคำนวณค่า σ_c ตามแบบจำลองของ Bruggeman [12] และจากการเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงทฤษฎีและผลการทดลอง Hashin ได้สรุปและวิเคราะห์ไว้ว่า “ ผลการทดลองทั้งหมดไม่สามารถถูกแทนได้เป็นอย่างดีด้วยผลการคำนวณทางทฤษฎีของ Landauer หรือขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า σ_c เนื่องจากค่าแม่นยำ (rigorous value) ของสภาพนำไฟฟ้ายังผลของสารประกอบขึ้นอยู่กับการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบไม่ใช่แค่เพียงสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจาย (inclusion) ในชั้นสาร ถึงกระนั้นก็ตาม ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า σ_c ก็ยังเป็นขอบเขตที่ดีที่สุดที่เป็นไปได้สำหรับค่าสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้นยังผลที่มีการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบเป็นแบบใด ๆ โดยถ้าผลการทดลองมีข้อมูลจำนวนมากจะทำให้สามารถหาพารามิเตอร์ c' ที่เป็นตัวแทนของผลการทดลอง (fitting parameter) ได้ ”

ดังนั้นเห็นได้ว่า การทำนายและคาดคะเนสภาพนำไฟฟ้ายังผลด้วยขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ Hashin มีความสมบูรณ์และครอบคลุมทุกกรณีของสารประกอบที่มีการจัดตัวทางเรขาคณิตของส่วนประกอบเป็นแบบใด ๆ ด้วยเหตุนี้ในงานวิจัยจึงได้ใช้แบบจำลองของ Hashin คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ซึ่งสารประกอบที่ศึกษาเป็นสารประกอบไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงที่ประกอบด้วยสารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง ซึ่งสามารถประมาณให้มีลักษณะทรงกระบอกยาว มีค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_i และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น v_i ฝังตัวกระจายอย่างสุ่มในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นเป็น χ_m และอัตราส่วนเชิงปริมาตรเป็น $v_m = 1 - v_i$ โดยที่ตัวกลางแต่ละชนิดมีสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันและไอโซโทรปิก (homogeneous and isotropic medium) ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบโดยใช้ทฤษฎีตัวกลางยังผล หรือ อี เอ็ม ที (effective medium theory, EMT) ตามแบบจำลองของ Hashin สารฝังกระจายเส้นใยไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นเป็น χ_i ยาวมาก รัศมี a ถูกมองว่าถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอีกชนิดหนึ่งเป็น χ_m รัศมี b โดยสารฝังกระจายเส้นใยแต่ละเส้นที่ถูกล้อมรอบด้วยชั้นของตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นที่ต่างชนิดกันพิจารณาว่าเป็นเซลล์ ๆ หนึ่ง ซึ่งสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายเส้นใยต่อเซลล์ ($c' = a^2/b^2$) มีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุก ๆ เซลล์ และในการนิยามสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบนั้น เซลล์ตัวแทนอันหนึ่ง (representative cell) จะถูกนำมาพิจารณาและเซลล์อื่น ๆ ที่ล้อมรอบเซลล์ตัวแทนจะถูกแทนที่ด้วยตัวกลางที่เสมือนเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous medium) ที่มีสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของตัวกลางเป็น χ_c ซึ่งค่า c' ถูกจำกัดอยู่ในช่วง $c \leq c' \leq 1$ ดังได้อธิบายในข้างต้น โดยผลการคำนวณค่า χ_c ด้วยศักร์ทดลองแบบง่าย หรือ อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน ให้ผลในลักษณะทำนองเดียวกับกรณีปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น นั่นคือ กรณีที่กำหนดให้ $\chi_i > \chi_m$ เมื่อให้สารไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เป็นชั้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่งคือ χ_m และกำหนดให้ $c' = v_i$ ได้เส้นที่เป็นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ในขณะที่เมื่อให้สารไดอิเล็กทริกทรงกระบอกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m เป็นชั้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_i และกำหนดให้ c' เท่ากับค่าสัดส่วนเชิงปริมาตรของสารฝังกระจายชนิด χ_m ที่ฝังกระจายในชั้นสารประกอบ หรือ $c' = v_m$ ผลที่ได้เป็นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ

ในทางตรงข้าม กรณีที่กำหนดให้ $\chi_i < \chi_m$ เมื่อให้สารไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_i เป็นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_m และกำหนดให้ $c' = v_i$ ผลที่ได้เป็นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของ

สารประกอบ และในขณะที่เมื่อให้สารไดอิเล็กทริกทรงกระบอกรูปไม่เชิงเส้นอย่างแรง χ_m เป็นชิ้นสารที่ฝังกระจายในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นอย่างแรงอีกชนิดหนึ่ง χ_i และกำหนดให้ $c' = v_m$ ผลที่ได้เป็นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันไม่มากนัก ($\chi_i / \chi_m = 10, 5, 0.2, 0.1$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะใกล้กัน ในขณะที่เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($\chi_i / \chi_m = 100, 0.01$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะห่างออกจากกันมากขึ้น

สำหรับการคำนวณค่า χ_c กรณี $c' = 1$ เป็นการคำนวณค่า χ_c ของสารประกอบที่มีส่วนประกอบที่คละกันอย่างสูง กล่าวคือ ไม่มีส่วนประกอบใดฝังอยู่ในอีกส่วนประกอบหนึ่งอย่างเด่นชัด แต่ส่วนประกอบทั้งสองกระจายอย่างสูงร่วมกัน ดังนั้นสารฝังกระจายจึงเป็นได้ทั้งชนิด χ_i และ χ_m ดังรูปที่ 4.1 และในการคำนวณค่า χ_c ใช้แบบจำลองของ Bruggeman ในการคำนวณ ซึ่งแบบจำลองของ Bruggeman เป็นกรณีพิเศษกรณีหนึ่งของการคำนวณค่า χ_c ตามแบบจำลองของ Hashin โดยผลการคำนวณดังกล่าวพบว่า เมื่อสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบของสารประกอบมีค่าไม่แตกต่างกันมาก ($\chi_i / \chi_m = 0.1$) จะเห็นได้ว่าผลการทำนายค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแนวคิดของ Bruggeman จะมีบางช่วงเท่านั้นที่อยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ โดยให้ผลการคำนวณใกล้เคียงกับผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) [19,20] เนื่องจากลักษณะปัญหาของการจำลองชิ้นสารคล้ายคลึงกับโครงสร้างของสารประกอบที่พิจารณา ในขณะที่เมื่อสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($\chi_i / \chi_m = 0.01$) ผลการทำนายค่า χ_c ตามแนวคิดของ Bruggeman เกือบทั้งหมดจะอยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ ซึ่งเกิดขึ้นในลักษณะทำนองเดียวกับกรณีปัญหาสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้นดังที่กล่าวมาตอนต้น และยังเห็นได้ว่าผลการจำลองโดยวิธีเชิงตัวเลข (numerical simulation) อยู่ระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบด้วยเช่นกัน โดยผลการทำนายค่า χ_c กรณี $c' = 1$ นี้ถูกนำไปใช้ทำนายค่าสภาพรับไว้ได้ไม่เชิงเส้นอันดับที่สาม (third – order nonlinear susceptibility) ของสารประกอบแก้วพูนเชิงแสงไม่เชิงเส้น (nonlinear – optical porous – glass based composites materials) [21] โดยให้ผลการคำนวณเชิงทฤษฎีใกล้เคียงกับผลการทดลอง

นอกจากนี้ ในงานวิจัยได้ใช้แนวความคิดของ Lee และ Yu [11] ในการปรับปรุงผลการคำนวณค่า χ_c ให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นโดยใช้ศักยภาพทดลองแบบปรับปรุงด้วยการเพิ่มจำนวน

พจน์และพารามิเตอร์ของการแปรผันในฟังก์ชันศักย์ทดลองเดิม ซึ่งผลการคำนวณให้ผลในลักษณะทำนองเดียวกับการคาดคะเนค่า χ_c ด้วยศักย์ทดลองแบบง่าย โดยพบว่าเส้นขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบที่คำนวณได้จากศักย์ทดลองแบบปรับปรุงอยู่ต่ำกว่าเส้นขอบเขตล่างที่คำนวณได้จากศักย์ทดลองแบบง่ายเพียงเล็กน้อย ทำนองเดียวกันเส้นขอบเขตบนของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบที่คำนวณได้จากศักย์ทดลองแบบปรับปรุงอยู่ต่ำกว่าเส้นขอบเขตบนที่คำนวณได้จากศักย์ทดลองแบบง่ายเพียงเล็กน้อยเช่นเดียวกัน ซึ่งผลการคาดคะเนด้วยศักย์ทดลองแบบปรับปรุงให้ผลในลักษณะเดียวกับผลการทดลองด้วยศักย์ทดลองแบบง่ายนั่นคือ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ($\chi_i / \chi_m = 10, 5, 0.2, 0.1$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะใกล้กัน ในขณะที่เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นของส่วนประกอบทั้งสองของสารประกอบมีค่าแตกต่างกันมาก ($\chi_i / \chi_m = 100, 0.01$) ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบจะห่างจากกันมากขึ้น

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า การทำนายและคาดคะเนตัวกลางยังผลไม่เชิงเส้นด้วยขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลตามแนวคิดของ Hashin มีความสมบูรณ์มากกว่าการประมาณตัวกลางยังผลของสารประกอบตามแนวคิดของ Bruggeman เนื่องจากครอบคลุมกรณีของลักษณะการจัดตัวของสารประกอบเป็นแบบใด ๆ โดยในทางปฏิบัติถ้ามีข้อมูลของผลการทดลองจำนวนมากก็จะทำให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ c' ที่เป็นตัวแทนของผลการทดลองได้ (fitting parameter)

นอกจากนี้ สำหรับปัญหาต่อไปที่ผู้วิจัยเองให้ความสนใจที่จะศึกษาก็คือ ปัญหาสารประกอบไดอิเล็กทริกเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นชนิดที่ไม่ไอโซโทรปิก ซึ่งการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ตัวกลางยังผลของสารประกอบจะถูกคำนวณในทิศทางและตั้งฉากกับสนามไฟฟ้าที่ให้กับสารประกอบ รวมถึงกรณีปัญหาที่ศักย์ไฟฟ้ารูปไซน์ (sinusoidal voltage) ถูกให้กับสารประกอบไดอิเล็กทริก ซึ่งทำให้กระบวนการเกิดโพลาริเซชันในสารขึ้นกับความถี่ด้วย ดังนั้นสมบัติของสารประกอบนอกจากจะขึ้นกับส่วนประกอบแล้วยังขึ้นกับความถี่ของศักย์ที่ให้กับสารประกอบโดยสภาพยอมทางไฟฟ้าเชิงซ้อน (complex permittivity) จำเป็นต้องถูกนำมาบรรยายระบบดังกล่าวถึงจะเพียงพอในการอธิบายสารประกอบไดอิเล็กทริก ซึ่งปัญหาดังกล่าวถ้ามีโอกาสจะทำการศึกษาต่อไป

รายการอ้างอิง

- [1] R. J. Gehr, G. L. Fischer and R. W. Boyd, J. Opt. Soc. Am. B 14(9), 2310 (1997).
- [2] Yasuo Cho, Satoshi Kazuta and Kaori Matsuura, Appl. Phys. Lett. 75(18), 2833 (1999).
- [3] B. Ploss and B. Ploss, Polymer 41, 6087 (2000).
- [4] G. Q. Gu and K. W. Yu, Phys. Rev. B 46, 4502 (1992).
- [5] K. W. Yu, Y. C. Wang, P. M. Hui and G. Q. Gu, Phys. Rev. B 47, 1782 (1993).
- [6] K. W. Yu, Computers in Physics 10(3), 284 (1996).
- [7] K. W. Yu and G. Q. Gu, Phys. Lett. A 205, 295 (1995).
- [8] K. W. Yu and P. M. Hui, Phys. Rev. B 47, 14150 (1993).
- [9] K. W. Yu and G. Q. Gu, Phys. Lett. A 193, 311 (1994).
- [10] H. C. Lee and K. W. Yu, Phys. Lett. A 197, 341(1995).
- [11] H. C. Lee, K. W. Yu and G. Q. Gu, J. Phys. : Condens. Matter 7, 8785 (1995).
- [12] D. A. G. Bruggeman, Ann. Phys. (Leipzig) 24, 636 (1935).
- [13] K. W. Yu and K. P. Yuen, J. Phys. : Condens. Matter 8, 11327 (1996).
- [14] K. W. Yu, P. M. Hui and H. C. Lee, Phys. Lett. A 210,115 (1996).
- [15] Z. Hashin, J. Comp. Mat. 2(3), 284 (1968).
- [16] R. Landauer, J. Appl. Phys. 23, 779 (1952).
- [17] N. J. Stepanow, Über die elektrische Leitfähigkeit der Metallegierungen,
Z. f. Anorg. Chem. 78, 1 (1912).
- [18] D. J. Bergman and D. Stroud, Solid State Physics. 46, 147 (1992).
- [19] O. Levy and D. J. Bergman, J. Phys. : Condens. Matter 5, 7095 (1993).
- [20] C. S. Yang and P. M. Hui, Phys. Rev. B 44, 12559 (1991).
- [21] R.J. Gehr, G. L. Fischer and R. W. Boyd, J. Opt. Soc. Am. B 14(9), 2310 (1997).
- [22] John R. Reitz, Frederick J. Milford and Robert W. Christy, Foundation of Electromagnetic Theory, 4th ed., USA: Addison – Wesley Publishing Company, 1992.
- [23] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, Calculus of Variations, Revised English ed., USA: Prentice – Hall, 1963.
- [24] Amnon Yariv, Optical Electronics, 3rd ed., Japan: CBS College Publishing, 1985.

- [25] David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3rd ed., USA: Prentice Hall International, 1999.
- [26] C. J. F. Böttcher, Theory of Electric Polarization, vol. 1: Dielectrics in Static Fields, 2nd ed., Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1973.
- [27] ยอดชาย จอมพล ผลเฉลยโดยการแปรผันของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของวัสดุเชิงประกอบ โครงการการเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์, ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2541.
- [28] สุทธิรักษ์ เจียรพินิจนันท์ แคลคูลัสของการแปรผันเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1, โครงการตำรา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2526.



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

หลักการแปรผัน

วิชาแคลคูลัสของการแปรผัน เป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัสของฟังก์ชันนอล ซึ่ง ณ ที่นี้ จะกล่าวเฉพาะการหาค่าสุดขีด (extremum) ของฟังก์ชันนอลเท่านั้น ซึ่งโดยปกติแล้วคงจะคุ้นเคย ในการหาค่าสูงสุด (maximum value) หรือต่ำสุด (minimum value) ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ แต่สำหรับวิชาแคลคูลัสของการแปรผันเบื้องต้น [23,28] จะพิจารณาเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าสุดขีด ซึ่งจะนำไปสู่สมการออยเลอร์-ลากราง (Euler-Lagrange equation)

ก.1 ฟังก์ชันนอลและการแปรผันแบบง่าย

ฟังก์ชันนอล คือ โอเปอเรเตอร์ที่เปลี่ยน (map) ฟังก์ชันไปเป็นจำนวน (number) ในขณะที่ฟังก์ชัน คือ โอเปอเรเตอร์ที่เปลี่ยนจำนวนไปเป็นจำนวน ตัวอย่างของฟังก์ชันนอล เช่น ถ้าให้ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใด ๆ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และสามารถหาค่าบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

$$J[y] = \int_a^b \left[\left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^2 + \frac{y(x)}{3} \right] dx$$

จะเป็นฟังก์ชันนอลบนเซตของฟังก์ชัน $y(x)$ ใด ๆ จากตัวอย่างจะเห็นว่าฟังก์ชัน $y(x)$ จะต้องหาอนุพันธ์ได้และจะต้องหาค่าได้บนช่วงปิด $[a,b]$ จึงจะทำให้สามารถหาค่าฟังก์ชันนอล $J[y]$ ได้

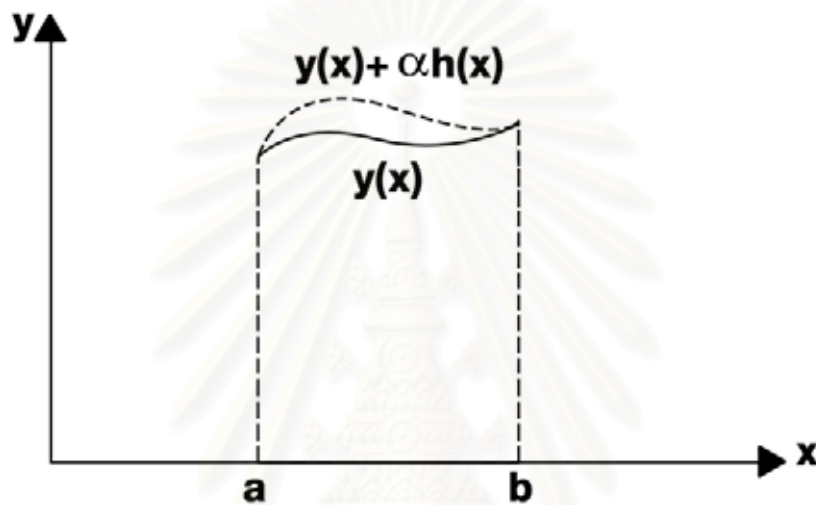
ก.2 สมการออยเลอร์ – ลากราง ในกรณี 1 ตัวแปร

พิจารณาฟังก์ชันนอล

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (ก.1)$$

ให้ $F(x, y(x), y'(x))$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับตัวแปร x เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a, b]$ โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

$$y(a) = A \quad \text{และ} \quad y(b) = B \quad (ก.2)$$



รูป ก-1 แสดงการผันของเส้นทาง $y(x)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด (extremum)

เราจะหาฟังก์ชัน $y(x)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด (extremum) โดยสมมติให้ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันหรือเส้นโค้งที่ทำให้ฟังก์ชันนอลตามสมการ (ก.1) มีค่าสุดขีด และให้ฟังก์ชัน $y(x)$ มีส่วนที่เปลี่ยนแปลง $\alpha h(x)$ โดยที่ α มีค่าเล็ก ๆ (infinitesimal value) ซึ่งฟังก์ชัน $y(x) + \alpha h(x)$ นี้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดไว้ในสมการ (ก.2) ดังรูปที่ ก-1 นั้นคือ

$$y(a) + \alpha h(a) = A \quad \text{และ} \quad y(b) + \alpha h(b) = B$$

แต่เงื่อนไขขอบเขตตามสมการ (ก.2) จะทำให้ได้เงื่อนไขขอบเขตของ $\alpha h(x)$ คือ

$$\alpha h(a) = \alpha h(b) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \alpha \quad \text{เป็นค่าคงตัวใด ๆ} \quad (ก.3)$$

จากรูป ก -1 เป็นกราฟแสดงการผันของเส้นทาง $y(x)$ ซึ่งแทนด้วยเส้นประที่ผันค่าไปเพื่อให้ได้เส้นทางที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด และเส้นโค้งหรือฟังก์ชัน $y(x)$ ซึ่งแทนด้วยเส้นทึบเป็นเส้นทางที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด โดยจะเห็นว่าจุดปลายทั้งสองจุดของเส้นโค้งทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน นั่นก็คือ เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตดังสมการ (ก.3) และเมื่อ $y(x)$ มีส่วนที่เปลี่ยนแปลง $\alpha h(x)$ ส่วนที่เปลี่ยนแปลงที่สมนัยของฟังก์ชันนอลในสมการ (ก.1) คือ

$$\begin{aligned}\Delta J[h(x)] &= J[y(x) + \alpha h(x)] - J[y(x)] \\ &= \int_a^b [F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h') - F(x, y, y')] dx\end{aligned}\quad (\text{ก.4})$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายพจน์แรกจะได้

$$\Delta J[h(x)] = \int_a^b [(F(x, y, y') + \alpha h \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') + \alpha h' \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') + \dots) - F(x, y, y')] dx\quad (\text{ก.5})$$

โดยทั่วไป $\Delta J[h(x)]$ จะเป็นฟังก์ชันนอลของ $h(x)$ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะไม่เป็นฟังก์ชันนอลเชิงเส้น (nonlinear functional) สมมุติว่า $\Delta J[h(x)] = \phi[h(x)] + \varepsilon \|h\|$ เมื่อ $\phi[h(x)]$ เป็นฟังก์ชันนอลเชิงเส้นและ $\varepsilon \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h\| \rightarrow 0$ แล้วจะเรียกฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ ว่าเป็น ฟังก์ชันนอลที่หาอนุพันธ์ได้ และเรียกส่วนที่เป็นเชิงเส้นหลัก (principal linear part) ของส่วนที่เปลี่ยนแปลง $\Delta J[h(x)]$ ซึ่งในที่นี้คือฟังก์ชันนอลเชิงเส้น $\phi[h(x)]$ ว่าเป็นการแปรผัน (variation) หรืออนุพันธ์ของ $J[y(x)]$ เขียนแทนด้วย $\delta J[h(x)]$ [28]

ดังนั้นจากสมการ (ก.5) จะได้ว่า

$$\Delta J = \delta J + \dots$$

ในที่นี้จุดไข่ปลาแทนพจน์ที่มีกำลังมากกว่าหนึ่งของ h และ h' ซึ่งประมาณค่าน้อยมาก ดังนั้นจะได้

$$\delta J = \int_a^b [\alpha h \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') + \alpha h' \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y')] dx\quad (\text{ก.6})$$

นั่นคือ δJ เป็นการแปรผันของฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ และโดยการอินทิเกรตที่ละส่วนของพจน์หลังของสมการ (ก.6) จะได้

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \alpha h(x) dx + \alpha h(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b \quad (\text{ก.7})$$

ใช้เงื่อนไขในสมการ (ก.3) จะได้

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \alpha h(x) dx \quad (\text{ก.8})$$

เงื่อนไขจำเป็นสำหรับ $J[y(x)]$ ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือ $\delta J = 0$ และเนื่องจาก $\alpha h(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ก็ได้ว่า

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{ก.9})$$

จากสมการ (ก.9) เรียกว่า สมการออยเลอร์-ลากราง (Euler – Lagrange 's equation) โดยที่ผลเฉลยของสมการออยเลอร์-ลากราง $y(x)$ จะเป็นเงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด หรืออาจกล่าวในอีกแง่หนึ่งที่ว่า $y(x)$ เป็นเส้นทางหรือเส้นโค้งที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด

ก.3 สมการออยเลอร์-ลากรางในกรณีหลายตัวแปร

ในหัวข้อ ก.2 ได้พิจารณาปัญหาการแปรผันของฟังก์ชันนอล ซึ่งขึ้นอยู่กับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรคือ ขึ้นอยู่กับเส้นโค้ง แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาที่ฟังก์ชันนอลขึ้นอยู่กับฟังก์ชันหลายตัวแปรคือ ขึ้นอยู่กับปริมาตร ซึ่งจะทำให้การหาเงื่อนไขจำเป็นสำหรับปัญหาการแปรผันฟังก์ชันนอลซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาตร

พิจารณาฟังก์ชันนอลในรูปแบบ

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_v F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz \quad (\text{ก.10})$$

เมื่อ $F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อเทียบกับตัวแปรทุกตัวและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในปริมาตร V ซึ่งเป็นปริมาตรปิดซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นที่ผิว

Γ

ทำการหาฟังก์ชันหรือปริมาตร $u(x,y,z)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $u(x,y,z)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสอง เมื่อเทียบกับ x, y และ z เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในปริมาตร V
2. $u(x,y,z)$ จะต้องมีค่าเท่ากับที่กำหนดให้บนขอบเขตพื้นผิว Γ ของปริมาตร V
3. $u(x,y,z)$ จะต้องทำให้ฟังก์ชันนอลในสมการ (ก.10) มีค่าสุดขีด (extremum)

สมมติให้ $u(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[u(x,y,z)]$ มีค่าสุดขีด และ $u(x,y,z) + \alpha \eta(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่ผันไป โดยที่ α เป็นค่าเล็กๆ (infinitesimal value) และ $u(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เจาะจงซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสองในปริมาตร V เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $\eta(x,y,z) = 0$ บนขอบเขตของปริมาตร V ดังนั้นส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปของฟังก์ชันนอล $J[u(x,y,z)]$ คือ

$$\begin{aligned} \Delta J[\eta(x,y,z)] &= J[u(x,y,z) + \alpha \eta(x,y,z)] - J[u(x,y,z)] \\ &= \iiint_V F(x, y, z, u+\alpha\eta, u_x+\alpha\eta_x, u_y+\alpha\eta_y, u_z+\alpha\eta_z) dx dy dz \\ &\quad - \iiint_V F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz \quad (\text{ก.11}) \end{aligned}$$

โดยกำหนดให้ $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ และ $\eta_{x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ เมื่อ $i=1,2,3$ แทน x, y และ z ตามลำดับ

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) กระจายพจน์แรกทางขวามือของสมการ (ก.11) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta J &= \iiint_V [F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z) + \alpha\eta \frac{\partial F}{\partial u} + \alpha\eta_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + \alpha\eta_y \frac{\partial F}{\partial u_y} + \alpha\eta_z \frac{\partial F}{\partial u_z} + \dots] dx dy dz \\ &\quad - \iiint_V F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z) dx dy dz \end{aligned}$$

โดยจุดไขว้ปลาแทนพจน์ที่มีกำลังมากกว่าหนึ่งของ η, η_x, η_y และ η_z

ดังนั้น การแปรผัน δJ คือ

$$\delta J = \iiint_v \left(\alpha \eta \frac{\partial F}{\partial u} + \alpha \eta_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + \alpha \eta_y \frac{\partial F}{\partial u_y} + \alpha \eta_z \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) dx dy dz \quad (\text{ก.12})$$

จากสมการ (ก.12) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = \iiint_v & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \eta \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \eta \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \eta \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right\} \alpha \eta \right] dx dy dz \quad (\text{ก.13}) \end{aligned}$$

ให้ \vec{G} เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีส่วนประกอบ (component) เป็น $F_{u_{x_i}} = \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}$ เมื่อ x_i แทน x, y และ

z ตามลำดับ

ดังนั้นจากสมการ (ก.13) จะได้ว่า

$$\delta J = \iiint_v \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{G} \alpha \eta) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right\} \alpha \eta \right] dx dy dz \quad (\text{ก.14})$$

ใช้ทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) ดังนั้นพจน์แรกทางขวามือของสมการ (ก.14) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{\Gamma} (\vec{G} \alpha \eta) \cdot \hat{n} ds + \iiint_v \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right\} \alpha \eta dx dy dz \quad (\text{ก.15})$$

และใช้เงื่อนไขที่ว่า $\alpha \eta(x, y, z) = 0$ บนขอบเขตพื้นผิว Γ ของปริมาตร V ดังนั้นสมการ (ก.15) จะได้ว่า

$$\delta J = \iiint_V \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right\} \alpha \eta \, dx dy dz \quad (n.16)$$

เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[u(x,y,z)]$ มีค่าสุดขีด (extremum) คือ $\delta J = 0$ และเนื่องจาก $\alpha \eta(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ดังนั้นจากสมการ (n.16) จะได้ว่า

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) = 0 \quad (n.17)$$

สมการ (n.17) เรียกว่า สมการออยเลอร์-ลากราง (Euler-Lagrange's equation) ซึ่งผลเฉลย $u(x,y,z)$ ของสมการ (n.17) นี้เป็นฟังก์ชันปริมาตรที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าสุดขีด (extremum) นั้นเอง

เนื่องจากการแก้ปัญหาค่าแปรผัน ผลเฉลยของสมการออยเลอร์-ลากราง หาได้จากการแก้สมการอนุพันธ์ แต่เนื่องจากสมการออยเลอร์-ลากราง จะหาผลเฉลยได้ง่ายเป็นบางกรณีเท่านั้น ดังนั้นจึงต้องหาวิธีอื่นเพื่อนำมาแก้ปัญหาค่าแปรผันเหล่านี้ ซึ่งวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันเรียกว่า วิธีตรง (direct method) ซึ่งวิธีตรงมีหลายวิธีด้วยกัน ในที่นี้จะขอกล่าววิธีของริทซ์เท่านั้น

ก.4 วิธีของริทซ์ (Ritz method)

พิจารณาปัญหาของการหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดของฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ โดยแนวความคิดของริทซ์ [23,28] ก็คือ พิจารณาฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันนอลที่ไม่ขึ้นกับเส้นโค้งทั่วไป แต่จะจ่งให้ขึ้นกับฟังก์ชันหรือเส้นโค้งที่ถูกเขียนอยู่ในรูปของผลบวกเชิงเส้น (linear combination)

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (n.18)$$

ซึ่ง α_i เป็นค่าคงที่ที่ยังไม่ทราบค่า ถ้าให้ $y_n(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการแล้ว $\phi_i(x)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่โจทย์กำหนด ดังนั้นเมื่อใช้ฟังก์ชันในสมการ (n.18) แล้ว ฟังก์ชันนอล $J[y_n(x)]$ จะกลายเป็นฟังก์ชันนอลที่ขึ้นกับสัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ นั่นคือ

$$J[y_n(x)] = \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \quad (n.19)$$

ดังนั้นจะทำการเลือก $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ โดยทำให้ $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด นั่นก็คือ ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y_n(x)]$ มีค่าสุดขีดนั่นเอง (extremum) โดย α_i หาได้จากสมการ

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} J[y_n(x)] = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (ก.20)$$

เมื่อแทนค่า α_i ลงในสมการ (ก.20) ก็จะได้ลำดับ $\{y_n(x)\}$ ในกรณีที่ลำดับ $\{y_n(x)\}$ เป็นลำดับที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันนอล $J[y_n(x)]$ ไล่เข้าสู่ค่าต่ำสุด หรือไล่เข้าสู่ขอบเขตล่างสุด (the greatest lower bound) ของค่าฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ นั่นคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = \min J[y(x)] \quad (ก.21)$$

ลำดับ $\{y_n(x)\}$ ดังกล่าวจะถูกเรียกว่าเป็นลำดับที่ให้ค่าน้อยที่สุด (minimizing sequence) และถ้าลำดับ $\{y_n(x)\}$ มีฟังก์ชันลิมิต (limit function) เป็น \hat{y} จะทำให้สามารถเขียนได้ว่า

$$J[\hat{y}] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = \min J[y(x)] \quad (ก.22)$$

นั่นคือ

$$J[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] \quad (ก.23)$$

และ \hat{y} ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาการแปรผัน โดยในกรณีที่ถ้าไม่ทำครบขบวนการลิมิต นั่นคือ ใช้เฉพาะ n พจน์แรกดังในสมการ (ก.18) ลำดับที่ให้ค่าน้อยที่สุดก็จะเป็นผลเฉลยโดยประมาณของการแปรผันนั้น ๆ นอกจากนี้ ความแตกต่างระหว่างค่าของฟังก์ชันนอล

$$J[y_n(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

และ

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

อาจจะน้อยมากในกรณีเมื่อ $y_n(x)$ และ $y(x)$ ใกล้เคียงกันมากในช่วงการอินทิเกรต (a,b) ถึงแม้ว่าในบางช่วงเล็ก ๆ ใน (a,b) ฟังก์ชัน $y_n(x)$ และ $y(x)$ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั้งสองจะแตกต่างกันบ้างก็ตาม

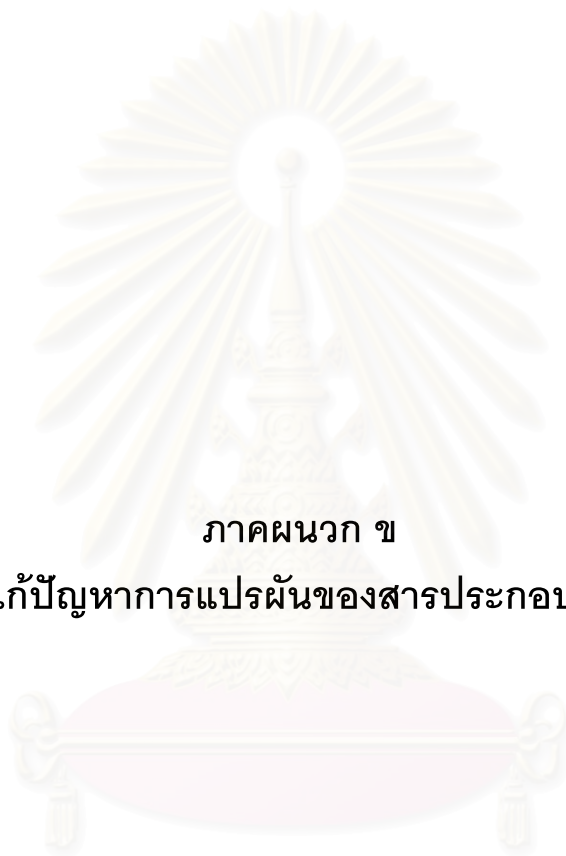
ในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลโดยวิธีการนี้ ค่าที่แท้จริงของค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลนี้จะถูกประมาณค่าจากค่าของข้างบนลงมาข้างล่าง ในทำนองเดียวกัน วิธีของวิธีนี้สามารถใช้หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันนอลได้โดยการประมาณค่าจากข้างล่างขึ้นไป นอกจากนี้ วิธีของวิธีนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้กับการหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล $J[z(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$ ซึ่งขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของหลายตัวแปรได้ โดยที่ $\{\phi_i\}$ จะต้องเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ด้วยเช่นกัน

หมายเหตุ ถึงแม้ว่าในปัญหาการแปรผัน ลำดับที่ให้ค่าน้อยที่สุด (minimizing sequence) จะมีก็ตาม นั่นคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = \min J[y(x)]$$

แต่ไม่ได้หมายความว่า ลำดับที่ให้ค่าน้อยที่สุด จะต้องมียกเว้นฟังก์ชันลิมิต \hat{y} เสมอไป [23]

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ข

โปรแกรมการแก้ปัญหาการแปรผันของสารประกอบนำไฟฟ้าเชิงเส้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(* Load vector calculus for spherical coordinate*)

```
<< "Calculus`VectorAnalysis`"
SetCoordinates[Spherical[r,  $\theta$ ,  $\phi$ ]]
```

(* Choose trial potential*)

$$\varphi_i = -c r \cos[\theta]$$

$$\varphi_m = -\left(f r - \frac{g a^3}{r^2}\right) \cos[\theta]$$

$$\varphi_e = -\left(r - \frac{d b^3}{r^2}\right) \cos[\theta]$$

(*Find local electric field*)

$$E_i = -\text{Grad}[\varphi_i]$$

$$E_m = -\text{Grad}[\varphi_m]$$

$$E_e = -\text{Grad}[\varphi_e]$$

$$A = (E_i \cdot E_i)$$

$$B = (E_m \cdot E_m)$$

$$G = (E_e \cdot E_e)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

(*Perform the integral in the inclusion*)

$$W1_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a A r^2 \sin[\theta] dr d\theta d\phi$$

$$W2_i = \text{ExpandAll}\left[\frac{W1_i}{V}\right]$$

$$W3_i = W2_i /. \left\{\frac{1}{R^3} \rightarrow p\right\}$$

$$W4_i = \text{ExpandAll}\left[\frac{W3_i}{a^3}\right]$$

$$W5_i = \text{Coefficient}[\text{Collect}[W4_i, p], p]$$

$$W6_i = W5_i /. \{c \rightarrow f - g\}$$

$$W_i = \text{ExpandAll}[W6_i]$$

(*Perform the integral in the host medium*)

$$W1_m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b B r^2 \sin[\theta] dr d\theta d\phi$$

$$W2_m = \text{ExpandAll}\left[\frac{W1_m}{V}\right]$$

$$W3_m = W2_m /. \left\{\frac{1}{R^3} \rightarrow p\right\}$$

$$W4_m = \text{ExpandAll}\left[\frac{W3_m}{a^3}\right]$$

$$W5_m = \text{Coefficient}[\text{Collect}[W4_m, p], p]$$

$$W_m = \text{ExpandAll}[W5_m]$$

(*Perform the integral in the effective medium*)

$$W1_e = \int_0^{2\pi} \int_0^x \int_b^R G r^2 \sin[\theta] dr d\theta d\phi$$

$$W2_e = \text{ExpandAll}\left[\frac{W1_e}{V}\right]$$

$$W3_e = \text{ExpandAll}\left[W2_e /. \left\{\frac{1}{R^3} \rightarrow p\right\}\right]$$

$$W4_e = \text{ExpandAll}\left[\frac{W3_e}{a^3}\right]$$

$$W5_e = \text{Coefficient}[\text{Collect}[W4_e, p], p]$$

$$W6_e = \text{ExpandAll}\left[W5_e + 2d \frac{b^3}{a^3}\right]$$

$$W7_e = \text{ExpandAll}[W6_e]$$

$$W_e = \text{ExpandAll}\left[W7_e /. \left\{d \rightarrow 1 - f + g \frac{a^3}{b^3}\right\}\right]$$

(*Total energy functional*)

$$W = \sigma_e + p (\sigma_i W_i + \sigma_m W_m + \sigma_e W_e)$$

$$W = W /. \left\{a \rightarrow b \sqrt[3]{c'}\right\}$$

(*Differentiate energy functional with respect to variational parameters*)

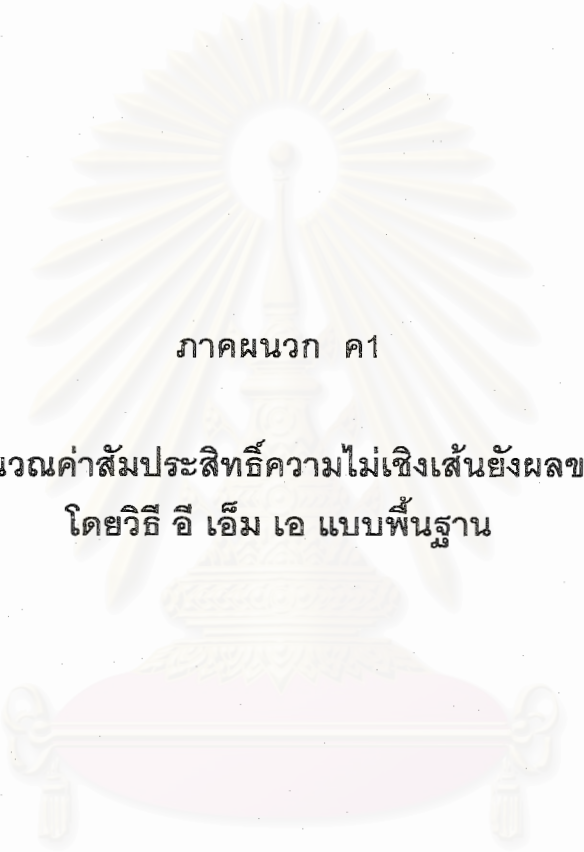
$$A = \partial_f W$$

$$B = \partial_g W$$

(*Solve two couple equation for variational parameters*)

$$\text{Solve}[\{A = 0, B = 0\}, \{f, g\}]$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ค1

โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ
โดยวิธี อี เอ็ม เอ แบบพื้นฐาน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(* Load vector calculus for cylindrical coordinate*)

```
<< "Calculus`VectorAnalysis`"
SetCoordinates[Cylindrical[r, θ, z]]
```

(* Choose trial potential*)

$$\varphi_\alpha = -c_\alpha r \cos[\theta]$$

$$\varphi_e = -\left(r - \frac{b_\alpha a^2}{r}\right) \cos[\theta]$$

(*Find local electric field*)

$$E_\alpha = -\text{Grad}[\varphi_\alpha]$$

$$E_e = -\text{Grad}[\varphi_e]$$

$$A = (E_\alpha \cdot E_\alpha)^2$$

$$B = (E_e \cdot E_e)^2$$

(*Perform the integral in the inclusion type α *)

$$W_\alpha = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^a A r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the nonlinear effective medium*)

$$W_e = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_a^R B r dr d\theta dz$$

(*Add surface energy term*)

$$W_e = W_e + 4 E_0^4 \pi a^2 \chi_e b_\alpha$$

(*Total energy functional*)

$$W = \chi_\alpha W_\alpha + \chi_e W_e$$

(*Differentiate energy functional with respect to variational parameter*)

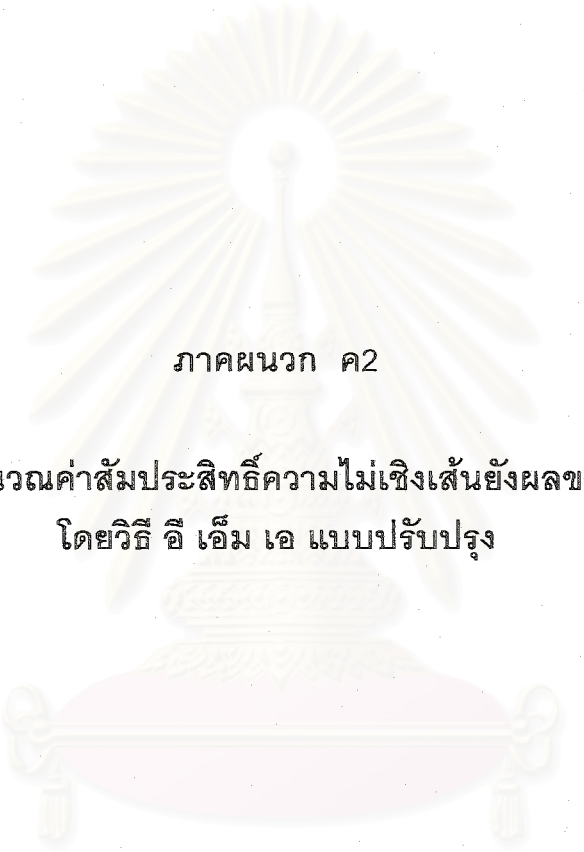
$$H = \partial_{b_\alpha} W$$

(* Rearrange last equation and solve for root of b_α , $z=y_\alpha=\chi_\alpha/\chi_e$ *)

$$b[z] = \frac{3z}{1+3z} - \frac{(2^{1/3}(18+81z)) / \left(3(1+3z)(-81-891z-2430z^2+27(1+3z)\sqrt{41+384z+900z^2})^{1/3}\right) + (-81-891z-2430z^2+27(1+3z)\sqrt{41+384z+900z^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}(1+3z)}$$

(* Use self-consistency condition, $\langle E_\alpha \rangle = \langle E_0 \rangle$, to calculate nonlinear effective medium χ_e *)

$$v_i b[\chi_i/\chi_e] + (1-v_i) b[\chi_m/\chi_e] = 0$$



ภาคผนวก ค2

โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ
โดยวิธี อี เอ็ม เอ แบบปรับปรุง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(* Load vector calculus for cylindrical coordinate*)

```
<< "Calculus`VectorAnalysis`"
SetCoordinates[Cylindrical[r,  $\theta$ , z]]
```

(* Choose trial potential*)

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= (C_{\alpha 11} r + C_{\alpha 13} r^3 + C_{\alpha 15} r^5) \cos[\theta] + \\ &\quad (C_{\alpha 31} r + C_{\alpha 33} r^3 + C_{\alpha 35} r^5) \cos[3\theta] + (C_{\alpha 51} r + C_{\alpha 53} r^3 + C_{\alpha 55} r^5) \cos[5\theta] \\ \varphi_e &= \left(r + \frac{b_{\alpha 11}}{r} + \frac{b_{\alpha 13}}{r^3} + \frac{b_{\alpha 15}}{r^5} \right) \cos[\theta] + \left(\frac{b_{\alpha 31}}{r} + \frac{b_{\alpha 33}}{r^3} + \frac{b_{\alpha 35}}{r^5} \right) \cos[3\theta] + \\ &\quad \left(\frac{b_{\alpha 51}}{r} + \frac{b_{\alpha 53}}{r^3} + \frac{b_{\alpha 55}}{r^5} \right) \cos[5\theta]\end{aligned}$$

(*Find local electric field*)

$$\begin{aligned}E_\alpha &= \text{Grad}[\varphi_\alpha] \\ E_e &= \text{Grad}[\varphi_e] \\ A &= (E_\alpha \cdot E_\alpha)^2 \\ B &= (E_e \cdot E_e)^2\end{aligned}$$

(*Perform the integral in the inclusion type α *)

$$W_\alpha = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^a A r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the nonlinear effective medium*)

$$W_e = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_a^R B r dr d\theta d\phi$$

(*Add surface energy term*)

$$W_e = W_{e1} - 4 E_0^4 \pi a^2 \chi_e b_{\alpha 11}$$

(*Total energy functional*)

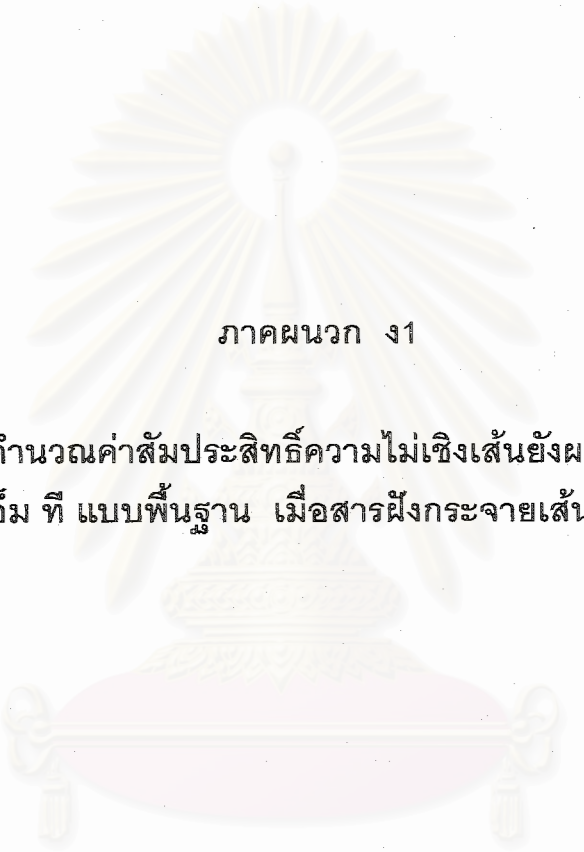
$$W = \chi_\alpha W_\alpha + \chi_e W_e$$

(*Eliminate parameter $C_{\alpha 11}, C_{\alpha 31}, C_{\alpha 51}$ and differentiate energy functional with respect to remaining variational parameters*)

$$\begin{aligned}j_1 &= \partial_{b_{\alpha 11}} W, j_2 = \partial_{b_{\alpha 13}} W, j_3 = \partial_{b_{\alpha 15}} W, j_4 = \partial_{C_{\alpha 13}} W, \\ j_5 &= \partial_{C_{\alpha 15}} W, j_6 = \partial_{b_{\alpha 31}} W, j_7 = \partial_{b_{\alpha 33}} W, j_8 = \partial_{b_{\alpha 35}} W, \\ j_9 &= \partial_{C_{\alpha 33}} W, j_{10} = \partial_{C_{\alpha 35}} W, j_{11} = \partial_{b_{\alpha 51}} W, j_{12} = \partial_{b_{\alpha 53}} W, \\ j_{13} &= \partial_{b_{\alpha 55}} W, j_{14} = \partial_{C_{\alpha 53}} W, j_{15} = \partial_{C_{\alpha 55}} W\end{aligned}$$

(*Use self-consistency condition, $\langle E \rangle_{\text{local}} = E_0$, to calculate χ_e *)

$$v_i (1 + b_{i11} + b_{i13} + b_{i15}) + (1 - v_i) (1 + b_{m11} + b_{m13} + b_{m15}) = 1$$



ภาคผนวก ง1

โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ
โดยวิธี อี เอ็ม ที แบบพื้นฐาน เมื่อสารฝังกระจายเส้นใยเป็นชนิด χ_1

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(*Load vector calculus for cylindrical coordinate*)

<< "Calculus`VectorAnalysis`"

SetCoordinates[Cylindrical[r, θ , z]]

(* Choose trial potential*)

$$\varphi_i = -c r \cos[\theta]$$

$$\varphi_m = -\left(f r - \frac{g a^2}{r}\right) \cos[\theta]$$

$$\varphi_e = -\left(r - \frac{d b^2}{r}\right) \cos[\theta]$$

(*Find local electric field*)

$$E_i = -\text{Grad}[\varphi_i]$$

$$E_m = -\text{Grad}[\varphi_m]$$

$$E_e = -\text{Grad}[\varphi_e]$$

$$A = (E_i \cdot E_i)^2$$

$$B = (E_m \cdot E_m)^2$$

$$G = (E_e \cdot E_e)^2$$

(*Perform the integral in the inclusion*)

$$W_i = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^a A r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the host medium*)

$$W_m = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_a^b B r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the nonlinear effective medium*)

$$W_e = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_b^R G r dr d\theta dz$$

(*Add surface energy term*)

$$W_e = W_{e1} + 4 E_0^4 \pi b^2 \chi_e d$$

(*Total energy functional*)

$$W = \chi_i W_i + \chi_m W_m + \chi_e W_e$$

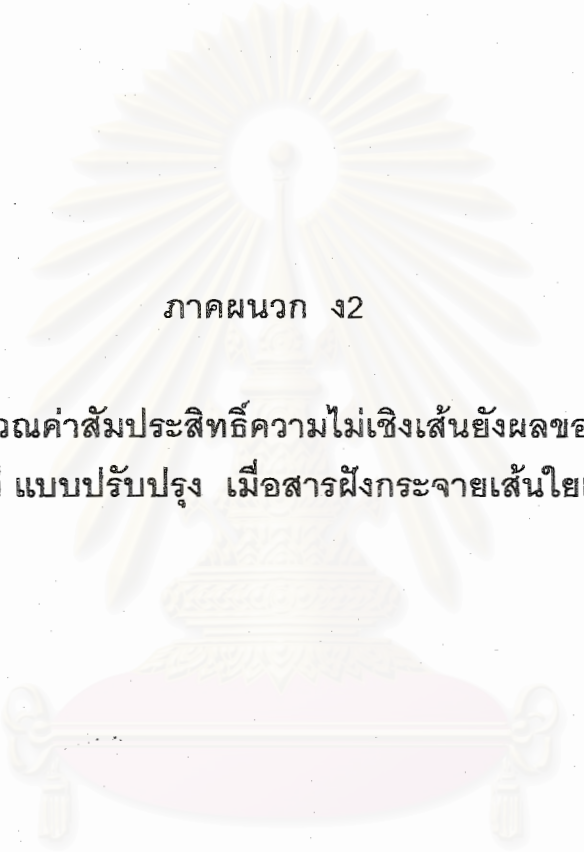
(*Eliminate variational parameters c, d and differentiate energy functional with respect to variational parameters f and g*)

$$A = \partial_f W$$

$$B = \partial_g W$$

(*Use self-consistency condition, $\langle E \rangle_{\text{cell}} = \langle E_e \rangle$ to calculate χ_e *)

$$f = 1 + \nu_i g$$



ภาคผนวก ง2

โปรแกรมการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เชิงเส้นยังผลของสารประกอบ
โดยวิธี อี เอ็ม ที แบบปรับปรุง เมื่อสารฝังกระจายเส้นใยเป็นชนิด χ_1

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(* Load vector calculus for cylindrical coordinate*)

<< "Calculus`VectorAnalysis`"

SetCoordinates[Cylindrical[r, θ , z]]

(* Choose trial potential*)

$$\varphi_i = \left(c_{11} r + \frac{c_{13} r^3}{a^2} + \frac{c_{15} r^5}{a^4} \right) \cos[\theta] +$$

$$\left(c_{31} r + \frac{c_{33} r^3}{a^2} + \frac{c_{35} r^5}{a^4} \right) \cos[3\theta] + \left(c_{51} r + \frac{c_{53} r^3}{a^2} + \frac{c_{55} r^5}{a^4} \right) \cos[5\theta]$$

$$\varphi_m = \left(f_{11} r + f_{13} \frac{r^3}{b^2} + f_{15} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos[\theta] + \left(f_{31} r + f_{33} \frac{r^3}{b^2} + f_{35} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos[3\theta] +$$

$$\left(f_{51} r + f_{53} \frac{r^3}{b^2} + f_{55} \frac{r^5}{b^4} \right) \cos[5\theta] + \left(\frac{g_{11} a^2}{r} + \frac{g_{13} a^4}{r^3} + \frac{g_{15} a^6}{r^5} \right) \cos[\theta] +$$

$$\left(\frac{g_{31} a^2}{r} + \frac{g_{33} a^4}{r^3} + \frac{g_{35} a^6}{r^5} \right) \cos[3\theta] + \left(\frac{g_{51} a^2}{r} + \frac{g_{53} a^4}{r^3} + \frac{g_{55} a^6}{r^5} \right) \cos[5\theta]$$

$$\varphi_e = \left(r + \frac{d_{11} b^2}{r} + \frac{d_{13} b^4}{r^3} + \frac{d_{15} b^6}{r^5} \right) \cos[\theta] + \left(\frac{d_{31} b^2}{r} + \frac{d_{33} b^4}{r^3} + \frac{d_{35} b^6}{r^5} \right) \cos[3\theta] +$$

$$\left(\frac{d_{51} b^2}{r} + \frac{d_{53} b^4}{r^3} + \frac{d_{55} b^6}{r^5} \right) \cos[5\theta]$$

(*Find local electric field*)

$$E_i = \text{Grad}[\varphi_i]$$

$$E_m = \text{Grad}[\varphi_m]$$

$$E_e = \text{Grad}[\varphi_e]$$

$$A = (E_i \cdot E_i)^2$$

$$B = (E_m \cdot E_m)^2$$

$$C = (E_e \cdot E_e)^2$$

(*Perform the integral in the inclusion*)

$$W_i = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^a A r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the host medium*)

$$W_m = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_a^b B r dr d\theta dz$$

(*Perform the integral in the nonlinear effective medium*)

$$W_{1e} = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_b^R C r dr d\theta d\phi$$

(*Add surface energy term*)

$$W_e = W_{1e} - 4 E_0^4 \pi b^2 \chi_e d_{11}$$

(*Total energy functional*)

$$W = \chi_e W_e + \chi_m W_m + \chi_i W_i$$

(*Eliminate variational parameters c_{11} , c_{31} , c_{51} , d_{11} , d_{31} , d_{51} and differentiate energy functional with respect to remaining variational parameters*)

$$\begin{aligned}
j1 &= \partial_{c_{13}} W, j2 = \partial_{c_{15}} W, j3 = \partial_{c_{33}} W, j4 = \partial_{c_{35}} W, \\
j5 &= \partial_{c_{53}} W, j6 = \partial_{c_{55}} W, j7 = \partial_{f_{11}} W, j8 = \partial_{f_{13}} W, \\
j9 &= \partial_{f_{15}} W, j10 = \partial_{f_{31}} W, j11 = \partial_{f_{33}} W, j12 = \partial_{f_{35}} W, \\
j13 &= \partial_{f_{51}} W, j14 = \partial_{f_{53}} W, j15 = \partial_{f_{55}} W, j16 = \partial_{g_{11}} W, \\
j17 &= \partial_{g_{13}} W, j18 = \partial_{g_{15}} W, j19 = \partial_{g_{31}} W, j20 = \partial_{g_{33}} W, \\
j21 &= \partial_{g_{35}} W, j22 = \partial_{g_{51}} W, j23 = \partial_{g_{53}} W, j24 = \partial_{g_{55}} W, \\
j25 &= \partial_{d_{13}} W, j26 = \partial_{d_{15}} W, j27 = \partial_{d_{33}} W, j28 = \partial_{d_{35}} W, \\
j29 &= \partial_{d_{53}} W, j30 = \partial_{d_{55}} W
\end{aligned}$$

(*Use self-consistency condition, $\langle E \rangle_{\text{cell}} = \langle E_e \rangle$, to calculate χ_e *)

$$\begin{aligned}
f_{11} &= 1 - v_i (f_{13} c' + f_{15} c'^2 + g_{11} + g_{13} + g_{15}) - \\
& (1 - v_i) (f_{13} (1 + c') + f_{15} (1 + c' + c'^2) - g_{13} c' - g_{15} (c' + c'^2))
\end{aligned}$$

$$\text{where } c' = \frac{a^2}{b^2}$$



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์



นายจิตริน ชัยประภา

การศึกษา

- วท.บ. จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ. ศ. 2543

ประสบการณ์

- ผู้ช่วยสอนวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์ทั่วไป 1-2
- ร่วมเสนอผลงานเชิงวิชาการในการประชุมวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งประเทศไทย (วทท.) ครั้งที่ 29
- ร่วมเสนอผลงานเชิงวิชาการในการประชุมวิชาการครั้งที่ 9 ประจำปี 2544 คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย