

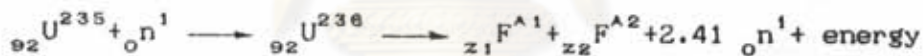


2.1 ความรู้เบื้องต้น

2.1.1 กระบวนการฟิชชัน (fission process)

กระบวนการฟิชชันถูกค้นพบโดยฮานและสตราสมานน์ (O. Hahn และ F. Strassman) ในปี พ.ศ. 2482 ฟิชชันเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเมื่อนิวเคลียสจับนิวตรอนแล้วเปลี่ยนเป็นนิวเคลียสเชิงประกอบ (compound nucleus) ซึ่งต่อมากจะแตกออกเป็นสองส่วนที่มีมวลใกล้เคียงกันและปล่อยพลังงานออกมา ประมาณ 200 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ ไอโซโทปที่สามารถเกิดฟิชชันได้กับนิวตรอนเทอร์มัลได้แก่ ยูเรเนียม-233 ยูเรเนียม-235 และพลูโทเนียม-239 ไอโซโทปอื่น ๆ ก็อาจเกิดฟิชชันได้กับนิวตรอนเทอร์มัลเช่นกัน แต่ไม่ค่อยสำคัญในแง่ของเครื่องปฏิกรณ์ สำหรับยูเรเนียม-238 และทอเรียม-232 สามารถเกิดฟิชชันได้กับนิวตรอนเร็วเท่านั้น

เมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียสของยูเรเนียม-235 ปฏิกิริยาฟิชชันที่จะเกิดขึ้น คือ



${}_{z_1}F^{A_1}$ และ ${}_{z_2}F^{A_2}$ เป็นไอโซโทปที่เกิดขึ้นเมื่อยูเรเนียมแตกตัว ผลผลิตที่เกิดขึ้นนี้จะเปลี่ยนแปลงจากค่า Z เท่ากับ 30 (Zinc) จนถึง 65 (Terbium) และค่า A จาก 70 ถึงประมาณ 160 การกระจายของมวลของฟิชชันแฟรกเมนต์ (fission fragment) หาได้จากการวัดการกระจายของพลังงานจลน์ เมื่อกำหนดให้นิวเคลียสเกิดการแตกตัวและอยู่นิ่ง จากกฎการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม จะได้ว่า

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นมวลของฟิชชันแฟรกเมนต์ และ v_1, v_2 เป็นความเร็วตามลำดับ จากการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1/2 A_1 v_1^2}{1/2 A_2 v_2^2} = \frac{A_1 v_1^2}{A_2 v_2^2}$$

ดังนั้น

$$E_1/E_2 = A_2/A_1$$

นั่นคือ พลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนแฟรกเมนต์จะเป็นปฏิภาคกลับกับมวล ในกระบวนการนิวตรอนที่แตกออกจะมีพลังงานเฉลี่ยรวมกันประมาณ 170 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ ในตาราง 2.1 แสดงพลังงานทั้งหมดที่ปลดปล่อยออกมาจากกระบวนการนิวตรอน

ตาราง 2.1 การกระจายพลังงานเฉลี่ยจากการนิวตรอนแบบเทอร์มัลของยูเรเนียม-235 (4)

พลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนแฟรกเมนต์	167	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
พลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนจากนิวตรอน	5	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
พลังงานของรังสีแกมมาที่ปล่อยออกมาทันที	7	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
พลังงานของรังสีเบตาที่สลายตัวให้อิเล็กตรอน	5	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
พลังงานของรังสีแกมมาจากนิวตรอนแฟรกเมนต์	5	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
พลังงานของรังสีเบตาที่สลายตัวให้นิวตริโน	11	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์
รวมพลังงานทั้งหมด/นิวตรอน	200	เมกะอิเล็กตรอนโวลต์

2.1.2 การปลดปล่อยนิวตรอนในกระบวนการนิวตรอน

ถ้าจำนวนนิวตรอนที่ได้จากกระบวนการนิวตรอนมีค่าเฉลี่ยน้อยกว่า 1 นิวตรอนต่อนิวตรอน ปฏิกริยาลูกโซ่ในเครื่องปฏิกรณ์ก็ไม่อาจเกิดขึ้นได้ ปริมาณ ν เป็นจำนวนเฉลี่ยของนิวตรอนที่ปลดปล่อยออกมาต่อนิวตรอนสำหรับนิวตรอนแบบเทอร์มัลของยูเรเนียม-235 ค่านี้เท่ากับ 2.416 ± 0.008 นิวตรอน/นิวตรอน (4)

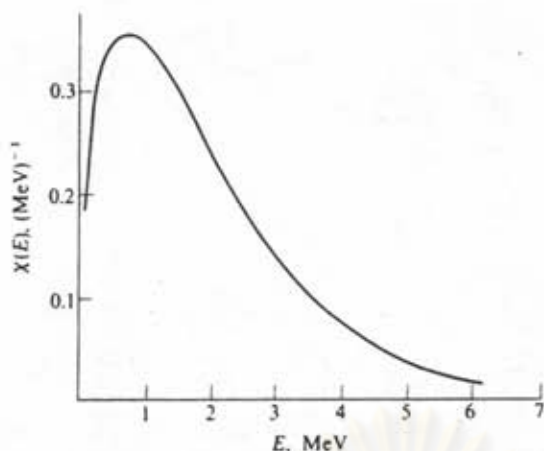
ค่า ν เปลี่ยนแปลงขึ้นกับค่าพลังงานของนิวตรอน แสดงด้วยความสัมพันธ์

$$\nu(E) = \nu_{\infty} + \frac{d\nu}{dE_n} E_n \quad (2.2)$$

เมื่อ ค่าคงที่ $(d\nu/dE_n) = 0.077$ ต่อเมกะอิเล็กตรอนโวลต์ (4) ใช้ได้กับนิวตรอนที่มีพลังงานระหว่าง 1.36 และ 5.06 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ นิวตรอนที่ปล่อยออกมาทันทีเมื่อเกิดนิวตรอนเรียกว่า พรอมพ์นิวตรอน (prompt neutron) ซึ่งเป็นนิวตรอนเร็วพลังงานเฉลี่ยประมาณ 1.98 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ (1) โดยส่วนใหญ่จะมีพลังงานประมาณ 0.73 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ (1) การกระจายพลังงานของพรอมพ์นิวตรอนแสดงในรูป 2.1 เส้นโค้งแทนด้วยสมการ (1)

$$x(E) = 0.453 e^{-1.036E} \sinh \sqrt{2.29E} \quad (2.3)$$

เมื่อ E เป็นพลังงานของนิวตรอน และ $x(E)dE$ เป็นสัดส่วนของนิวตรอนที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง E และ $E+dE$



รูป 2.1 การกระจายพลังงานของพรมพ์นิวตรอน

จำนวนเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดจากนิวตริชชันต่อนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนเรียกว่า รีเจเนอเรชันแฟกเตอร์ (regeneration factor) หรือเทอร์มัลฟิชชันแฟกเตอร์ (thermal fission factor) ใช้สัญลักษณ์ η สำหรับในเครื่องปฏิกรณ์แบบ เทอร์มัล ค่า η หาได้จาก

$$\eta = \frac{\text{จำนวนนิวตรอนเร็วที่เกิดขึ้น}}{\text{จำนวนนิวตรอนเทอร์มัลที่ถูกดูดกลืนในเชื้อเพลิง}} \quad (2.4)$$

2.1.3 ปฏิกริยาลูกโซ่ (chain reaction)

เนื่องจากในปฏิกริยานิวตริชชันจะมีนิวตรอนถูกปล่อยออกมาจากปฏิกริยาประมาณ 2.43 ตัวต่อนิวตริชชัน ปฏิกริยาลูกโซ่จึงอาจเกิดขึ้นได้ถ้าสามารถควบคุมให้นิวตรอนที่เหลือออกมาอย่างน้อย 1 ตัว ไปเหนี่ยวนำไปให้เกิดนิวตริชชันครั้งต่อไป มีโอกาสอยู่ 3 ทางที่อาจเกิดขึ้นได้ในระหว่างเกิดปฏิกริยาลูกโซ่ คือ

- (1) ปฏิกริยาที่ทำให้เกิดนิวตริชชันลดน้อยลงเมื่อเวลาผ่านไปและในที่สุดปฏิกริยานิวตริชชันก็จะหยุดลง เรียกว่าสภาวะใต้วิกฤต (sub-critical)
- (2) จำนวนของปฏิกริยาที่ทำให้เกิดนิวตริชชันที่เวลาขณะใดขณะหนึ่งเท่ากับจำนวนของปฏิกริยาที่เวลาอื่นนั่นคือ อัตราการเกิดปฏิกริยามีค่าคงที่จัดเป็นสภาวะที่เรียกว่า วิกฤต (critical) จำนวนของนิวตริชชันต่อวินาทีจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังที่ผลิตขึ้นในเครื่องปฏิกรณ์
- (3) อัตราการเกิดนิวตริชชันเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อเวลาผ่านไป ทำให้มีจำนวนนิวตรอนเพิ่มขึ้นเป็นทวีคูณเทียบกับเวลา เรียกว่าสภาวะเหนือวิกฤต (super-critical)

ปกติเครื่องปฏิกรณ์จะเดินเครื่องที่สภาวะวิกฤต ยกเว้นสำหรับตอนเริ่มเดินเครื่องครั้งแรก (start up) ตอนเปลี่ยนระดับกำลัง และตอนดับเครื่อง (shut down) การทวีคูณของนิวตรอนหรือการเพิ่มขึ้นของอัตรานิวตริชชันจะสัมพันธ์กับค่ามัลติพลีเคชันแฟกเตอร์ (multiplication factor) โดยที่

$$k_{eff} = \text{เอฟเฟกต์มัลติพลีเคชันแฟกเตอร์}$$

$$k_{eff} = \frac{\text{อัตราการผลิตนิวตรอน}}{\text{อัตราการรั่วของนิวตรอน+อัตราการดูดกลืนนิวตรอน}} \quad (2.5)$$

อัตราการผลิตสำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบเอกพันธ์ (homogeneous reactor) เป็นปฏิภาคตรงกับภาคตัดขวางของการเกิดฟิชชัน, Σ_f , และอัตราการดูดกลืนเป็นปฏิภาคตรงกับภาคตัดขวางของการดูดกลืน, Σ_a ถ้าสมมุติว่ามีเครื่องปฏิกรณ์ขนาดอนันต์ ค่ามัธยผลเคห็นแฟกเตอร์เปลี่ยนเป็น k_{∞} เนื่องจากไม่มีการรั่ว จะได้ว่า

$$k_{\infty} = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (2.6)$$

ถ้าปฏิกริยาลูกโซ่สามารถดำเนินไปได้ด้วยตัวเอง k_{∞} จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1

2.1.4 อันตรกิริยาของนิวตรอน

อันตรกิริยาระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียสเป้าหมายมีอยู่ 2 กระบวนการคือ การดูดกลืน (absorption) และ การกระเจิง (scattering) การดูดกลืนนิวตรอนอาจทำให้เกิดกระบวนการฟิชชัน (fission) หรือกระบวนการจับ (capture) เกิดเป็นไอโซโทปกัมมันตรังสี (radioisotope) หรือการปลดปล่อยอนุภาคมีประจุออกมา (charged particle emission) สำหรับการดูดกลืนนิวตรอนเทอร์มัลในวัสดุฟิสไซล์ (fissile material) อันได้แก่ ยูเรเนียม-233, ยูเรเนียม-235 และ พลูโทเนียม-239 ส่วนใหญ่จะทำให้เกิดปฏิกริยาฟิชชัน ขณะที่การดูดกลืนนิวตรอนที่เกิดในวัสดุควบคุม (control material) ได้แก่ แคดเมียม (cadmium), โบรอน (boron), แฮฟเนียม (hafnium) จะมีเฉพาะการจับเพียงอย่างเดียวโดยไม่มีการฟิชชัน ในกระบวนการกระเจิงนิวตรอนอาจมีอันตรกิริยากับนิวเคลียสได้ 2 ทาง คือ การกระเจิงแบบยืดหยุ่น (elastic scattering) และการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic scattering) ในปฏิกริยาฟิชชันของเครื่องปฏิกรณ์แบบเทอร์มัลจะต้องทำให้นิวตรอนลดความเร็ว (slow down) สู่ระดับพลังงานเทอร์มัลโดยการชนแบบยืดหยุ่นกับวัสดุเบา (light materials) เช่น น้ำธรรมดา (light water), น้ำหนักหนัก (heavy water), กราไฟต์ (graphite) และเบอริลเลียม (beryllium) ซึ่งทำหน้าที่ลดพลังงานของนิวตรอนเรียกว่าวัสดุหน่วงนิวตรอน (moderator)

ในเครื่องปฏิกรณ์แบบฟาสต์ (fast reactors) ไม่จำเป็นต้องมีวัสดุหน่วงนิวตรอนเนื่องจากพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์แบบนี้ค่อนข้างสูง ขณะที่ในแบบเทอร์มัลพลังงานของนิวตรอนส่วนมากจะเท่ากับ 0.025 อิเล็กตรอนโวลต์ ที่อุณหภูมิ 20 องศาเซลเซียส นอกจากนั้นนิวตรอนเร็วก็อาจลดพลังงานได้อย่างรวดเร็วโดยการชนแบบไม่ยืดหยุ่นกับวัสดุหนัก (heavy materials) เช่น วัสดุเชื้อเพลิงในเครื่องปฏิกรณ์ได้เช่นเดียวกัน

2.1.5 ฟลักซ์นิวตรอน (neutron flux) (2)

ฟลักซ์นิวตรอน นิยามด้วยสมการ

$$\phi = \int n(v)dv \quad (2.7)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนนิวตรอนต่อหน่วยปริมาตร v เป็นความเร็วของนิวตรอน ทารสมการ (2.7) ด้วย n_0 ทั้งสองข้าง จะได้

$$\phi = n_0 \bar{v} \quad (2.8)$$

เมื่อ \bar{v} เป็นความเร็วเฉลี่ยของนิวตรอน ฟลักซ์นิวตรอนเป็นปริมาณที่มีความสำคัญในการศึกษาเครื่องปฏิกรณ์ นิวเคลียร์ เป็นผลคูณระหว่างความหนาแน่นนิวตรอนกับความเร็ว บางครั้งแทนด้วยเทอม $n\bar{v}$ ปกติวัดในหน่วย นิวตรอน-ซม./ซม.³-วินาที หรือ นิวตรอน/ซม.²-วินาที ฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์จะมีค่าเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับชนิดและระดับกำลังของเครื่อง แต่โดยทั่วไปจะมีค่าอยู่ระหว่าง 10^{11} - 10^{15} นิวตรอน/ซม.²-วินาที

2.1.6 ความหนาแน่นอะตอม (atom density)

ความหนาแน่นอะตอม (atom density or number density) คือจำนวนอะตอมของไอโซโทป ต่อปริมาตร นิยมวัดในหน่วย อะตอม/ซม.³ และ อะตอม/บาร์น-ซม. ความหนาแน่นอะตอมคำนวณได้จากสูตร

$$N_i = \frac{\rho N_A Z_i}{W_i} \quad (2.9)$$

เมื่อ N_i เป็นความหนาแน่นอะตอมของไอโซโทปที่ i ในหน่วย อะตอม/ซม.³

ρ เป็นความหนาแน่นปกติในหน่วยกรัม/ซม.³ ของวัสดุ

Z_i เป็นจำนวนอะตอมของไอโซโทปที่ i ต่อโมเลกุลของวัสดุ

N_A เป็นเลขอาโวกาโดร (Avogadro's number) เท่ากับ $.6023 \times 10^{24}$ อะตอมต่อโมล

W_i เป็นน้ำหนักโมเลกุลของวัสดุในหน่วย กรัมต่อโมล

2.2 การคำนวณค่าคงที่ต่างๆ ของกลุ่มนิวตรอนเร็วและเรโซแนนซ์

2.2.1 การกระเจิงของนิวตรอน

นิวตรอนเป็นอนุภาคไม่มีประจุ ดังนั้นการลดความเร็วของมันในเครื่องปฏิกรณ์จึงเกิดเนื่องจากอันตรกิริยาทางนิวเคลียร์ที่เรียกว่า การกระเจิง (scattering) ทำให้นิวตรอนสูญเสียพลังงานจลน์บางส่วนไป การกระเจิงของนิวตรอนแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ การกระเจิงแบบยืดหยุ่น (elastic scattering) และการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic scattering)

การกระเจิงแบบยืดหยุ่นเป็นกลไกหลักในการลดความเร็วของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์ การคำนวณหาปริมาณพลังงานที่สูญเสียไปในการชนแบบยืดหยุ่นของนิวตรอนจะเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงาน

จลน์และ โมเมนตัมเชิงเส้น

พิจารณานิวเคลียสเป้าซึ่งอยู่ในระบบห้องปฏิบัติการ (laboratory system) และมีนิวตรอนพลังงานจลน์ E_0 มาชน หลังการชนนิวเคลียสเป้าจะเคลื่อนที่ ส่วนนิวตรอนจะมีความเร็วลดลงเป็น E และเบี่ยงเบนไปจากเส้นทางเดิมเป็นมุม θ เรียกว่า มุมกระเจิง (scattering angle) จากการพิจารณาเฉพาะการอนุรักษ์พลังงานจลน์และโมเมนตัมเชิงเส้น แสดงให้เห็นว่า (1) .

$$E = \frac{E_0}{(A-1)^2} [\cos \theta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \theta}]^2 \quad (2.10)$$

โดยที่ A เป็นน้ำหนักของนิวเคลียสเป้าในหน่วยมวลอะตอม (atomic mass unit, amu) สำหรับการชนแบบเฉียดมุม $\theta=0$ และ $E=E_0$ นั่นคือไม่มีพลังงานถ่ายเทไปที่นิวเคลียสเป้า ส่วนในการชนแบบตรงเป้า (head-on collision) คือมุม $\theta=180$ องศา นิวตรอนจะมีพลังงานลดลงเป็น

$$E = \alpha E_0 \quad (2.11)$$

เมื่อ $\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2$ เรียกว่า คอลลิชันพารามิเตอร์ (collision parameter) การชนชนิดนี้จะเกิดการถ่ายเทพลังงานได้สูงสุดจากนิวตรอนไปยังนิวเคลียสของตัวหน่วงและเป็นการสูญเสียพลังงานจลน์สูงสุดที่เป็นไปได้ในการชนหนึ่งครั้งของนิวตรอน ค่าสัดส่วนการสูญเสียพลังงานสูงสุด (maximum fractional energy loss), $(\Delta E/E_0)_{\max}$ แสดงด้วยสมการ

$$(\Delta E/E_0)_{\max} = 1-\alpha \quad (2.12)$$

สำหรับในช่วงของมุมกระเจิง $0 < \theta < 180$ สัดส่วนการสูญเสียพลังงานมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ $1-\alpha$

$$0 < \Delta E/E_0 < 1-\alpha \quad (2.13)$$

การพิจารณามุมกระเจิงของนิวตรอนปกติจะทำในระบบศูนย์กลางมวล (center of mass system) ซึ่งโมเมนตัมเชิงเส้นรวมเป็นศูนย์ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงในระบบศูนย์กลางมวล (θ) กับมุมกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการ (θ) คือ (3)

$$\cos \theta = \frac{1 + A \cos \theta}{(1 + A^2 + 2A \cos \theta)^{1/2}} \quad (2.14)$$

จากการทดลองพบว่านิวตรอนที่มีพลังงานสูงไม่เกิน 2-3 เมกะอีเล็กตรอนโวลต์ จะมีการกระเจิงแบบยัดหยุ่นในระบบศูนย์กลางมวลเป็นแบบไอโซโทรปิก (isotropic) คือโอกาสของการกระเจิงเข้าสู่มุมตันใดๆ $d\Omega$ มีค่าคงที่ สมมติ $p(\theta)d\Omega$ แทนโอกาสของการกระเจิงเข้าสู่มุมตัน $d\Omega$ รอบมุม θ ถ้าการกระเจิงเป็นแบบไอโซโทรปิก

$$p(\theta) = \text{ค่าคงที่} = 1/4\pi \quad (2.15)$$

ผลรวมของโอกาสของการกระเจิงเข้าสู่มุมตันต่าง ๆ เท่ากับ 1 นั่นคือ

$$\int_{4\pi} p(\theta) d\Omega = 1 \quad (2.16)$$

เมื่อแทนการกระจายของมุมกระเจิงเป็นการกระจายของพลังงานในเทอมของโอกาส ถ้าให้ $P(E' \rightarrow E) dE$ เป็นโอกาสของการกระเจิงจากพลังงาน E' เข้าสู่ช่วงพลังงาน dE รอบค่า E จะได้ว่า

$$P(E' \rightarrow E) dE = P(\theta) d\Omega \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} P(E' \rightarrow E) dE &= \frac{dE}{E'(1-\alpha)}, & \alpha E' \leq E \leq E' \\ &= 0, & \text{ที่ } E \text{ ค่าอื่นๆ} \end{aligned} \quad (2.18)$$

สำหรับการกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการไม่จำเป็นต้องเป็นไอโซโทรปิกเสมอไปเนื่องจากแสดงได้ว่า ค่าเฉลี่ยของ $\cos \theta$ มีค่าเท่ากับ $2/3A$ (4) สำหรับพลาสมา (light elements) ในระบบห้องปฏิบัติการการกระเจิงจะเป็นแบบกระเจิงไปข้างหน้า (forward scattering) ในการปรับแก้การกระเจิงไปข้างหน้าถ้าไม่คำนวณโดยใช้เทอมโอกาสของการกระเจิง (scattering probability) ก็มักจะคำนวณโดยใช้เทอมเส้นทางอิสระเฉลี่ยแบบทรานสปอร์ต (transport mean free path) ซึ่งสัมพันธ์กับเส้นทางอิสระเฉลี่ยของการกระเจิง (scattering mean free path) ด้วยสมการ (8)

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_e}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad (2.19)$$

สัดส่วนการสูญเสียพลังงาน ($\Delta E/E_0$) จะไม่ขึ้นกับค่าพลังงานเริ่มต้น E_0 เนื่องจาก $\Delta E/E$ แปรผันกับ $-\Delta(\log E)$ ในการคำนวณได้กำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นเรียกว่า เลทาร์จี (Lethargy, u) (7) โดยให้

$$du = -dE/E = -d(\log E) \quad (2.20)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad u = -\int_{E^*}^E \frac{dE}{E} = \log E^*/E \quad (2.21)$$

เมื่อ E^* เป็นค่าอ้างอิงเริ่มต้นซึ่งเป็นค่าคงที่ปกติมีค่าเป็น 10 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ การเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของค่า $\log E$ ระหว่างการชนที่ติดกันเรียกว่า ค่าเฉลี่ยของการลดพลังงานแบบลอการิทึมต่อการชน (average logarithmic energy decrement per collision) ปกติจะแทนด้วยสัญลักษณ์ ξ โดยที่

$$\begin{aligned}\xi &= \overline{\Delta(\log E)} \\ &= \overline{\log E_n - \log E_{n+1}} \\ &= \overline{\Delta u}\end{aligned}\quad (2.22)$$

เนื่องจากค่าเฉลี่ยของการเพิ่มเลขาร์จิกที่ กำหนดให้ ξ หลังการชน n ครั้งมีค่าเท่ากับค่า ξ หลังการชนครั้งแรก

$$\xi = \overline{\log(E_0/E)} = \int_{\alpha E_0}^{E_0} \log(E_0/E) P(E_0 \rightarrow E) dE \quad (2.23)$$

ใช้เงื่อนไขสำหรับ $P(E' \rightarrow E)$ ตามสมการ (2.18) จะได้

$$\xi = 1 + \frac{\alpha \log \alpha}{1-\alpha} \quad (2.24)$$

อธิบายการกระจายของโอกาส ในเทอมของเลขาร์จิก ใช้ข้อกำหนด

$$P(u' \rightarrow u) du = P(E' \rightarrow E) dE \quad (2.25)$$

$P(u' \rightarrow u) du$ แทนโอกาสของการกระเจิงจากเลขาร์จิก u' สู่ช่วงเลขาร์จิก du รอบค่า u จะได้ว่า

$$\begin{aligned}P(u' \rightarrow u) du &= \frac{e^{u'-u} du}{1-\alpha}, & u' \leq u \leq u'+du\alpha \\ &= 0, & u \text{ ที่ค่าอื่น}\end{aligned}\quad (2.26)$$

สำหรับกระบวนการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นของนิวตรอน ผลที่เกิดขึ้นก็ต้องแสดงในเทอมของการกระจายโอกาสอันหนึ่งใช้สัญลักษณ์ $K_j(u' \rightarrow u) du$ หมายถึงโอกาสที่นิวตรอนตัวหนึ่งอยู่ที่เลขาร์จิก u' จะกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นจากนิวเคลียสชนิดที่ j แล้วเปลี่ยนมาอยู่ในช่วงเลขาร์จิก du รอบค่า u ในการคำนวณตามทฤษฎีของค่า $K_j(u' \rightarrow u)$ วางอยู่บนพื้นฐานความรู้ทางนิวเคลียร์ฟิสิกส์ แต่ในที่นี้จะยึดถือเอาข้อมูลจากการทดลองเป็นเกณฑ์

2.2.2 การลดความเร็วในตัวกลางขนาดอนันต์ (7,8)

เงื่อนไขในการพิจารณาเป็นตัวกลางขนาดอนันต์ประกอบด้วยไอโซโทปเดียว ไม่คิดการดูดกลืนนิวตรอน กำหนดให้กลุ่มนิวตรอนที่เกิดขึ้นมีเพียงเลขาร์จิกเดียว คือ $u=u_0$ มีอัตราการเกิดเท่ากับ q_0 นิวตรอนต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลา ทำให้ไม่มีการลดความเร็วสำหรับเลขาร์จิกอื่น ๆ ที่มากกว่าช่วงการชนครั้งแรก คือ $u > u_0 + 1/\alpha$ นอกจากนี้ในช่วงการชนครั้งแรก จำนวนนิวตรอน q_0 ตัวต่อหน่วย

ปริมาณต่อหน่วยเวลา จะมีการชนที่เลทาร์จี u_0 และโอกาสที่จะกระเจิงไปสู่ช่วงเลทาร์จี du รอบค่า u คือ $\exp(-u_0)/(1-\alpha)du$ ดังนั้น

$$\Sigma_0(u)\phi(u) = \int_{u_0}^u \Sigma_0(u')\phi(u') \frac{e^{-(u'-u)}}{1-\alpha} du' + \frac{q_0 e^{-u_0}}{1-\alpha}, \quad u_0 + \ln 1/\alpha > u > u_0 \quad (2.27a)$$

$$\Sigma_0(u)\phi(u) = \int_{u+\ln\alpha}^u \Sigma_0(u')\phi(u') \frac{e^{-(u'-u)}}{1-\alpha} du', \quad u > u_0 + \ln 1/\alpha \quad (2.27b)$$

ฟังก์ชัน $\Sigma_0(u)\phi(u)$ เป็นความหนาแน่นของการชนกระเจิง (scattering collision density) นั่นคือ $\Sigma_0(u)\phi(u)du$ เป็นจำนวนของการชนกระเจิงต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลาในช่วงเลทาร์จี du รอบจุด u ส่วนความหนาแน่นของการลดความเร็ว $q(u)$ หมายถึงจำนวนนิวตรอนต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลา ที่ลดความเร็วลงโดยมีเลทาร์จีสูงกว่า u สำหรับในช่วงการชนครั้งแรกมีนิวตรอน q_0 ตัวที่เกิดการชนกระเจิงต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลา ที่เลทาร์จี u_0 ส่วนโอกาสของนิวตรอนที่กระเจิงจากเลทาร์จี u' ไปยังเลทาร์จีมากกว่า u จะมีค่าเท่ากับ $(e^{u'-u}-\alpha)/(1-\alpha)$ จะได้ว่า

$$q(u) = \int_{u_0}^u \Sigma_0(u')\phi(u') \frac{e^{u'-u}-\alpha}{1-\alpha} du' + q_0 \frac{e^{u_0-u}-\alpha}{1+\alpha}, \quad u \geq u_0 + \ln 1/\alpha \quad (2.28a)$$

และ

$$q(u) = \int_{u+\ln\alpha}^u \Sigma_0(u')\phi(u') \frac{e^{u'-u}-\alpha}{1-\alpha} du', \quad u > u_0 + \ln 1/\alpha \quad (2.28b)$$

คำตอบของสมการ (2.27) คือ

$$F_n(u) = \int_{u+\ln\alpha}^{-\ln(1-\alpha)} F_n(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + \int_{-\ln(1-\alpha)}^u F_n(u') e^{u'-u} du' \quad (2.29)$$

เมื่อ $F_n(u)$ เป็นความหนาแน่นการชน ในช่วงการชนครั้งที่ n [$u_0 + (1-n)\ln\alpha, u_0 - n\ln\alpha$] ในช่วงการชนครั้งแรก

$$F_1(u) = \frac{q_0 e^{u/(1-\alpha)}}{1-\alpha} \quad (2.30)$$

สำหรับที่ n ค่าสูงคำตอบมีความยุ่งยากมาก แต่เนื่องจากคำตอบมีความราบเรียบยิ่งขึ้นเมื่อ n เพิ่มขึ้นจึงกำหนด $F_{n-1}(u) \propto F_n(u)$ ที่ u มีค่ามาก

$$F_n(u) = \int_{u+\ln\alpha}^u F_n(u) \frac{e^{u'-u}-\alpha}{1-\alpha} du' \quad (2.31)$$

$$F_n(u) = \Sigma_{\sigma}(u)\phi(u) \quad (2.32)$$

ส่วนเทอม ความหนาแน่นของการลดความเร็ว

$$q(u) = \xi \Sigma_{\sigma}(u) \phi(u) \quad (2.33)$$

สำหรับกรณีตัวกลางขนาดอนันต์ซึ่งประกอบด้วยไอโซโทป N ชนิดผสมกลมกลืนกัน ถ้าไม่พิจารณาการดูดกลืนจะได้ว่า สำหรับในช่วงเลขาร์จี้ ($u \gg u_{\sigma} - \ln \alpha_i$)

$$\Sigma_{\sigma}(u)\phi(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u+1n\alpha_i}^u \Sigma_{\sigma_i}(u')\phi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_i} du' \quad (2.34)$$

และ

$$q(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u+1n\alpha_i}^u \Sigma_{\sigma_i}(u')\phi(u') \frac{e^{u'-u-\alpha_i}}{1-\alpha_i} du' \quad (2.35)$$

เมื่อ Σ_{σ_i} เป็นภาคตัดขวางมหภาคของการกระเจิงของไอโซโทปที่ i

$$\Sigma_{\sigma}(u) = \sum_{i=1}^N \Sigma_{\sigma_i}(u) \quad (2.36)$$

คำตอบของสมการที่ (2.34) และ (2.35) คือ

$$\Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u) = C_i \quad (2.37)$$

โดยที่ C_i เป็นค่าคงที่

$$\text{และ} \quad q(u) = \bar{\xi}(u)\Sigma_{\sigma}(u)\phi(u) \quad (2.38)$$

โดยที่

$$\bar{\xi}(u) = \frac{1}{\Sigma_{\sigma}(u)} \sum_{i=1}^N \xi_i \Sigma_{\sigma_i}(u) \quad (2.39)$$

เมื่อพิจารณาการดูดกลืน สมการ (2.35) จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง ส่วนสมการ (2.34) เปลี่ยนเป็น

$$\Sigma_{\sigma}(u)\phi(u) = \sum_{i=1}^N \int_{u+1n\alpha_i}^u \Sigma_{\sigma_i}(u')\phi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_i} du' \quad (2.40)$$

เมื่อ

$$\Sigma_{\epsilon_i}(u) = \sum_{i=1}^N \Sigma_{\epsilon_i}(u) \quad (2.41)$$

และ $\Sigma_{\epsilon_i}(u)$ เป็นค่าภาคตัดขวางมหภาครวม สำหรับไอโซโทปที่ i นั่นคือ

$$\Sigma_{\epsilon_i}(u) = \Sigma_{\sigma_i}(u) + \Sigma_{\alpha_i}(u) \quad (2.42)$$

โดยการใช้เงื่อนไขว่า การเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นของการชนกระเจิงมีค่าน้อยภายในช่วงการชนหนึ่ง เช่นในกรณี $\Sigma_{\alpha} \ll \Sigma_{\sigma}$ ดังนั้นจึงใช้การประมาณ

$$\Sigma_{\sigma_i}(u')\phi(u') = \Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u) + (u'-u)\frac{d}{du}[\Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u)] \quad (2.43)$$

แทนสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.34) จะได้

$$q(u) \propto \sum_{i=1}^N \{ \xi_i \Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u) - \xi_i \gamma_i \frac{d}{du}[\Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u)] \} \quad (2.44)$$

เมื่อ

$$\gamma_i = 1 - \alpha_i \frac{\ln^2 \alpha_i}{2\xi_i(1-\alpha_i)} \quad (2.45)$$

การประมาณครั้งแรก โดยการตัดเทอมอนุพันธ์ในสมการ (2.44) เปลี่ยนเป็น

$$q(u) = \sum_{i=1}^N \xi_i \Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u) - \bar{\gamma}(u) \frac{dq(u)}{du} \quad (2.46)$$

เมื่อ

$$\bar{\gamma}(u) = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i \gamma_i \frac{d}{du}[\Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u)]}{\sum_{i=1}^N \xi_i \frac{d}{du}[\Sigma_{\sigma_i}(u)\phi(u)]} \quad (2.47)$$

ถ้าไม่มีการดูดกลืน ความหนาแน่นของการลดความเร็วจะมีค่าคงที่ คือ $q(u) = q(u_0)$ เมื่อมีการดูดกลืน การเปลี่ยนแปลงของค่าความหนาแน่นของการลดความเร็วก็ขึ้นอยู่กับ การที่นิวตรอนสูญหายไปโดยการดูดกลืน

$$\frac{dq(u)}{du} = -\Sigma_a(u)\phi(u) \quad (2.48)$$

แทนความล้มพันธ์ี่ลงในสมการ (2.46) และโดยการประมาณให้ $\bar{v}(u) = \bar{v}(u)$ (8) จะได้

$$q(u) = \bar{v}(u)\Sigma_c(u)\phi(u) \quad (2.49)$$

ถ้าใช้ผลลัพธ์นี้ในสมการ (2.48) จะได้ว่า

$$q(u) = q(u_0) p(u;u_0) \quad (2.50)$$

$$\text{เมื่อ } p(u;u_0) = \exp \left[\frac{-\int_{u_0}^u \Sigma_a(u') du'}{\bar{v}(u)\Sigma_c(u')} \right] \quad (2.51)$$

เรียกว่าโอกาสของการหนีผ่านช่วงเรโซแนนซ์ (resonance escape probability) ในตัวกลางที่มีการดูดกลืน

2.2.3 สมการการแพร่กระจายชนิดหลายกลุ่ม (Multigroup diffusion equation)

สมมติให้แกนกลางของเครื่องปฏิกรณ์ประกอบด้วย N ไอโซโทป สมการการแพร่กระจายที่สถานะคงตัว (steady state) เมื่อเขียนในเทอมของเลขาร์จี จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D(\underline{r}, u) \nabla \tilde{\phi}(\underline{r}, u) + \Sigma_c(\underline{r}, u) \tilde{\phi}(\underline{r}, u) \\ & = \sum_{l=1}^N \int_{u+l\alpha_l}^u \Sigma_{g,l}(u') \tilde{\phi}(\underline{r}, u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha_l} du' + \sum_{l=1}^N \int_0^u \Sigma_{ln,l}(u') K(u'-u) \tilde{\phi}(\underline{r}, u') du' \\ & \quad + \nu X(u) \int_0^u \Sigma_f(u') \tilde{\phi}(\underline{r}, u') du' \end{aligned} \quad (2.52)$$

สองเทอมแรกทางขวาของสมการ แสดงการกระเจิงแบบยืดหยุ่น และไม่ยืดหยุ่น ตามลำดับ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย $D(\underline{r}, u)$ คำนวณจาก

$$D(\underline{r}, u) = 1/3 \lambda_{tr}(\underline{r}, u) \quad (2.53)$$

และจากการกำหนดว่าค่าภาคตัดขวางมหภาครวมไม่ได้รวมเอาค่าภาคตัดขวางของการดูดกลืนในช่วงรีโซลเวเรโซแนนซ์ (resolved resonance) โดยจะเพิ่มเข้าไปในตอนหลังแต่จะรวมเอาส่วนราบเรียบ

(smooth) ของการดูดกลืนในช่วงอันริโซเรโซแนนซ์ (unresolved resonance) โดยการใช้ผลลัพธ์ของ asymptotic reactor approximation ซึ่งค่าภาคตัดขวางไม่ขึ้นกับตำแหน่ง (r) ภายในรีเจียน (region) ที่มีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับค่าระยะการแพร่กระจายประจำกลุ่ม (group diffusion length) ในกรณีนี้การกระจายของฟลักซ์สามารถพิจารณาแยกกันได้ระหว่างตำแหน่งกับเลขาร์จี คือ

$$\tilde{\phi}(\underline{r}, u) = G(r)\phi(u) \quad (2.54)$$

เมื่อ $G(r)$ เป็นไปตามสมการเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz equation)

$$\nabla^2 G(r) + B_g^2 G(r) = 0 \quad (2.55)$$

B_g^2 คือบัคคลิง เป็นคุณลักษณะของรีเจียนของเครื่องปฏิกรณ์ที่กำลังศึกษา สมการ (2.52) กลายเป็น

$$\begin{aligned} & [D(u)B_g^2 + \Sigma_c(u)]\phi(u) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{u+\lambda_i}^u \Sigma_{g_i}(u')\phi(u') \frac{e^{-u'-u}}{1-\alpha_i} du' + \sum_{i=0}^N \int_0^u \Sigma_{in,i}(u')K(u'-u)\phi(u')du' + S(u) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\text{โดยที่ } S(u) = \nu\chi(u) \int_0^u \Sigma_f(u')\phi(u')du' \quad (2.57)$$

โดยการกำหนดว่าการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นและการปรากฏของเทอม DB_g^2 (คือการที่เครื่องปฏิกรณ์มีขนาดจำกัดแทนที่จะเป็นอนันต์) จะไม่ทำให้ $\phi(u)$ แตกต่างจากคำตอบในระบบอนันต์โดยเฉพาะการที่กำหนดให้ความหนาแน่นของการชนกระเจิงแบบยืดหยุ่นเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ภายในแต่ละช่วงของการชน ดังนั้นจึงสามารถกระจาย

$$\Sigma_{g_i}(u')\phi(u') = \Sigma_{g_i}(u)\phi(u) + (u'-u) \frac{d}{du} [\Sigma_{g_i}(u)\phi(u)] \quad (2.58)$$

แทนลงในสมการ (2.55) จะได้

$$\begin{aligned} [D(u)B_g^2 + \Sigma_c(u)]\phi(u) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \Sigma_{g_i}(u)\phi(u) - \xi_i \frac{d}{du} [\Sigma_{g_i}(u)\phi(u)] \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^u \Sigma_{in,i}(u')K_i(u'-u)\phi(u')du' + S(u) \end{aligned} \quad (2.59)$$

จากกรณีตัวกลางอนันต์ ได้นิยามความหนาแน่นของการลดความเร็ว $q_0(u')$

$$q_0(u') \equiv \sum_{i=1}^N \xi_i \Sigma_{g_i}(u')\phi(u') \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i(u')\phi(u') = \beta(u')\phi(u') \quad (2.60)$$

แทนลงในสมการ (2.59) จะได้

$$\gamma(u)\phi(u) = -\frac{d}{du} q_0(u) + \sum_{i=1}^N \int_0^u \Sigma_{i,n,i}(u') K_i(u' \rightarrow u) \phi(u') du' + S(u) \quad (2.61)$$

โดยที่ $\gamma(u) = \Sigma_a(u) + \Sigma_{i,n}(u) + D(u) B^2$ (2.62)

สมการ (2.61) ใช้เพื่อพัฒนาสมการหลายกลุ่มโดยการแบ่งช่วงเลขาร์จออกเป็นกลุ่มย่อย (microgroup) ที่ติดกัน $(u_0=0, u_1)$ (u_1, u_2) (u_2, u_3) ... (u_{n-1}, u_n) แล้วอินทิเกรตสมการ (2.61) ภายในแต่ละกลุ่มย่อย โดยการกำหนดพังก์ชันของกลุ่มย่อย

$$\phi = \int_{u_{n-1}}^{u_n} \phi(u) du \quad (2.63)$$

จะได้ว่า

$$\gamma_n \phi_n = -\beta(u_n) \phi(u_n) + \beta(u_{n-1}) \phi(u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^N \Sigma_i(k \rightarrow n) \phi_k + S_n \quad (2.64)$$

จากสมการข้างบน γ_n เป็นค่าเฉลี่ยของ γ_u ภายในกลุ่มย่อย (u_{n-1}, u_n)

$$\phi_n = \int_{u_{n-1}}^{u_n} \gamma(u) \phi(u) du \quad (2.65)$$

$\Sigma_i(k \rightarrow n)$ เป็นภาคตัดขวางเคลื่อนย้ายแบบไม่ยืดหยุ่น สำหรับไอโซโทปที่ i จากกลุ่มย่อยที่ k ไปยังกลุ่มย่อยที่ n โดยนิยามว่า

$$\int_{u_{n-1}}^{u_n} \int_0^u \Sigma_{i,n,i}(u') K'_i(u' \rightarrow u) \phi(u') du' du = \sum_{k=1}^{n-1} \Sigma_i(k \rightarrow n) \phi_k \quad (2.66)$$

สำหรับการประมาณการจับที่ช่วงเรโซแนนซ์ในสมการล่าสุด โดยการกำหนดว่าความเบี่ยงเบนของ $q_0(u)$ จากค่าที่ได้จากสมการ (2.60) จะเป็นผลเนื่องจากการดูดกลืนในช่วงเรโซแนนซ์เกือบทั้งหมด ถ้า $\Sigma_{ar}(u)$ แทนภาคตัดขวางมหภาคในช่วงเรโซแนนซ์ จะได้

$$\frac{d}{du} q_0(u) = -\Sigma_{ar}(u) \phi(u) \quad (2.67)$$

ทำการอินทิเกรตภายในกลุ่มย่อย จะได้

$$q_o(u_n) - q_o(u_{n-1}) = \Sigma_{arn} \phi_n \quad (2.68)$$

เมื่อ

$$\Sigma_{arn} \phi_n = \int_{u_{n-1}}^{u_n} \Sigma_{ar}(u) \phi(u) du \quad (2.69)$$

เป็นค่าเฉลี่ยของการจับที่เรโซแนนซ์ในกลุ่มย่อย แต่การจับที่เรโซแนนซ์ในกลุ่มย่อยสามารถเขียนในเทอมของโอกาสของการหนีผ่านช่วงเรโซแนนซ์ ถ้าไม่มีการจับที่เรโซแนนซ์ในกลุ่มย่อยค่าความหนาแน่นของการลดความเร็วที่ u_n ควรเท่ากับค่านี้ที่ u_{n-1} แต่สำหรับการจับที่รุนแรงในช่วงของกลุ่มย่อย ความหนาแน่นของการลดความเร็วที่ u_n จะลดลงด้วยเทอมของโอกาสของการหนี, P_n ที่กลุ่มย่อยที่ n

$$q_o(u_n) = P_n q_o(u_{n-1}) \quad (2.70)$$

ถ้ารวมสมการ (2.68) และ (2.70) จะพบว่า

$$\Sigma_{arn} \phi_n = (1 - P_n) q_o(u_{n-1}) = (1 - P_n) \beta(u_{n-1}) \phi(u_{n-1}) \quad (2.71)$$

ในที่สุดโดยการรวมส่วนของรีโซลเรโซแนนซ์, $\Sigma_{arn} \phi_n$ เข้ากับ อันริโซลเรโซแนนซ์ จะได้

$$\chi_n \phi_n = -\beta(u_n) \phi(u_n) + P_n \beta(u_{n-1}) \phi(u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \Sigma_l(k \rightarrow n) \phi_k + S_n \quad (2.72)$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ต้องการ การแก้สมการหาคำตอบทำได้โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข

2.2.4 การคำนวณในโมดูล FARCON

ใช้สมการ (2.72) เริ่มโดยหาความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์กลุ่มย่อย (micro-group flux, ϕ_n) กับ ฟลักซ์ที่จุดปลายของเลทาร์จิสของกลุ่มย่อยนั้น, $\phi(u_n)$ เมื่อกำหนดให้ช่วงเลทาร์จิสของกลุ่มย่อยมีขนาดเล็กพอ ทำให้สามารถใช้วิธีการปิซอยด์ลควาดราเจอร์ (trapezoidal quadrature) อย่างง่ายได้

$$\phi_n = \frac{[\phi(u_n) + \phi(u_{n-1})] \Delta u_n}{2} \quad (2.73)$$

เมื่อ $\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$

ดังนั้น $\phi(u_n) = \lambda_n \phi_n - \phi(u_{n-1}) \quad (2.74)$

เมื่อ $\lambda_n = 2/u_n$ ถ้าแทนสมการนี้ลงในสมการ (2.72) จะได้ว่า

$$\phi_n = \{ [\beta(u_n) + p_n \beta(u_{n-1})] \phi(u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^N \Sigma_i (k-n) \phi_k + S_n \} [\gamma_n - \lambda_n]^{-1} \quad (2.75)$$

โดยให้ $u_0 = 0$ และกำหนด $\phi(0) = 0$ จะได้ว่า

$$\phi_1 = \frac{S_1}{\gamma_1 + \lambda_1 \beta(u_1)} \quad (2.76)$$

ค่า ϕ_1 จากสมการ (2.76) จะเป็นค่าเริ่มต้น ทำให้สามารถคำนวณค่า ϕ_n และ $\phi(u_n)$ โดยวิธีเรียกใช้ตัวเองจากสมการ (2.74) และ (2.75)

เนื่องจากโมเดล FARCON ประกอบด้วย 33 กลุ่มย่อย ทำให้สามารถคำนวณค่าพังก์ชันของกลุ่มย่อยทั้ง 33 กลุ่มได้จากกลุ่มย่อยทั้งหมดจัดรวมเป็นกลุ่มใหญ่เพียง 2 กลุ่ม คือกลุ่มนิวตรอนเร็ว (fast group) และกลุ่มเรโซแนนซ์ (resonance group) โดยสามารถคำนวณค่าพังก์ชันของกลุ่มใหญ่ได้จาก

$$\phi_1 = \sum_{g=1}^{15} \phi_g \quad \text{สำหรับกลุ่มนิวตรอนเร็ว} \quad (2.77)$$

$$\phi_2 = \sum_{g=16}^{33} \phi_g \quad \text{สำหรับกลุ่มนิวตรอนเรโซแนนซ์} \quad (2.78)$$

สำหรับการคำนวณค่าคงที่ประจำกลุ่มใหญ่ (group constants) ชนิดต่างๆ เมื่อกำหนด $j=1,2$ แทนกลุ่มนิวตรอนเร็วและเรโซแนนซ์ ตามลำดับ

คำนวณค่าคงที่ของการแพร่กระจาย (diffusion constants)

$$\bar{D}_j = \sum_{g=k_j}^{I_j} D_g \phi_g \quad (2.79)$$

โดยที่ D_g เป็นค่าคงที่ของการแพร่กระจายสำหรับกลุ่มย่อยที่ g คำนวณได้จาก

$$D_g = 3 \left[\sum_{i=1}^N \Sigma_{a,g,i}^* + \Sigma_{r,g,i} (1 - \bar{\mu}_i) + \Sigma_{f,g,i} \right]^{-1} \quad (2.80)$$

คำนวณภาคตัดขวางของการดูดกลืนสำหรับกลุ่มใหญ่ ที่ 1 (fast group)

$$\bar{\Sigma}_{a,1} = \sum_{g=1}^{15} \Sigma_{a,g} \phi_g / \phi_1 \quad (2.81)$$

สำหรับกลุ่มใหญ่ ที่ 2 (resonance group)

$$\bar{\Sigma}_{a2} = \sum_{g=16}^{33} [\Sigma_{ag}^m \phi_g + (1-p_g) \phi(u_g) \beta(u_{g-1})] / \phi_2 \quad (2.82)$$

คำนวณค่าเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดใหม่ในแต่ละกลุ่มย่อย

$$(\nu \Sigma_f)_j = \sum_{g=kj}^{lj} \nu_g \Sigma_{fg} \phi_g / \phi_j \quad (2.83)$$

คำนวณค่าพลังงานเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในแต่ละกลุ่มย่อย

$$(K \Sigma_f)_j = \sum_{g=kj}^{lj} K_g \Sigma_{fg} \phi_g / \phi_j \quad (2.84)$$

โดยที่ k_j เท่ากับ 1 และ 16 เมื่อ $j=1$ และ 2 ตามลำดับ
และ l_j เท่ากับ 15 และ 33 เมื่อ $j=1$ และ 2 ตามลำดับ

$$\Sigma_{a0.g}^m \phi_g = \int_{u_{g-1}}^{u_g} \Sigma_{a0.g}^m(u) \phi(u) du \quad (2.85)$$

$$\Sigma_{in.g} \phi_g = \int_{u_{g-1}}^{u_g} \Sigma_{in.g}(u) \phi(u) du$$

เมื่อ ν_g จำนวนนิวตรอนเฉลี่ยที่ปล่อยออกมาต่อฟิชชัน สำหรับไอโซโทปที่ g
 K_g พลังงานเฉลี่ยในหน่วยวัตต์-วินาที ที่ปล่อยออกมาต่อฟิชชัน สำหรับไอโซโทปที่ g
สำหรับสัญลักษณ์ตัวอื่นได้เคยกำหนดไว้แล้ว

2.3 การคำนวณค่าคงที่ต่างๆ ของกลุ่มนิวตรอนเทอร์มัล

การคำนวณเพื่อหาสเปกตรัมของนิวตรอนเทอร์มัล มีความยุ่งยากซับซ้อนเนื่องมาจากสาเหตุดังนี้ได้

(1) ในปัจจุบันยังไม่เป็นที่เข้าใจอย่างแจ่มแจ้งถึงปรากฏการณ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นในการที่นิวตรอนที่มีความเร็วต่ำมากกระเจิงออกจากวัสดุหน่วงนิวตรอนไม่ว่าเป็นชนิดของแข็งหรือของเหลว เช่น ผลของการยึดเหนี่ยวทางเคมีของอะตอมของวัสดุหน่วงและการเคลื่อนที่ความร้อนของมัน ซึ่งมีความยุ่งยากซับซ้อนและในกรณีที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ก็ต้องพิจารณาปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ควันตัม อีกด้วย (7)

(2) ในความเป็นจริงการคำนวณค่าพิกซ์นิวตรอน ไม่สามารถพิจารณาให้ตำแหน่ง (space)

และ พลังงาน (energy) แยกจากกันได้ ซึ่งทำให้กลายเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้น

เมื่อพิจารณาให้นิวตรอนอยู่ในสมดุลความร้อนกับนิวคลีไอของวัสดุหน่วงนิวตรอน นิวตรอนก็ควรจะ มีสเปกตรัมเป็นแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมานน์ (Maxwell Boltzmann) กับอุณหภูมิซึ่งเท่ากับอุณหภูมิของวัสดุ หน่วง แต่เนื่องจากการที่มีตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งไม่ใช่เทอร์มัล มีการรั่ว และการดูดกลืนเกิดขึ้น ทำให้การ กระจายไม่เป็นแบบสมดุลความร้อนจริง ๆ แต่สเปกตรัมจะเกิดการเลื่อนไปทางพลังงานสูง

2.3.1 แบบจำลองที่ใช้ในการหาสเปกตรัมของนิวตรอนเทอร์มัล

การคำนวณหาสเปกตรัมของนิวตรอนเทอร์มัลมีแบบจำลองที่นิยมใช้อยู่หลายแบบขึ้นกับระดับของ ความยุ่งยาก

2.3.1.1 แบบจำลองแมกซ์เวลล์ (Maxwellian model)

กำหนดให้นิวตรอนมีการแจกแจงเป็นแบบแมกซ์เวลล์ที่อุณหภูมิยังผล T_n (effective temperature) ค่าหนึ่งของเครื่องปฏิกรณ์และเพิ่มหาง "1/E" ("1/E" tail) เข้ากับสเปกตรัม นั้นคือ

$$\phi(E) = \phi_0 \frac{1}{kT} \left[\frac{E}{kT} \right] e^{-E/kTn} + \frac{b}{E} H(E-E_0) \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad H(E-E_0) &= 1, & E &\geq E_0 \\ &= 0, & E &< E_0 \end{aligned}$$

n_0 เป็นความหนาแน่นของนิวตรอน

b เป็นค่าคงที่

การหาสเปกตรัมของนิวตรอนเทอร์มัลด้วยวิธีนี้จะมีความผิดพลาดค่อนข้างสูง

2.3.1.2 แบบจำลองวิกเนอร์-วิลกินส์ (Wigner-Wilkins model) (7)

โดยการพิจารณาว่านิวคลีไอของวัสดุหน่วงก็มีการเคลื่อนที่ความร้อนด้วยทำให้ต้องคำนึง ถึงการกระเจิงแบบเพิ่มพลังงาน (upscattering) ด้วย โดยการพิจารณาให้โมเลกุลของวัสดุหน่วงเป็น แก๊สสมบูรณ์แบบทำให้สามารถตัดผลของสถานะของแข็ง (solid state) และผลของสภาพโมเลกุลออกไปได้

2.3.1.3 แบบจำลองเนลกิน (Nelkin model)

โดยการพิจารณาว่าวัสดุหน่วงเป็นแก๊สแต่คิดการเคลื่อนที่ภายใน (internal motion) ของโมเลกุล คือการสั่น (vibration) และการหมุน (rotation) ด้วย

การกระเจิงของนิวตรอนที่พลังงานเทอร์มัลนี้เกือบทั้งหมดเป็นแบบยืดหยุ่นและไอโซโทปิกในระบบ ผิวก่อนศูนย์กลางมวล ถ้าไม่พิจารณาผลเนื่องจากการเป็นโมเลกุลและผลึกค่าภาคตัดขวางทรานสเปอร์ตจะเป็น



$$\Sigma_{Tr} = \Sigma_a + \Sigma_s(1 - 2/3A)$$

(2.87)

เมื่อ A เป็นเลขมวลของนิวเคลียสของวัสดุหนึ่ง อย่างไรก็ตามแรงยึดเหนี่ยวทางเคมีมีผลทำให้ค่า Σ_s และ μ (ค่าเฉลี่ยโคไซน์ของมุมกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการ) ขึ้นกับค่าพลังงาน ค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงจะเพิ่มขึ้นเมื่อพลังงานยึดเหนี่ยวทางเคมีมีค่าประมาณ 0.1 อิเล็กตรอนโวลต์ ถ้านิวตรอนมีพลังงานสูงกว่าแรงยึดเหนี่ยวทางเคมี การสปริงตัว (recoil) ของนิวตรอนออกจากโปรตอนจะมีพลังงานสูงพอที่จะทำลายพันธะโมเลกุลได้ (molecular bond)

ค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงของธาตุไฮโดรเจน ที่พลังงาน 1 อิเล็กตรอนโวลต์ มีค่าประมาณ 20 บาร์น และจะมีค่าสูงประมาณ 80 บาร์น (8) ที่พลังงานต่ำกว่าพลังงานยึดเหนี่ยวของน้ำมากพอ เหตุผลของปรากฏการณ์อันนี้คือ ถ้ากำหนดให้ σ_s^H เป็นภาคตัดขวางของการกระเจิงที่พลังงานสูงกว่าพลังงานยึดเหนี่ยว ($E \geq 1.0$ อิเล็กตรอนโวลต์) ที่พลังงานต่ำมาก ๆ ค่าความยาวคลื่นเดอบรอกลี (de Broglie wavelength) ของนิวตรอนจะมีค่ามากกว่าขนาดของโมเลกุลน้ำ ดังนั้นศูนย์กลางของการกระเจิงจึงไม่ได้อยู่ที่ศูนย์กลางของนิวตรอนและโปรตอนแต่เป็นศูนย์กลางของนิวตรอนกับโมเลกุลน้ำแต่เนื่องจากโมเลกุลของออกซิเจนหนักมาก ดังนั้นศูนย์กลางของการกระเจิงจึงอยู่ที่ศูนย์กลางของโมเลกุล

ค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงขึ้นอยู่กับระยะทางของการกระเจิง ถ้าระยะทางของการกระเจิงเป็น a ค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงคำนวณได้จากสูตร (8)

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \quad (2.88)$$

โดยที่
$$a = 2 \left[\frac{M_{mo1}}{M_n + M_{mo1}} \right] a_0 \quad (2.89)$$

เมื่อ a_0 เป็นระยะทางของการกระเจิงของระบบนิวตรอน-โปรตอนอิสระ จะได้ว่า

$$\sigma_s = 4\pi a^2 = 4 \left[\frac{M_{mo1}}{M_n + M_{mo1}} \right]^2 4\pi a_0^2 = 4 \left[\frac{1}{1 + M_n/M_{mo1}} \right]^2 \sigma_s^H \quad (2.90)$$

ถ้า $M_{mo1} \gg M_n$ จะได้
$$\sigma_s = 4\sigma_s^H$$

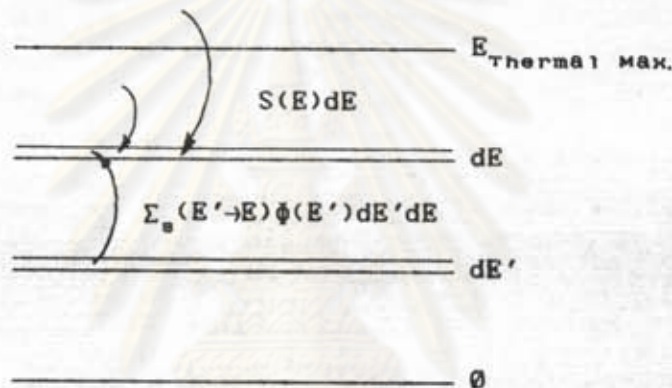
สมการ (2.90) ใช้ได้เฉพาะกรณี พลังงานของนิวตรอนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

2.3.2 แนวทางในการคำนวณค่าฟังก์ชันของนิวตรอนเทอร์มัล

ในการคำนวณค่าฟังก์ชันของนิวตรอนเทอร์มัลในตัวกลางเอกพันธ์ขนาดอนันต์ จำเป็นต้องพิจารณาหาคำตอบของสมการการแพร่ ที่ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง

$$\Sigma_a(E)\phi(E) + S(E)\phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s^o(E' \rightarrow E)\phi(E')dE' + S(E) \quad (2.91)$$

เมื่อเทอมทางซ้ายทั้งหมดเป็นเทอมของการสูญเสียจากช่วงพลังงาน dE เทอมทางขวาเป็นเทอมของการเกิดโดยที่ $S(E)$ เป็นต้นกำเนิดนิวตรอนเทอร์มัลในช่วงพลังงาน dE เนื่องจากนิวตรอนเทอร์มัลเหล่านี้ลดความเร็วมาจากช่วงพลังงานที่สูงกว่า เทอมอินทิกรัลแทนกลุ่มนิวตรอนที่กระเจิงมาจากช่วงพลังงาน dE' เข้าสู่ dE ตามรูป 2.2



รูป 2.2 ภาพแสดงนิวตรอนที่กระเจิงจากช่วงพลังงาน dE' สู่ dE

แม้ว่า $\Sigma_a(E)$ และ $S(E)$ หาได้จากข้อมูลการทดลองก็ตามแต่ค่าเคอร์เนลของการกระเจิง (scattering kernel) $\Sigma_s^o(E' \rightarrow E)$ จะต้องคำนวณโดยการใช้อย่างจำลองแบบใดแบบหนึ่ง ดังที่กล่าวแล้ว

$$\Sigma_s^o(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') P(E' \rightarrow E) \quad (2.92)$$

เมื่อ $P(E' \rightarrow E)$ เป็นโอกาสต่อหนึ่งหน่วยพลังงานที่นิวตรอนตัวหนึ่งซึ่งมีพลังงานเริ่มต้น E' จะมีพลังงานสุดท้ายหลังการชนเป็น E ถ้ากำหนดให้การกระเจิงเป็นแบบไอโซโทรปิกในระบบห้องปฏิบัติการ แม้ว่าเงื่อนไขนี้จะจริงเมื่อ E เข้าใกล้ศูนย์เท่านั้น เมื่อกำหนดเงื่อนไขแล้วก็ทำการคำนวณหา $P(E' \rightarrow E)$ เพื่อใช้หาสเปกตรัมของฟังก์ชันจากสมการ (2.91) ซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณค่าคงที่ประจำกลุ่มเทอร์มัลได้

2.3.3 การคำนวณ $P(E' \rightarrow E)$ โดยใช้แบบจำลองวิกเนอร์-วิลกินส์

ตามแบบจำลองของวิกเนอร์-วิลกินส์จะไม่คำนึงถึงผลของการยึดเหนี่ยวทางเคมี และการเคลื่อนที่

ภายในทั้งหมดที่เกิดขึ้น สำหรับการเคลื่อนที่ความร้อนของอะตอมพิจารณาโดยการกำหนดให้อะตอมของตัว
หน่วงเป็นแก๊ส ซึ่งมีมวล M เท่ากับ $A m_n$ โดยที่ m_n เป็นมวลของนิวตรอน

พิจารณาตามแบบจำลองของวิกเนอร์-วิลกินส์ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- (1) ภาคตัดขวางของการกระเจิงในช่วงพลังงานเทอร์มัลคือ σ_0 ไม่ขึ้นกับค่าพลังงาน (แต่ความจริงค่า σ_0 จะเพิ่มขึ้นเมื่อพลังงานลดลง เนื่องจากการยืดเหยียดทางเคมีในน้ำ)
- (2) การกระเจิงเป็นแบบไอโซโทโรปิกในระบบนิโคตแบบศูนย์กลางมวล (CMCS)
- (3) อะตอมของแก๊สตัวหน่วงมีการกระจายความเร็วแบบแมกซ์เวลล์ คือ

$$N(V)dV = \left[\frac{M}{2\pi kT_0} \right]^{3/2} N_0 e^{-\frac{Mv^2}{2kT_0}} 4\pi V^2 dV \quad (2.93)$$

เมื่อ $N(V)dV$ เป็นจำนวนอะตอมของแก๊สตัวหน่วงซึ่งมีความเร็วอยู่ระหว่าง V และ $V+dV$ ต่อซม.³ และ N_0 เป็นจำนวนอะตอมของแก๊สทั้งหมดต่อซม.³

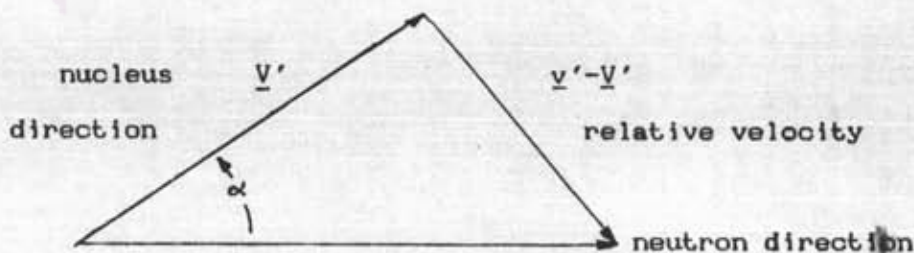
ในการหาค่า $P(E' \rightarrow E)$ โดยวิธีของวิกเนอร์-วิลกินส์นี้ค่อนข้างยืดเยื้อ ในที่นี้จะแสดงเฉพาะขั้นตอนที่สำคัญและผลลัพธ์สุดท้ายเท่านั้น

จากรูป 2.3 แสดงความเร็วของนิวตรอนโดย \underline{v}' เป็นความเร็วของนิวเคลียสและ \underline{v} เป็นความเร็วของนิวตรอนก่อนการชนในระบบห้องปฏิบัติการ ถ้าให้ μ เป็นโคไซน์ของมุมสัมพัทธ์ α , จะได้เทอมความเร็วสัมพัทธ์ (relative velocity, v_{rel})

$$v_{rel} = |\underline{v}' - \underline{v}| = [v'^2 + v^2 - 2v'v \cos \alpha]^{1/2} \quad (2.94)$$

เนื่องจากในทิศทางต่างๆ มีโอกาสสำหรับนิวตรอนเท่ากันเหมือนกับของนิวคลีโอ ดังนั้นจำนวนการชนต่อซม.³ ต่อวินาที คือ

$$d\psi = v_{rel} \sigma_0 N(V') dV' d\mu / 2 \quad (2.95)$$



รูป 2.3 จลนศาสตร์ของระบบนิวตรอน-นิวเคลียสในระบบห้องปฏิบัติการ ก่อนการชน

โอกาสที่นิวตรอนจะมีความเร็วหลังการชนตกอยู่ในช่วง v ถึง $v + dv$ หาได้ง่ายในระบบศูนย์กลางมวล โดยค่าความเร็วเริ่มต้น คือ

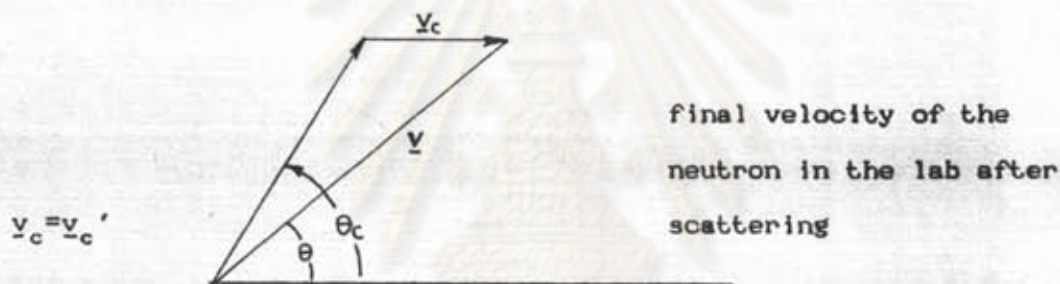
$$v_c' = |v' - v_0| = A/(A+1)v_{rel} \quad (2.96)$$

เมื่อ v_0 เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเมื่อมันหวัดผ่านในระบบห้องปฏิบัติการ โดย

$$v_0 = v'/(A+1) + Av'/(A+1) \quad (2.97)$$

และ v_c จะเปลี่ยนเฉพาะทิศทางเท่านั้นเมื่อชนในระบบศูนย์กลางมวล ดังนั้นค่าความเร็วหลังการกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการ คือ

$$v = [v_0^2 + \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 v_{rel}^2 + 2v_0 \frac{A}{A+1} v_{rel} \cos \theta_c]^{1/2} \quad (2.98)$$



รูป 2.4 การเชื่อมระหว่างระบบห้องปฏิบัติการกับระบบศูนย์กลางมวล

เมื่อ θ_c เป็นมุมกระเจิงในระบบศูนย์กลางมวล รูป 2.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบห้องปฏิบัติการและระบบศูนย์กลางมวล พิจารณาจากสมการ (2.97) ค่าอัตราเร็วในระบบศูนย์กลางมวล คือ

$$v_0 = \left[\frac{v'^2 + A^2 v'^2 + 2Av'v'}{A+1} \right]^{1/2} \quad (2.99)$$

และถ้าการกระเจิงเป็นแบบไอโซโทรปิกในระบบศูนย์กลางมวล เทอมของโอกาส $g(v' \rightarrow v) dv$ หาได้จาก

$$g(v' \rightarrow v) = \begin{cases} 0 & v < v_{\min} \\ \frac{2v}{v_{\max}^2 - v_{\min}^2} & v_{\min} < v < v_{\max} \\ 0 & v > v_{\max} \end{cases} \quad (2.100)$$

$g(v' \rightarrow v)dv$ คือ โอกาสที่นิวตรอนซึ่งมีความเร็วต้น v' ในระบบห้องปฏิบัติการจะมีความเร็วปลายในช่วง dv รอบค่า v เมื่อพิจารณาจากสมการ (2.98) จะได้ว่า

$$v_{\min} = v_0 - A/(A+1)v_{rel} \quad (2.101)$$

และ
$$v_{\max} = v_0 + A/(A+1)v_{rel} \quad (2.102)$$

โดยการใช้ความสัมพันธ์ เพื่อใช้หาค่า $g(v' \rightarrow v)$

$$g(\cos \theta_c) d\theta_c = g(v' \rightarrow v) dv \quad (2.103)$$

ส่วนเทอมเคอร์เนลของการกระเจิง $P(v' \rightarrow v)$ ได้จากการรวมสมการ (2.95) และ (2.100) ทำการอินทิเกรตตลอดทุกทิศทาง $d\mu$ และทุกความเร็ว v

$$P(v' \rightarrow v) dv = 1/2 \int_0^\infty dV' \int_{-1}^1 v_{rel} \sigma_s N(V') d\mu \cdot g(v' \rightarrow v) dv \quad (2.104)$$

ซึ่งสามารถอินทิเกรตหาค่า $P(v' \rightarrow v)$ ได้ ต่อจากนั้นใช้ความสัมพันธ์

$$P(v' \rightarrow v) dv = P(E' \rightarrow E) dE \quad (2.105)$$

ในที่สุดก็จะได้เคอร์เนลของแก๊สอิสระแบบวิกเนอร์-วิลกินส์ (Wigner-Wilkins free gas kernel)

$$P(E' \rightarrow E) = \frac{\theta^2}{\sqrt{\pi E'}} [e^{-\beta^2(x'-x)} [1(\beta\theta\sqrt{2E'} - h\sqrt{2E}) \pm 1(\beta\theta\sqrt{2E'} + \beta h\sqrt{2E})] + [1(\beta\theta\sqrt{2E} - \beta h\sqrt{2E'}) \mp 1(\beta\theta\sqrt{2E} - \beta h\sqrt{2E'})]] \quad (2.106)$$

ตามความสัมพันธ์นี้เครื่องหมายข้างบนจะใช้ เมื่อ $E' < E$

$$\theta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}, \quad h = \frac{A-1}{2\sqrt{A}}, \quad \beta^2 = 1/(2KT) \quad (2.107)$$

เมื่อ K เป็น ค่าคงที่ของโบลต์มานน์
 T เป็นอุณหภูมิในหน่วยของคาล์มบวร์น
 $I(x)$ คือ ฟังก์ชันของความผิดพลาด (error function) โดย

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \quad (2.108)$$

จากหลักการของการสมดุลเชิงเนื้อหา (detailed balance)

$$v \Sigma_{\omega}(E') P(E' \rightarrow E) N(E') = v \Sigma_{\omega}(E) P(E \rightarrow E') N(E) \quad (2.109)$$

เมื่อ $N(E)$ เป็นการกระจายพลังงานของนิวตรอนแบบแมกซ์เวลล์ ขณะอยู่ที่สมดุลจำนวนนิวตรอนที่เปลี่ยนพลังงานจาก dE' ไปยัง dE จะเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่เปลี่ยนพลังงานจาก dE ไปยัง dE'

2.3.4 ฟลักซ์นิวตรอนเทอร์มัล

จากสมการของวิกเนอร์-วิลกินส์-เคอร์เนล (2.106) แทนลงในสมการ (2.91)

$$\Sigma_a(E) \phi(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_{\omega}(E') P(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' - \Sigma_{\omega}(E) \phi(E) + S(E) \quad (2.110)$$

สองเทอมแรกทางขวาแสดงจำนวนนิวตรอนที่กระเจิงเข้าสู่พลังงาน E และส่วนที่กระเจิงออกไปจากพลังงาน E เมื่อพิจารณาจากหลักการของการสมดุลเชิงเนื้อหา ถ้า $\phi(E)$ มีการกระจายแบบแมกซ์เวลล์ จะได้ว่า

$$\int_0^{\infty} \Sigma_{\omega}(E') P(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' - \Sigma_{\omega}(E) \phi(E) = 0 \quad (2.111)$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\int_0^{\infty} dE \int_0^{\infty} \Sigma_{\omega}(E') P(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' = \int_0^{\infty} dE \Sigma_{\omega}(E) \phi(E) \quad (2.112)$$

สำหรับเทอมของต้นกำเนิดจะต้องเท่ากับการดูดกลืนที่เกิดขึ้นในช่วงเทอร์มัล คือ

$$\int_0^{\infty} \Sigma_a(E) \phi(E) dE = \int_0^{\infty} S(E) dE \quad (2.113)$$

ในการแก้สมการ (2.110) ทำได้โดยการแปลงให้อยู่ในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียล

แบบจำลองแบบวิกเนอร์-วิลกินส์หรือแบบโปรตอนแก๊สนี้เหมาะสำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบใช้น้ำเป็นวัสดุ

หน่วยนิวตรอนเท่านั้น โดยการสมมติให้แกนของเครื่องปฏิกรณ์เป็นแก๊สโปรตอนซึ่งอยู่ในสมดุลความร้อนที่อุณหภูมิ T คือมีการแจกแจงแบบแมกซ์เวลล์

กำหนดการกระจายแบบแมกซ์เวลล์โดยนอร์มัลไรซ์ไปที่ 1 นิวตรอนต่อ cm^3 ต่อ วินาที จะได้

$$M(E) = \frac{E}{(kT)^2} e^{-E/kT} \quad (2.114)$$

จากหลักของการสมดุลเชิงเนื้อหา

$$\Sigma_a(E')P(E' \rightarrow E)\phi(E') = \Sigma_a(E)P(E \rightarrow E')\phi(E) \quad (2.115)$$

เนื่องจาก $\phi(E) = N_0 \cdot M(E) \quad (2.116)$

โดยที่ $\Sigma_a(E')P(E' \rightarrow E) = \Sigma_a(E)P(E \rightarrow E') \frac{vM(E)}{v'M(E')} \quad (2.117)$

สมการ (2.110) จัดรูปใหม่ โดยการไม่พิจารณาเทอมของต้นกำเนิด

$$\Sigma_a(E)\phi(E) = \Sigma_a(E) \int_0^\infty P(E \rightarrow E') \left[\frac{vM(E)}{v'M(E')} \phi(E') - \phi(E) \right] dE' \quad (2.118)$$

กำหนดให้ $\psi(E) \equiv \frac{\phi(E)}{vM(E)} \quad (2.119)$

สมการ (2.118) กลายเป็น

$$\Sigma_a(E)\psi(E) = \Sigma_a(E) \int_0^\infty P(E \rightarrow E') [\psi(E') - \psi(E)] dE' \quad (2.120)$$

ถ้าสามารถแทนสมการ (2.106) ลงในสมการ (2.120) แล้วแก้สมการหาค่า $\psi(E)$ ก็จะสามารถคำนวณค่า พลักร์ $\phi(E)$ ได้โดยใช้สมการ (2.119) แต่เนื่องจากขั้นตอนนี้ค่อนข้างซับซ้อนจึงได้กำหนดเงื่อนไขบางอย่างอันคือ กำหนดให้ค่าภาคตัดขวางของการดูดกลืนมีพฤติกรรมแบบ $1/v$

$$\sigma_a(v_{re1}) = C/v_{re1} \quad (2.121)$$

เนื่องจากแก๊สโปรตอนมีการกระจายแบบแมกซ์เวลล์ จึงทำให้

$$v\Sigma_a(E) = \int N_A(v) \cdot \sigma_a \cdot v_{re1} \cdot d^3v \quad (2.122)$$

โดยที่ N_A เป็นความหนาแน่นอะตอมของตัวนำ

v เป็นความเร็วของอิเล็กตรอน

V เป็นความเร็วของอิเล็กตรอน

สมการที่ (2.122) เขียนใหม่ให้ง่ายขึ้นเป็น

$$\begin{aligned}\Sigma_a(E) &= \frac{1}{v} \int N_A(v) \frac{C}{v_{rel}} d^3V \\ &= \frac{1}{v} N_{A0} C\end{aligned}\quad (2.123)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่ขึ้นกับชนิดของไอโซโทป

N_{A0} เป็นจำนวนนิวเคลียสต่อ ซม.³

สำหรับภาคตัดขวางของการกระเจิงสามารถทำได้เช่นเดียวกัน แต่เนื่องจากภาคตัดขวางมหภาคมีค่าคงที่ ดังนั้น

$$v\Sigma_s(E) \equiv \int N_H(V) d^3V \cdot \sigma_s^H \cdot v_{rel}$$

หรือ

$$\Sigma_s(E) = \frac{\sigma_s^H}{v} \int v_{rel} \cdot N_H(V) d^3V$$

$$= \frac{N_{H0} \sigma_s^H}{V} \left[\sqrt{\frac{2kT}{A}} \left\{ \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} + \frac{(x+1) \operatorname{erf}(x)}{2x} \right\} \right] \quad (2.124)$$

โดยที่ $x^2 = E/KT$

เขียนสมการ (2.124) ใหม่เป็น

$$\Sigma_s(E) = \frac{N_{H0} \sigma_s^H}{v} W(E) \quad (2.126)$$

เมื่อ N_{H0} เป็นจำนวนอะตอมของไฮโดรเจน ต่อ ซม.³

v เป็นความเร็วของอิเล็กตรอนในระบบห้องปฏิบัติการ

และ

$$W(E) = \left[\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} + \frac{(x+1) \operatorname{erf}(x)}{2x} \right] \sqrt{\frac{2kT}{A}} \quad (2.127)$$

โดยที่ A เป็นเลขมวลอะตอม แทนสมการ (2.126) และ (2.123) ลงในสมการ (2.120) จะได้

$$\frac{N_{\infty}}{v} C \psi(E) + W(E) \psi(E) = W(E) \int_0^{\infty} dE' P(E \rightarrow E') \psi(E') \quad (2.128)$$

สำหรับเทอม $P(E' \rightarrow E)$ หาได้จากสมการ (2.106) และสำหรับกรณีของไฮโดรเจน ค่า $h = 0$ สมการเปลี่ยนเป็น

$$P(E' \rightarrow E) = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\pi E'}} \left\{ e^{2\beta^2 (E' - E)} [1(\beta\sqrt{E}) \pm 1(\beta\sqrt{2E'})] + 1(\beta\sqrt{2E}) \mp 1(\beta\sqrt{2E'}) \right\} \quad (2.129)$$

หรือ

$$P(E' \rightarrow E) = \frac{1}{E'} \begin{cases} \operatorname{erf} \sqrt{E/kT} & , \quad E' > E \\ \exp \frac{(E' - E)}{kT_0} \operatorname{erf} \sqrt{E'/kT} & , \quad E' < E \end{cases} \quad (2.130)$$

เมื่อนำฟังก์ชันของความผิดพลาด คำนวณได้จากสมการ

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du \quad (2.131)$$

ถ้า x มีค่าใกล้เคียงหนึ่ง $\operatorname{erf}(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่า ถ้า $E' \gg kT$ เช่นที่ E ประมาณ 1 อิเล็กตรอนโวลต์ จะได้ว่าโอกาสของการกระเจิงจะเข้าใกล้สเปกตรัมแบบ $1/E$ แทนสมการ (2.130) ลงในสมการ (2.128) จะได้สมการซึ่งคล้ายฟังก์ชันของกรีน (Green function) ซึ่งสมมูลกับสมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับสองแบบ Sturm-Liouville (4) คือ

$$-\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{P(x)} \frac{d}{dx} [w(x) + K] \psi(x) \right\} + \{ Y(x) [w(x) + K] - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \} \psi(x) = 0 \quad (2.132)$$

โดยที่

$$Y(x) = \frac{x^2}{P(x)} - \frac{e^{-x^2}}{P^2(x)}, \quad x = \sqrt{E/kT} \quad (2.133)$$

และ

$$P(x) = e^{-x^2} + \sqrt{\pi} x \operatorname{erf}(x) \quad (2.134)$$

$$K = \frac{C}{v_0 \sigma_0^H} \quad \text{และ} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.135)$$

จัดรูปสมการ (2.132) ใหม่ให้อยู่ในรูปสมการรีแคตตี (Ricatti) โดยการแปลงตัวแปร $\psi(x)$ ไปเป็น $J(x)$

$$\frac{dJ(E)}{dE} = \frac{S(E)}{2kT} + \left[\frac{1 - 2P(E)}{2E} \right] J(E) - \frac{P(E)}{2E} J^2(E) \quad (2.136)$$

และ
$$\phi(E) = \frac{E}{Q(E)} \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^E \frac{dE'}{E'} \{ P(E') [J(E') + 1] - (1 + E'/kT) \} \right] \quad (2.137)$$

เมื่อ
$$S(E) = \frac{1}{x^2} [1 - P(x)] + \frac{x^2}{P(x)} - \frac{e^{-x^2}}{P^2(x)} - \frac{4}{Q} \quad (2.138)$$

และ
$$Q(E) = \frac{P(E) + 1}{x} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) + \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left[\frac{\Sigma_a(E) + DB^2}{\Sigma_g^H} \right] \quad (2.139)$$

สมการข้างบนได้รับการปรับปรุงโดยการรวมเทอมของการดูดกลืนแบบ non $1/V$ และ เทอมของการรั่ว $D(E)B^2$ โดยที่

$$D(E) = \frac{1}{3\Sigma_{Tr}} = \frac{1}{3[\Sigma_a + \Sigma_g^H(1 - \bar{\mu})]} \quad (2.140)$$

ขั้นตอนในการหาค่าฟังก์ชัน $\phi(E)$ ทำได้โดยการแก้สมการ (2.110) โดยวิธีรุ่งกัตตาลำดับที่สี่ (fourth order Runge-Kutta) (6) และใช้เทคนิคการอินทิเกรตแบบตามวิธีของซิมป์สัน (Simpson's rule) (6) สำหรับสมการ (2.111)

2.3.5 คำตอบเชิงตัวเลขของสมการรีแคตตี (7,8)

พิจารณารูปแบบของสมการรีแคตตี คือ

$$\frac{dJ(E)}{dE} = f(E, J(E)) \quad (2.141)$$

และ
$$f(E, J(E)) = \frac{S(E)}{2kT} + \left[\frac{1 - 2P(E)}{2E} \right] J(E) - \frac{P(E)}{2E} J^2(E) \quad (2.142)$$

สมการ (2.141) เป็นสมการ nonlinear และเนื่องจากความซับซ้อนของฟังก์ชัน $S(E), Q(E)$ และ $P(E)$ จึงต้องหาคำตอบโดยวิธีเชิงตัวเลข เจริญไชเริ่มตันของ $J(E)$ พิจารณาจากสมการ (2.136) ถึง

(2.140) แสดงให้เห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่า $J(E)$ จะเข้าใกล้ 0 ด้วย

$$\lim_{E \rightarrow 0} J(E) \rightarrow 0.0 \quad (2.143)$$

จากข้อมูลอันนี้ทำให้สามารถคำนวณค่าฟังก์ชัน $\phi(E)$ ซึ่งผันแปรตามพลังงานของนิวตรอนในช่วงเทอร์มัล ในการหาค่า $J(E)$ ที่พลังงานต่าง ๆ (E_i) จากสมการ (2.141) โดยวิธีรังกัดตาหลังจากนั้นกลับมาพิจารณาสมการ (2.111) โดยใช้วิธีการอินทิเกรตของซิมป์สัน

$$\phi(E) = \frac{E}{Q(E)} \exp\left\{1/2 \int_0^E \frac{dE'}{E'} [P(E')[J(E')+1] - (1+E')]\right\} \quad (2.144)$$

ก่อนที่จะหาคำตอบของสมการรีแควตติโดยวิธีเชิงตัวเลข จำเป็นต้องสร้างความสัมพันธ์ขึ้นเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์โดยการแบ่งช่วงพลังงานระหว่าง $0 < E < 0.64$ อิเล็กตรอนโวลต์ ออกเป็นจุด ให้ $0 < E_1 < E_2 < E_3 < \dots < E_N = 0.64$ และกำหนดว่า $E_{i+1} - E_i = \Delta E$ มีค่าคงที่ ถ้าทราบค่า $J(E_i) = J_i$ ก็สามารถหาค่า J_{i+1} ได้จากสูตรของรังกัดตาลำดับที่สี่ โดย

$$J_{i+1} = J_i + 1/6(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.145)$$

เมื่อ $K_1 = \Delta E f(E_i, J_i) \quad (2.146)$

$$K_2 = \Delta E f(E_i + 1/2\Delta E, J_i + 1/2K_1) \quad (2.147)$$

$$K_3 = \Delta E f(E_i + 3/4\Delta E, J_i + 3/4K_2) \quad (2.148)$$

และ $K_4 = \Delta E f(E_i + \Delta E, J_i + K_3) \quad (2.149)$

2.3.6 ค่าคงที่กลุ่มเทอร์มัล

ค่าคงที่ของกลุ่มนิวตรอนเป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักฟังก์ชัน (flux weighted averages of macroscopic cross section) สำหรับค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงและการดูดกลืน หาได้จากความสัมพันธ์

$$\Sigma_s = \frac{\int_0^{0.64} \Sigma_s N_i \sigma_s^i(E) \phi(E) dE}{\int_0^{0.64} \phi(E) dE} \quad (2.150)$$

และ $\Sigma_a = \int_0^{0.64} \Sigma_a N_i \sigma_a^i(E) \phi(E) dE \quad (2.151)$

โดยที่ ν เป็นตัวเลขระบุชนิดของไอโซโทป
ภาคตัดขวางมหภาคของการเกิดนิวตริชชัน คำนวณจาก

$$\nu\Sigma_f = \frac{\int_0^{0.64} \Sigma_j N_j \nu^j(E) \sigma_f^j(E) \phi(E) dE}{\int_0^{0.64} \phi(E) dE} \quad (2.152)$$

โดยที่ j เป็นตัวเลขระบุชนิดของไอโซโทปที่นิวตริชชันได้กับเทอร์มัลนิวตรอน
ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient) ก็เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักฟังก์ชันเช่นเดียวกันโดยคำนวณได้จากสมการ

$$D = \frac{\int_0^{0.64} \phi(E) dE}{3[\Sigma_i N_i \sigma_{a_i}^i(E) + \Sigma_i N_i (1-\mu_i) \sigma_{s_i}^i(E)]} \quad (2.153)$$

เมื่อ μ_i เป็นค่าเฉลี่ยโคไซน์ (cosine) ของมุมกระเจิงสำหรับไอโซโทปที่ i

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



2.3.7 การคำนวณของมอดูล SLOCON

มอดูล SLOCON ทำการหาคำตอบสมการรีแควตติโดยใช้วิธีรังกัดตาลำดับที่ 4 หาค่า $J(E')$ ซึ่งจะนำไปแทนในสมการ (2.144) เพื่อคำนวณค่าฟังก์ชัน เทอมอินทิกรัลในสมการ (2.144) ใช้วิธีการอินทิเกรตของซิมป์สัน การคำนวณค่าคงที่ของกลุ่มตามสมการ (2.150)-(2.153) ใช้เทคนิคการอินทิเกรตของซิมป์สัน

ภาคตัดขวางจุลภาคที่ใช้ในมอดูล SLOCON เก็บอยู่ในรูปสมการโพลีโนเมียล ตัวอย่างเช่นภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืนของ พลูโทเนียม-240 คำนวณได้จาก

$$\sigma_a^{Pu-240}(E) = 4.84 \times 10^{-3} - 6.1 \times 10^{-6} E + 1.58 \times 10^{-9} E^2, \quad 0 < E < .003 \text{ eV} \quad (2.154)$$

2.4 การคำนวณเทอร์มัลยูทิลิเซชันและดิสแอดวานเทจแฟกเตอร์ (thermal utilization and disadvantage factor) (7,8)

2.4.1 เทอร์มัลยูทิลิเซชัน

เทอร์มัลยูทิลิเซชันคือ อัตราส่วนระหว่างอัตราการดูดกลืนนิวตรอนช้าในเชื้อเพลิง กับอัตราที่นิวตรอนถูกลดความเร็วลงมาถึงระดับพลังงานเทอร์มัล

$$f = \frac{\int_{V_F} \Sigma_a(r') \phi(r') d^3r'}{q V_M} \quad (2.155)$$

เมื่อ V_F เป็นปริมาตรของเชื้อเพลิง
 V_M เป็นปริมาตรของวัสดุหน่วงนิวตรอน
 $q(r)$ เป็นความหนาแน่นของการลดความเร็ว

เงื่อนไขที่ใช้ในการคำนวณค่า f โดยใช้สมการ (2.155)

- (1) การลดความเร็วของนิวตรอน กำหนดให้เกิดขึ้นได้เฉพาะในวัสดุหน่วงนิวตรอนเท่านั้น
- (2) แหล่งกำเนิดของนิวตรอนเทอร์มัลมีอยู่ทั่วไปทุกทิศทางในวัสดุหน่วงนิวตรอน (uniform and isotropic)
- (3) การกระเจิงของนิวตรอนมีลักษณะเหมือนกันในทุกทิศทาง (isotropic)
- (4) การลดความเร็วของนิวตรอนอธิบายโดยใช้ทฤษฎีทรานสปอร์ตชนิดหนึ่งอัตราเร็ว

จากสมการทรานสพอร์ต

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) = & \int_{V_F} d^3r' K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) \Sigma^F(\underline{r}') \phi(\underline{r}') \\ & + \int_{V_M} d^3r' K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) [\Sigma^M(\underline{r}') \phi(\underline{r}') + q(\underline{r}')] \end{aligned} \quad (2.156)$$

จะได้ว่า ฟลักซ์นิวตรอนรวมที่จุด \underline{r} ใด ๆ คือฟลักซ์ของนิวตรอนที่เกิดขึ้น ณ จุด \underline{r}' (ซึ่งอาจอยู่ในแท่งเชื้อเพลิงหรือในวัสดุหน่วงนิวตรอนก็ได้) และถูกเคลื่อนย้ายจากจุด \underline{r}' ไปยังจุด \underline{r} ซึ่งอธิบายโดยใช้ทรานสพอร์ตเคอร์เนล $K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r})$ โดยที่

$$K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) = \frac{\exp\left(-\int_0^{|\underline{r}'-\underline{r}|} \Sigma_T(s) ds\right)}{4\pi |\underline{r}'-\underline{r}|^2} \quad (2.157)$$

ใช้แนวคิดของคอลลิชันพรอบาบิลิตีเพื่อลดความยุ่งยากของสมการอินทิกรัล ด้วยการทำให้กลายเป็นสมการพีชคณิตเชิงเส้น (algebraic equation) และอาศัยทอม P_{ij} ซึ่งกำหนดว่าเป็น โอกาสที่นิวตรอนตัวหนึ่งซึ่งกำเนิดที่ตำแหน่ง \underline{r}' ในปริมาตร V_i ใด ๆ จะมีการชนครั้งต่อไปใน ปริมาตร V_j ที่ตำแหน่ง \underline{r} โดยกำหนด

$$P_{ij} = \frac{\Sigma_T^j}{V_j} \int_{V_j} d^3r \int_{V_i} d^3r' K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) \quad (2.158)$$

ถ้าพิจารณาเซลล์ซึ่งประกอบด้วย 2 วัสดุ โดยมีส่วนเชื้อเพลิงล้อมรอบด้วยวัสดุหน่วงนิวตรอน ดังนั้นโอกาสที่นิวตรอนจะกำเนิดขึ้นในแท่งเชื้อเพลิงและมีการชนครั้งต่อไปในแท่งเชื้อเพลิง คือ

$$P_{FF} = 1 - P_{FM} \quad (2.159)$$

เมื่อ P_{FM} เป็นโอกาสที่นิวตรอนจะกำเนิดขึ้นในแท่งเชื้อเพลิงและมีการชนครั้งต่อไปในวัสดุหน่วงนิวตรอน ทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$P_{MM} = 1 - P_{MF} \quad (2.160)$$

นอกเหนือจากความสัมพันธ์ข้างต้นซึ่งเป็นสมการของการอนุรักษ์โอกาส ยังมีสมการอื่นที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของค่า P_{MF} กับ P_{FM} ที่เรียกว่าความสัมพันธ์ร่วม (reciprocity relation) โดย

$$P_{MF} \Sigma_T^M V_M = P_{FM} \Sigma_T^F V_F \quad (2.161)$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นไปตามความจริงที่ว่า $\phi(\underline{r})$ เนื่องจากแหล่งกำเนิดที่ \underline{r}' จะเหมือนกันกับ $\phi(\underline{r}')$ ที่เกิดเนื่องจากแหล่งกำเนิดที่ \underline{r} นอกจากนี้ยังแสดงได้ว่า ทรานสพอร์ตเคอร์เนลมีความสมมาตร คือ

$$K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) \equiv K(\underline{r} \rightarrow \underline{r}') \quad (2.162)$$

2.4.2 การคำนวณเทอร์มัลยูทิลไลเซชันโดยวิธีเอสเคปรอบาบิลิตีและสมการทรานสปอร์ตจากสมการของเทอร์มัลยูทิลไลเซชัน

$$f = \frac{\int_{V_F} \Sigma_a(\underline{r}') \phi(\underline{r}') d^3r'}{V_M q(\underline{r})} = \frac{\Sigma_a^F \phi_F V_F}{V_M q_0} \quad (2.163)$$

เมื่อกำหนดให้ $q(\underline{r})$ เท่ากันทุกทิศทางและเรียกใหม่เป็น q_0 ตัวเศษของสมการเป็นจำนวนของการดูดกลืนทั้งหมดต่อวินาที ที่เกิดขึ้นในเชื้อเพลิง ถ้าอินทิเกรตสมการ (2.156) ตลอดทั่วปริมาตรของเชื้อเพลิง จะได้

$$\begin{aligned} \int_{V_F} d^3r \phi(\underline{r}) &= \int_{V_F} d^3r \int_{V_F} d^3r' K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) \Sigma_a^F(\underline{r}') \phi(\underline{r}') \\ &+ \int_{V_F} d^3r \int_{V_M} d^3r' K(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}) [\Sigma_a^M \phi(\underline{r}') + q(\underline{r}')] \end{aligned}$$

โดยการใช้สมการ (2.160) เพื่อลดดับเบิลอินทิกรัล จะได้

$$\phi_F (1 - \frac{\Sigma_a^F P_{FF}}{\Sigma_T^F}) = (\Sigma_a^M \phi_M + q_0) \frac{P_{MF} V_M}{\Sigma_T^F V_F} \quad (2.164)$$

สมการ (2.164) และ (2.163) ยังไม่เพียงพอที่จะใช้หาค่า f ต้องทำการอินทิเกรตตลอดทั่วปริมาตรของวัสดุห่อวงนิวตรอน และทำให้สมการ (2.156) เปลี่ยนเป็น

$$\phi_M (1 - \frac{\Sigma_a^M P_{MM}}{\Sigma_T^M}) = \Sigma_a^F \phi_F \frac{P_{FM} V_F}{\Sigma_T^M V_M} + q_0 \frac{P_{MM}}{\Sigma_T^M} \quad (2.165)$$

$$q_0 = \frac{\Sigma_a^F \phi_F V_F}{V_M f} \quad (2.166)$$

ค่าเทอร์มัลยูทิลไลเซชันสามารถหาได้โดยการแทน q_0 ในสมการ (2.164) และ (2.165) จะได้

$$f = \frac{\Sigma_T^F V_F}{\Sigma_a^M V_M} \left[\frac{P_{FM}}{1 + \frac{(\Sigma_a^F + \Sigma_a^M \Sigma_T^F V_F)}{\Sigma_a^F} P_{FM}} \right] \quad (2.167)$$

ค่าเทอร์มัลยูทิลไลเซชันคำนวณได้จากสมการ (2.167) เมื่อรู้ค่า P_{FM} โดยที่ P_{FM} มีความสัมพันธ์กับค่าเอสเคปพรอบาบิลิตี P_0 ซึ่งหมายถึง โอกาสที่นิวตรอนจะกำเนิดขึ้นในแท่งเชื้อเพลิงเตี้ยแล้วเคลื่อนย้ายออกสู่วัสดุหน่วงนิวตรอนโดยไม่มีการชน เขียนในรูปสมการได้ว่า

$$P_0 = \frac{1}{4\pi V_F} \int_{4\pi} \int_{V_F} \exp(-\Sigma_T^F |r-r'|) d^3r d\Omega \quad (2.168)$$

ซึ่งเป็นการอินทิเกรตตลอดมุมตัน (solid angle) 4π สเตอเรเดียน

ฮอฟฟ์มานน์และพลาซเซค (Hoffmann and Placzek) (8) ได้หาคำตอบของสมการ (2.168) สำหรับกรณีแท่งเชื้อเพลิงรูปทรงกระบอกยาวล้อมรอบด้วยวัสดุหน่วงนิวตรอน ถ้ารัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ a จะได้ว่า

$$P_0 = \frac{2\Sigma_T^F a}{3} \left(2[a\Sigma_T^F K_1(\Sigma_T^F a) I_1(\Sigma_T^F a) + a\Sigma_T^F K_0(\Sigma_T^F a) I_0(\Sigma_T^F a) - 1] \right. \\ \left. + \frac{1}{\Sigma_T^F a} [K_1(\Sigma_T^F a) I_1(\Sigma_T^F a) - K_0(\Sigma_T^F a) I_0(\Sigma_T^F a) + K_1(\Sigma_T^F a) I_0(\Sigma_T^F a)] \right) \quad (2.169)$$

โดยที่ K_n และ I_n เป็นเบสเซลฟังก์ชัน (Bessel functions)

เนื่องจากในแกนของเครื่องปฏิกรณ์ประกอบด้วยแท่งเชื้อเพลิงจำนวนมาก แต่สำหรับสมการ (2.169) ใช้ได้เฉพาะกรณีแท่งเชื้อเพลิงเดี่ยว ดังนั้นในเครื่องปฏิกรณ์จริงแท่งเชื้อเพลิงในโครงข่ายจะถูกบังด้วยแท่งเชื้อเพลิงอันอื่น ทำให้นิวตรอนอาจหนีรอดไปจากแท่งหนึ่งเคลื่อนที่ผ่านวัสดุหน่วงนิวตรอนโดยไม่มีการชน แล้วไปเกิดการชนในแท่งเชื้อเพลิงที่อยู่ติดกัน จากสาเหตุอันนี้จึงจำเป็นต้องมีเทอมแก้ความผิดพลาดเรียกว่า แฟกเตอร์แก้แดนคอฟฟ์ (Dancoff correction factor) ใช้สัญลักษณ์ C โดยที่

$$P_{FM} = \frac{(1-C)P_0}{1 - C \left[1 - P_0 \Sigma_T^F \frac{4V_F}{S_F} \right]} \quad (2.170)$$

เมื่อ S_F เป็นพื้นที่ผิวของทรงกระบอก สำหรับกรณีทรงกระบอกยาวมาก จะได้ว่า

$$\frac{4V_F}{S_F} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a \quad (2.171)$$

การคำนวณค่าแฟกเตอร์แก้แค้นคอฟน์มีความยุ่งยากมาก แต่ Sauer ได้แสดงสูตรการคำนวณค่านี้ เป็นค่าประมาณอย่างง่าย คือ

$$C = 1 - \int dl f(l) (1 - \exp(-\Sigma_T l)) \quad (2.172)$$

เมื่อ $f(l)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงคอร์ด (chord distribution function) ในวัสดุทึบวงนิวตรอน ค่า $f(l)$ เป็น 0 เมื่อความยาวคอร์ด "l" สั้นกว่าระยะที่สั้นที่สุดระหว่างผิวของแท่งเชื้อเพลิงที่อยู่ติดกัน "t" Sauer ได้แสดงว่า

$$\begin{aligned} f_c(l) dl &= 0, & 1 < t \\ &= \exp\left[\frac{-(1-t)}{\bar{l}-t}\right] d\left[\frac{1-t}{\bar{l}-t}\right], & 1 \geq t \end{aligned} \quad (2.173)$$

แทนสมการ (2.173) ในสมการ (2.172) จะได้

$$C = \frac{\exp(-\tau \Sigma_T^M \bar{l})}{1 + (1-\tau) \Sigma_T^M \bar{l}} \quad (2.174)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \tau \equiv t/\bar{l} \quad (2.175)$$

และ \bar{l} เป็นความยาวคอร์ดเฉลี่ยในวัสดุทึบวงนิวตรอน โดย

$$\bar{l} = \frac{2aV_M}{V_F} \quad (2.176)$$

τ เป็นดัชนีแสดงรูปทรง (geometric index) ขึ้นอยู่กับว่าเป็นโครงข่ายแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือ หกเหลี่ยมด้านเท่า สำหรับโครงข่ายสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\tau = \frac{\sqrt{\pi/4[1 + (V_M/V_F)]} - 0.08}{V_M/V_F} \quad (2.177)$$

สำหรับโครงข่ายหกเหลี่ยมด้านเท่า

$$\tau = \frac{\sqrt{\pi/3^{1/2}2} \sqrt{1 + V_M/V_F} - 1}{V_M/V_F} - 0.12 \quad (2.178)$$

ค่าเทอร์มัลยูทิลไลเซชันคำนวณได้จากสมการ (2.167)

2.4.3 เทอร์มัลดิสแอดวานเตจแฟกเตอร์ (ξ)

ค่าดิสแอดวานเตจแฟกเตอร์เป็นอัตราส่วนระหว่างฟลักซ์เทอร์มัลเฉลี่ยในวัสดุผนังนิวตรอนกับในแท่งเชื้อเพลิง

$$\xi \equiv \phi_M / \phi_F \quad (2.179)$$

เมื่อทราบค่าเทอร์มัลยูทิลไลเซชัน (f) ก็สามารถคำนวณค่าดิสแอดวานเตจแฟกเตอร์ (ξ) ได้ จากค่าจำกัดความของ f คือ

$$f = \frac{V_F \Sigma_a^F \phi_F}{V_F \Sigma_a^F \phi_F + V_M \Sigma_a^M \phi_M} \quad (2.180)$$

จะได้ว่า

$$\xi = \frac{(1-f) V_F \Sigma_a^F}{f V_M \Sigma_a^M} \quad (2.181)$$

ซึ่งเป็นสมการที่ใช้คำนวณค่าดิสแอดวานเตจแฟกเตอร์ เทอร์มัลดิสแอดวานเตจแฟกเตอร์เป็นเทอมที่มีความสำคัญอันหนึ่งเนื่องมาจากใช้ในการคำนวณค่าคงที่ประจํากลุ่มชนิดต่าง ๆ ในระบบเครื่องปฏิกรณ์แบบวีริพันธ์ เช่นถ้าสมมติเครื่องปฏิกรณ์ประกอบด้วยแท่งเชื้อเพลิงซึ่งมีความเข้มข้นต่างกันอยู่ 3 โชน ในแต่ละโชนจะต้องมีการคำนวณค่าภาคตัดขวางของนิวตรอนแต่ละกลุ่มพลังงาน ในการคำนวณจะคิดในระบบเอกพันธ์จึงจำเป็นต้องมีการถ่วงน้ำหนักค่าภาคตัดขวางของวัสดุเชื้อเพลิงและวัสดุผนังนิวตรอน สำหรับค่าภาคตัดขวางเฉลี่ยของการดูดกลืน ในโชนใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_a &= \frac{\Sigma_a^F V_F \phi_F + \Sigma_a^M V_M \phi_M}{V_F \phi_F + V_M \phi_M} \\ \bar{\Sigma}_a &= \frac{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M V_M / V_F \xi}{1 + V_M / V_F \xi} \end{aligned} \quad (2.182)$$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย (D) ในกรณีแท่งเชื้อเพลิงรูปทรงกระบอก

$$\bar{D} = \frac{(1+V)D_F + (1-V)D_M}{(1-V)D_F + (1+V)D_M} \quad (2.183)$$

เมื่อ V เป็นสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชื้อเพลิงในเซลล์ โดย

$$V = \frac{\pi a^2}{\pi a^2 + \pi (b^2 - a^2)} = \frac{a^2}{b^2} \quad (2.184)$$

โดยที่ a, b เป็นรัศมีของแท่งเชื้อเพลิงและรัศมีของเซลล์ ตามลำดับ ในการคำนวณค่า \bar{D} ไม่จำเป็นต้องใช้ค่า s ในการคำนวณค่า \bar{D} สามารถคิดเหมือนกับการคำนวณค่าความนำไฟฟ้า พิจารณาจาก

$$\underline{j} = -D \nabla \phi \quad (2.185)$$

กระแสการแพร่กระจาย (diffusion current) ในส่วนที่ขนานกับขอบเขตของตัวกลาง คือ

$$D_{\parallel} = \sum_i V_i D_i \quad (2.186)$$

และ กระแสการแพร่กระจายในส่วนที่ตั้งฉากกับขอบเขตของตัวกลาง คือ

$$1/D_{\perp} = \sum_i V_i / D_i \quad (2.187)$$

โดยที่ V_i เป็นสัดส่วนปริมาตรของวัสดุตัวที่ i ในเซลล์ สมการ (2.183) เป็นค่าเฉลี่ยที่เหมาะสมสำหรับเซลล์รูปทรงกระบอก สำหรับค่าสัดส่วนปริมาตรของวัสดุเชื้อเพลิงในเซลล์ คือ

$$V = \frac{V_F}{V_F + V_M} = \frac{1}{1 + V_M/V_F} \quad (2.188)$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่ใช้ในมอดูล DISFAC

2.5 การคำนวณสมการการแพร่กระจายของนิวตรอนหนึ่งกลุ่มความเร็วในหนึ่งมิติ

2.5.1 สมการการแพร่กระจายของนิวตรอนหนึ่งกลุ่ม (one group diffusion equation)

สมการการแพร่กระจายของนิวตรอนที่สภาวะคงตัว (steady state) เขียนในรูปสมการ

$$-\nabla \cdot D(\underline{r}) \nabla \phi(\underline{r}) + \Sigma_a(\underline{r}) \phi(\underline{r}) = \frac{\nu \Sigma_f(\underline{r})}{k} \phi(\underline{r}) \quad (2.189)$$

เทอมแรกของสมการแสดงนิวตรอนสุทธิที่แพร่กระจายออกจากหนึ่งหน่วยปริมาตรต่อหนึ่งหน่วยเวลา เทอมที่

สองทางซ้ายแทนอัตราที่นิวตรอนเทอร์มัลถูกดูดกลืนโดยนิวคลีโอต่อนหน่วยปริมาตร สองเทอมนี้เป็นอัตราที่นิวตรอนสูญหายไปซึ่งจะต้องสมดุลกับ อัตราการผลิตนิวตรอนทางด้านขวาของสมการ เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ของ สมการ (2.189) มี 2 เงื่อนไข คือเงื่อนไขที่รอยสัมผัสระหว่างวัสดุ A และ B ที่ $r = r_0$

$$\phi_A(r_0) = \phi_B(r_0) \quad (2.190)$$

และ
$$-D_A(r_0) \frac{\partial \phi(r_0)}{\partial n} = -D_B(r_0) \frac{\partial \phi(r_0)}{\partial n} \quad (2.191)$$

โดย $\partial \phi / \partial n$ เป็นองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ของ directional derivative ของฟังก์ชันนิวตรอน เงื่อนไขที่ขอบเขตของเครื่องปฏิกรณ์ r_b คือฟังก์ชันเป็นศูนย์ที่ระยะขยายออก (extrapolated distance)

$$\phi(r_b + 0.71\lambda_{Lr} \frac{r}{r}) = 0 \quad (2.192)$$

การหาคำตอบของสมการ (2.189) กับเงื่อนไขขอบเขต (2.190)-(2.192) จะใช้วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยพิจารณาจากระบบสมการของเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม ซึ่งมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงในแนวรัศมีเท่านั้นเนื่องจากมีความสมมาตร ในกรณีนี้สมการ (2.189) กลายเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบปกติที่มีจุดศูนย์กลางของระบบพิกัดทรงกลมที่จุดศูนย์กลางของเครื่องปฏิกรณ์ สำหรับกรณีเครื่องปฏิกรณ์แบบเอกพันธ์ สมการเปลี่ยนเป็น

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{D} \left[\frac{v\Sigma_f(r)}{k} - \Sigma_a(r) \right] \phi(r) = 0 \quad (2.193)$$

ลดรูปสมการ (2.193) ด้วยการแทน $w(r) = r \phi(r)$

โดยที่ $\frac{dw}{dr} = r \frac{d\phi}{dr} + \phi$

และ
$$\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \quad (2.194)$$

แทนลงในสมการ (2.193)

$$d^2 w + B^2 w = 0 \quad (2.195)$$

เมื่อ B^2 คือ บักคลิงเชิงวัสดุ (material buckling) โดยที่

$$B_m^2 = \frac{1}{D} \left[\nu \Sigma_f - \Sigma_a \right] \quad (2.196)$$

คำตอบของสมการ (2.195) คือ

$$w = A \cos Br + C \sin Br$$

และ
$$\phi(r) = \frac{A \cos Br}{r} + \frac{C \sin Br}{r} \quad (2.197)$$

เนื่องจากฟลักซ์ต้องไม่เป็นศูนย์ที่จุดศูนย์กลางของเครื่องปฏิกรณ์ นั่นคือ $A=0$ และที่ตรงขอบเขตขยายออก (extrapolated boundary) ค่าฟลักซ์จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าทรงกลมมีรัศมี R จะได้ว่า

$$\phi(R+0.71\lambda_{cr}) = \frac{C \sin B(R+0.71\lambda_{cr})}{R+0.71\lambda_{cr}} = 0$$

เนื่องจาก $C = 0$ ดังนั้น

$$B(R + 0.71\lambda_{cr}) = n\pi, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.198)$$

ถ้าเลือกค่า n ที่น้อยที่สุด จะได้ค่าบักคลิงเชิงเรขาคณิต (geometrical buckling)

$$B_g^2 = \frac{\pi^2}{(R + 0.71\lambda_{cr})^2} \quad (2.199)$$

ค่าไอเกน (eigenvalue) k คำนวณได้จากสมการ (2.199) และ (2.196) โดยการกำหนดให้บักคลิงเชิงเรขาคณิตเท่ากับบักคลิงเชิงวัสดุ จะได้ว่า

$$k = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{\frac{1+D}{\Sigma_a} \frac{\pi^2}{(R + 0.71\lambda_{cr})^2}} \quad (2.200)$$

ซึ่งเป็นสมการวิกฤตในกรณีรูปทรงทรงกลม เมื่อกำหนดให้ $k = 1$

2.5.2 การดิสครีไทซ์สมการการแพร่กระจาย (Discretizing the diffusion equation)

ในการหาคำตอบของสมการการแพร่กระจาย ชนิด 1 กลุ่มโดยใช้คอมพิวเตอร์ จำเป็นต้องจัดรูปสมการใหม่ให้เหมาะสม วิธีการต่อไปนี้เป็นวิธีการที่จะจัดการสมการการแพร่กระจาย ในระบบสมมาตรทรง

กลม พิจารณาสมการการแพร่กระจายในระบบสมมาตรทรงกลม

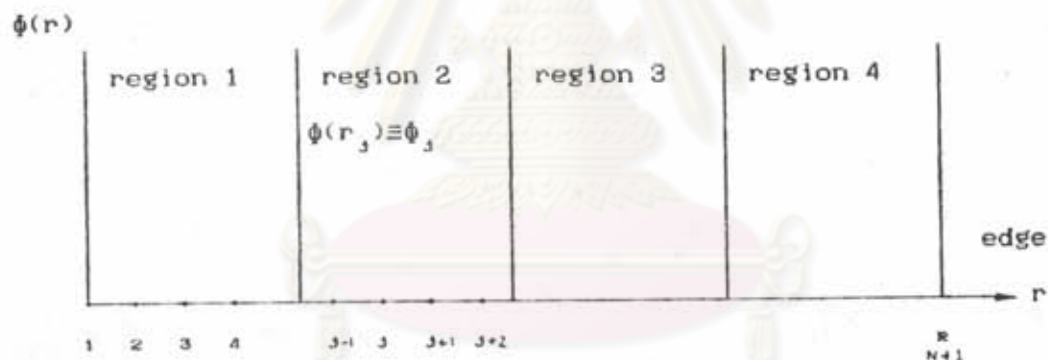
$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 D(r) \frac{d\phi(r)}{dr}] + \Sigma_a(r) \phi(r) = \frac{\nu}{k} \Sigma_f(r) \phi(r) \quad (2.201)$$

โดยมีเงื่อนไขที่ขอบเขต $\phi(r_b + 0.71\lambda_{tr}) = 0$ (2.202)

เงื่อนไขที่รอยสัมผัส $\phi_A(r_0) = \phi_B(r_0)$ (2.203)

และ $D_A \frac{d\phi(r_0)}{dr} = D_B \frac{d\phi(r_0)}{dr}$ (2.204)

การแปลงสมการ (2.201) ให้อยู่ในรูปไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ทำได้หลายวิธี ในที่นี่จะแสดงวิธีการที่เรียกว่า บ็อกซ์อินทิเกรชัน (box integration) รูป 2.5 แสดงระบบนิกัดที่ใช้ในกระบวนการดิสครีไทซ์



รูป 2.5 ระบบนิกัดที่ใช้ในกระบวนการดิสครีไทซ์

กำหนดให้มี 1 จุดเมช ที่อยู่ตรงกับรอยสัมผัส และช่องว่าง (spacing) ระหว่างจุดเมช ไม่เท่ากัน

$$\Delta r_j = r_{j+1} - r_j \quad (2.205)$$

อินทิเกรตสมการ (2.201) จาก $r_{j-1/2}$ ถึง $r_{j+1/2}$ โดยเทคนิคบ็อกซ์อินทิเกรชัน จะได้ว่า

$$-\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 D(r) \frac{d\phi(r)}{dr}] 4\pi r^2 dr + \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} 4\pi r^2 \Sigma_a(r) \phi(r) dr = \frac{\nu}{k} \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_f(r) \phi(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

หารตลอดด้วย 4π แล้วจัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} & -[r^2 D(r) \frac{d\phi(r)}{dr}]_{r_{j+1/2}} + [r^2 D(r) \frac{d\phi(r)}{dr}]_{r_{j+1/2}} + \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r) \phi(r) r^2 dr \\ & = \frac{v}{k} \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_f(r) \phi(r) r^2 dr \end{aligned}$$

เนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุอาจเปลี่ยนแปลงโดยเฉพาะตรงข้ามรอยสัมผัส กระจายอินทิเกรนด์ที่เหลือในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) โดยคิดเฉพาะเทอมแรก

$$\begin{aligned} \int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r) \phi(r) r^2 dr &= \int_{r_{j-1/2}}^{r_j^-} \Sigma_a(r) \phi(r) r^2 dr + \int_{r_j^+}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r) \phi(r) r^2 dr \\ &= \int_{r_{j-1/2}}^{r_j^-} (r_j^-)^2 [\Sigma_a(r_j^-) \phi(r_j^-) - (r_j^- - r_{j-1/2}) \frac{d\phi(r_j^-)}{dr_j} + \dots] dr \\ &+ \int_{r_j^+}^{r_{j+1/2}} (r_j^+)^2 [\Sigma_a(r_j^+) \phi(r_j^+) + (r_{j+1/2} - r_j^+) \frac{d\phi(r_j^+)}{dr_j} + \dots] dr \\ &\doteq r_j^2 \Sigma_a(r_j^-) \phi(r_j^-) (r_j^- - r_{j-1/2}) + r_j^2 \Sigma_a(r_j^+) \phi(r_j^+) (r_{j+1/2} - r_j^+) \end{aligned} \quad (2.206)$$

ถ้า $\Sigma_a(r_j^-) = \Sigma_a(r_j^+)$ ซึ่งเงื่อนไขนี้เป็นจริง ยกเว้นที่รอยสัมผัสระหว่างวัสดุ จะได้ว่า

$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} \Sigma_a(r) \phi(r) r^2 dr = r_j^2 \Sigma_a(r_j) \phi(r_j) \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{2}$$

สมการการแพร่กระจาย เปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned} & [r^2 D(r) \frac{d\phi}{dr}]_{r_{j-1/2}} - [r^2 D(r) \frac{d\phi}{dr}]_{r_{j+1/2}} + r_j^2 \Sigma_a(r_j) \phi(r_j) \frac{\Delta r_j + \Delta r_{j-1}}{2} \\ & = \frac{v}{k} \Sigma_f(r_j) \phi(r_j) r_j^2 \frac{\Delta r_j + \Delta r_{j-1}}{2} \end{aligned} \quad (2.207)$$

ประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธี ฟอรวาร์ดดิฟเฟอเรนซ์ ลำดับที่ 1 (first order forward difference)

$$\left. \frac{d\phi(r)}{dr} \right|_{r_{j-1/2}} = \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j-1})}{r_j - r_{j-1}} = \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j-1})}{\Delta r_{j-1}} \quad (2.208)$$

และ

$$\left. \frac{d\phi(r)}{dr} \right|_{r_{j+1/2}} = \frac{\phi(r_{j+1}) - \phi(r_j)}{r_{j+1} - r_j} = \frac{\phi(r_{j+1}) - \phi(r_j)}{\Delta r_j} \quad (2.209)$$

แทนสมการ (2.208) และ (2.209) ลงในสมการ (2.207) จะได้

$$\begin{aligned} & r_{j-1/2}^2 \frac{D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}} \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j-1})}{\Delta r_{j-1}} - r_{j-1/2}^2 \frac{D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}} \frac{\phi(r_{j-1})}{\Delta r_{j-1}} \\ & + r_{j+1/2}^2 \frac{D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j} \frac{\phi(r_j) - \phi(r_{j+1})}{\Delta r_j} - r_{j+1/2}^2 \frac{D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j} \frac{\phi(r_{j+1})}{\Delta r_j} \\ & + r_j^2 \frac{\Sigma_a(r_j^+) \phi(r_j)}{2} \frac{r_{j+1} - r_j}{2} + r_j^2 \frac{\Sigma_a(r_j^-) \phi(r_j)}{2} \frac{r_j - r_{j-1}}{2} \\ & = \frac{vr_j^2}{k} \frac{\Sigma_f(r_j^+) \phi(r_j)}{2} \frac{r_{j+1} - r_j}{2} + \frac{vr_j^2}{k} \frac{\Sigma_f(r_j^-) \phi(r_j)}{2} \frac{r_j - r_{j-1}}{2} \end{aligned} \quad (2.210)$$

รวมเทอมในสมการ (2.210) จะได้

$$a_j = +r_{j+1/2}^2 \frac{D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j} \quad (2.211)$$

$$b_j = r_{j-1/2}^2 \frac{D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}} + r_{j+1/2}^2 \frac{D(r_{j+1/2})}{\Delta r_j} + \frac{r_j^2}{2} [\Sigma_a(r_j^-) \Delta r_{j-1} + \Sigma_a(r_j^+) \Delta r_j] \quad (2.212)$$

$$c_j = r^2_{j+1/2} \frac{D(r_{j-1/2})}{\Delta r_{j-1}} \quad (2.213)$$

$$\text{และ } F_j = vr^2_j \left[\frac{\Sigma_r(r_j^-) \Delta r_{j-1}}{2} + \frac{\Sigma_r(r_j^+) \Delta r_j}{2} \right] \quad (2.214)$$

โดยใช้ $\phi_j = \phi(r_j)$ สมการการแพร่กระจาย กลายเป็น

$$-a_j \phi_{j+1} + b_j \phi_j - c_j \phi_{j-1} = F_j \phi_j / k \quad (2.215)$$

ถ้าให้จุดเมชเริ่มต้นเป็น 1 คือ $j=1$ และจุดเมชสุดท้ายเป็น $N+1$ จะได้

$$\begin{aligned} -a_1 \phi_2 + b_1 \phi_1 &= F_1 \phi_1 / k \\ -a_2 \phi_3 + b_2 \phi_2 - c_2 \phi_1 &= F_2 \phi_2 / k \\ \vdots & \\ b_N \phi_N - c_N \phi_{N-1} &= F_N \phi_N / k \end{aligned} \quad (2.216)$$

กำหนดให้ $\phi_{N+1} = 0$

เมื่อเขียนสมการ (2.216) ในรูปเมทริกซ์

$$\underline{A} \underline{\phi} = \underline{F} \underline{\phi} / k \quad (2.217)$$

โดยที่

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & 0 & \dots \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & 0 & \dots \\ 0 & -c_3 & b_3 & -a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & -c_N & b_N \end{bmatrix} \quad (2.218)$$

และ

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & F_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & F_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & F_N \end{bmatrix} \quad (2.219)$$

เมทริกซ์ข้างบนเป็นไปตามระบบพิกัดทรงกลม ส่วนในการเขียนพิกัดอื่นๆ พิจารณาได้จากรูปทั่วไป สำหรับเทอม

การรั่วของนิวตรอน (neutron leakage) ในสมการการแพร่กระจาย

$$\nabla \cdot (D \nabla \phi) = \frac{1}{r^\alpha} \left[\frac{d(r^\alpha D \frac{d\phi}{dr})}{dr} \right] \quad (2.220)$$

ค่า α ในสมการแสดง ชนิดของระบบ

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{ระบบระนาบ} \\ 1 & \text{ระบบพิกัดทรงกระบอก} \\ 2 & \text{ระบบพิกัดทรงกลม} \end{cases}$$



ค่า volume element ในแต่ละระบบ คำนวณจาก

$$2^\alpha \pi^{1-\alpha} r^\alpha dr \quad (2.221)$$

การหาคำตอบของสมการการแพร่กระจายใน 1 มิติ จะต้องทำการแก้ความผิดพลาดเนื่องจากการรั่ว ในทิศทางอื่น ตัวอย่างเช่น ในระบบพิกัดฉาก สมการการแพร่กระจายใน 3 มิติ คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} [D \frac{\partial \phi}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [D \frac{\partial \phi}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [D \frac{\partial \phi}{\partial z}] - \Sigma_a \phi + \frac{\nu \Sigma_f \phi}{k} = 0 \quad (2.222)$$

ถ้าต้องการหาคำตอบของสมการในทิศทาง x และต้องการที่จะแก้เนื่องจากการรั่วในทิศทาง y และ z ทำได้โดยวิธีประมาณ จากการกำหนด

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + B_y^2 \phi = 0 \quad (2.223)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + B_z^2 \phi = 0 \quad (2.224)$$

สมการ (2.222) เขียนใหม่ได้เป็น

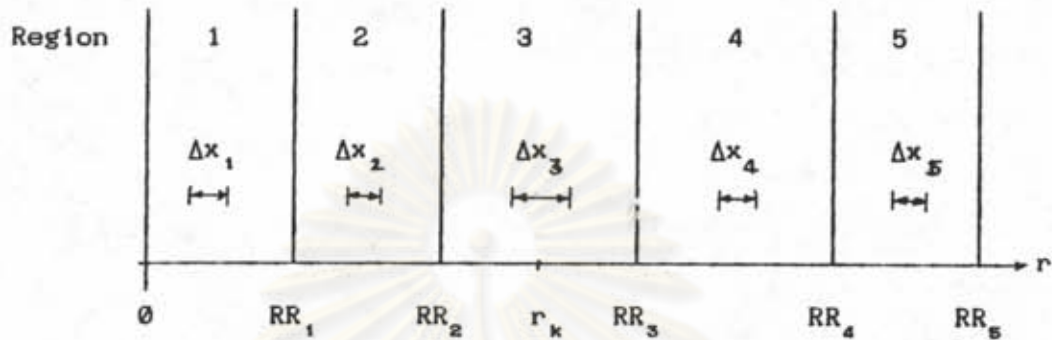
$$\frac{d}{dx} [D \frac{d\phi}{dx}] - \Sigma_a' \phi(x) + \frac{\nu \Sigma_f \phi(x)}{k} = 0 \quad (2.225)$$

โดยที่

$$\Sigma_a' = (B_y^2 + B_z^2) D + \Sigma_a$$

2.5.3 การคำนวณของมอดูล ODOG

มอดูล ODOG ใช้ในการแก้ปัญหาของลักษณะรูปทรง 3 แบบ คือ แบบแผ่นระนาบ, ทรงกระบอก และทรงกลม รูป 2.6 แสดงสัญลักษณ์บางตัวที่ใช้กำหนดขอบเขต มอดูลยอมให้มีริเจียนได้ไม่เกิน 5 ริเจียน ($M < 5$) ค่ารัศมีหรือความหนาจะวัดจากระนาบของสมมาตร ที่จุด $r=0$



รูป 2.6 ภาพและสัญลักษณ์ ที่ใช้กำหนดขอบเขตของเครื่องปฏิกรณ์

ลำดับของขั้นตอนในการทำงานของมอดูล แสดงได้ดังนี้

(1) กำหนดชนิดของเครื่องปฏิกรณ์

NM=2 แบบทรงกลม ประกอบด้วยวัสดุเป็นเปลือกทรงกลม (spherical shell)

NM=1 แบบทรงกระบอก ประกอบด้วยวัสดุรูปทรงกระบอกร่วมแกน

NM=0 แผ่นระนาบของวัสดุ ระยะทางวัดจากระนาบของสมมาตร ที่จุด $r=0$

(2) อ่านค่าข้อมูลอินพุตอื่น ๆ และคำนวณจำนวนช่วงในแต่ละริเจียนย่อย

$$N_1 = \text{จำนวนช่วงในริเจียน 1} \\ = RR_1 \Sigma_0(1) + 1$$

สำหรับในริเจียนอื่น ๆ

$$N_i = (RR_i - RR_{i-1}) \Sigma_0(i), \quad 2 \leq i \leq M$$

(3) เนื่องจากริเจียนแรกมีโครงสร้างของเมชแตกต่างกันเล็กน้อยกับริเจียนอื่น คือ จุดเมชอันแรกอยู่ที่ $1/2\Delta x_1$ ทำให้ต้องคำนวณคุณสมบัติของริเจียนนี้แยกจากอันอื่น (คุณสมบัติที่ว่าเป็นหมายถึงคุณสมบัติทั้งหมดที่แสดงอยู่ในสมการ (2.211)-(2.214)) และจากความไม่ต่อเนื่องของภาคตัดขวางทางนิวเคลียร์ที่รอยสัมผัสระหว่างสองริเจียน จึงต้องคำนวณสมการ (2.211)-(2.214) ขึ้นกับแต่ละด้านเมื่อเข้าใกล้รอยสัมผัส

(4) หลังจากคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์ A ได้หมดทุกตัว แล้วใช้วิธีของโทมัส (Thomas algorithm) แก้ปัญหาระบบไตรไดอาโกนัลแล้วจึงใช้วิธีเฟาเวอร์คำนวณค่าไอเกน คูภาคผนวก ก

(5) พล็อตกราฟระหว่างค่าพลังที่สอดคล้องกับค่าไอเกน กับระยะทางจากจุดเริ่มต้น สเกล

ของกราฟไม่สี่เหลี่ยม เนื่องจากความจริงที่ว่าระยะห่างในแต่ละช่วงเปลี่ยนแปลง

2.6 การคำนวณสภาวะวิกฤตของนิวตรอนสามกลุ่มพลังงาน

2.6.1 สภาวะวิกฤตของนิวตรอน 3 กลุ่ม

สมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ สำหรับการคำนวณกรณีนิวตรอน 3 กลุ่มพลังงาน มีลักษณะที่แตกต่างกับในกรณีนิวตรอน 1 กลุ่ม สำหรับสมการที่ใช้คำนวณในกรณี 3 กลุ่ม คือ

$$-D_i \nabla^2 \phi_i(r) + \Sigma_i(r) \phi_i(r) = X_i G(r) / \lambda + \Sigma_{s,i-1}(r) \phi_{i-1}(r) \quad (2.226)$$

เมื่อ $i=1,2,3$ แทนกลุ่มพลังงานสูง เรโซแนนซ์ และเทอร์มัล ตามลำดับ

$D_i(r)$ สัมประสิทธิ์การแพร่กระจายในกลุ่มที่ i ที่ตำแหน่ง r

ϕ ฟลักซ์นิวตรอน

$$\Sigma_i(r) = D_i(r) B^2 + \Sigma_{a,i}(r) + \Sigma_{m,i}(r) + \Sigma_{p,i}(r)$$

$\Sigma_i(r)$ ภาคตัดขวางมหภาครวม

B^2 บั๊กคลิงทางขวาง (transverse buckling)

Σ_a ภาคตัดขวางมหภาคของการดูดกลืน

Σ_m ภาคตัดขวางมหภาคแบบรีมูแวล

Σ_p ภาคตัดขวางมหภาคของพอยซอน (poison)

X_i สัดส่วนของนิวตรอนกลุ่มที่ i จากฟิชชัน

$$G(r) = \sum_{j=1}^3 \nu_j \Sigma_{f,j}(r) \phi_j(r) \text{ เป็นแหล่งกำเนิดฟิชชัน (fission source)}$$

Σ_f ภาคตัดขวางมหภาคของการเกิดฟิชชัน

ν จำนวนนิวตรอนเกิดใหม่ต่อฟิชชัน

λ ค่าไอเกน หรือ k_{eff}

สมการ (2.226) เป็นสมการแสดงสมดุลของนิวตรอนโดยเทอมการรั่วของนิวตรอนทางซ้ายของสมการ ต้องสมดุลกับเทอมการเพิ่มของนิวตรอนทางด้านขวา เทอมแรกทางซ้ายอธิบายการรั่วของนิวตรอนออกจากหนึ่งหน่วยปริมาตรโดยย้ายตำแหน่งออกไปทางทิศ r เทอมที่สองแทนการสูญเสียนิวตรอนเนื่องจากสาเหตุอื่นทั้งหมด คือ การดูดกลืน (Σ_a, Σ_p) การรั่วในทิศทางขวาง (DB^2) และการกระเจิงออกไปจากกลุ่มพลังงานเดิม (Σ_m) สำหรับเทอมต้นกำเนิด (source term) ทางขวาของสมการประกอบด้วยเทอมฟิชชัน ($X_i G(r) / \lambda$) และการกระเจิงเข้าสู่กลุ่มพลังงาน i จากกลุ่มพลังงานที่สูงกว่า ($\Sigma_{s,i-1}$)

เทอมแรกของสมการ (2.226) เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$-\frac{1}{r^p} \frac{d}{dr} [D_i(r) r^p \frac{d\phi_i(r)}{dr}] \quad (2.227)$$

เมื่อ

$$p = \begin{cases} 0 & \text{รูปทรงแผ่นระนาบ} \\ 1 & \text{รูปทรงทรงกระบอก} \\ 2 & \text{รูปทรงทรงกลม} \end{cases}$$

การหาคำตอบของสมการ (2.226) เริ่มโดยการแบ่งส่วนของแกน r ในช่วงที่จะหาคำตอบ คือ $0 < r < R$ โดยการแบ่งเป็นช่วงเมช (mesh) ขนาดเล็ก และจะหาคำตอบที่จุดเมชเหล่านี้ สำหรับที่จุด r_n ภายในโดเมนทำการคูณสมการด้วย r^p แล้วอินทิเกรตจาก $r_{n-} = r_n - 1/2h_{n-}$ ถึง $r_{n+} = r_n + 1/2h_{n+}$ เมื่อ h_{n-} และ h_{n+} เป็นช่วงกว้างทางซ้ายและขวาของจุด r_n ตามลำดับ โดยใช้การประมาณ

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_{n-}} = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h_{n-}}, \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_{n+}} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{h_{n+}} \quad (2.228)$$

และ

$$\begin{aligned} \int_{r_{n-}}^{r_{n+}} r^p \Sigma \phi dr &= \Sigma_{n-} \int_{r_{n-}}^{r_n} r^p \phi dr + \Sigma_{n+} \int_{r_n}^{r_{n+}} r^p \phi dr \\ &= \left[\frac{\Sigma_{n-} r_n^{p+1} - r_{n-}^{p+1}}{p+1} + \frac{\Sigma_{n+} r_{n+}^{p+1} - r_n^{p+1}}{p+1} \right] \phi_n \end{aligned}$$

ได้สมการของผลต่าง (difference equation)

$$\begin{aligned} & -\bar{D}'_{n+} \phi'_{n+1} + [\bar{D}'_{n+} + \bar{D}'_{n-} + \bar{\Sigma}'_n] \phi'_n - \bar{D}'_{n-} \phi'_{n-1} \\ & = \frac{\chi}{\lambda} \sum_{j=1}^s \nu_j \bar{\Sigma}'_n \phi'_n + \bar{\Sigma}'_{n,n} \phi'_{n-1} \end{aligned} \quad (2.229)$$

เมื่อ

$$\bar{D}'_{n\pm} = \bar{D}'_i(r_{n\pm}) r^p_{n\pm} / h_{n\pm}$$

$$\bar{\Sigma}'_n = \bar{\Sigma}'_{n+} + \bar{\Sigma}'_{n-}$$

และ
$$\bar{\Sigma}'_{n\pm} = \pm \bar{\Sigma}'(r_{n\pm}) \frac{r_{n\pm}^{p+1} - r_n^{p+1}}{p+1}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้มี 2 เงื่อนไขคือ เงื่อนไขที่ลัทธินิวตรอนเป็นศูนย์ และเงื่อนไขที่กระแสนิวตรอนเป็นศูนย์ ในกรณีนี้ $\phi_0 = 0$ และ $\phi_n = 0$ ต้องเพิ่มสมการช่วยเข้ากับกลุ่มสมการตั้งต้น ถ้า $d\phi/dr=0$ ที่ $r=0$ สมการ (2.226) เปลี่ยนเป็น

$$-D_i(p+1) \frac{d^2\phi_i}{dr^2} + \Sigma_i\phi_i = \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^3 \nu\Sigma_{r,j}\phi_j + \Sigma_{r,i-1}\phi_{i-1}$$

ใช้การประมาณ
$$\left. \frac{d^2\phi}{dr^2} \right|_{r=0} = \frac{2(\phi_1 - \phi_0)}{h_1^2}$$

จะได้สมการของผลต่าง

$$\frac{-D_i(0)\phi_i(r_1) + [D_i(0) + h_1\Sigma_i(0)]\phi_i(0)}{h_1} = \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^3 \frac{\nu\Sigma_{r,j}(0)h_1\phi_j(0) + \Sigma_{r,i-1}(0)h_1\phi_{i-1}(0)}{2(p+1)} \quad (2.230)$$

ถ้า $d\phi/dr=0$ ที่ $r=r_n$ อินทิเกรตสมการ (2.226) จาก r_{n-} ถึง r_n และเมื่อใช้การประมาณข้างต้น จะได้ว่า

$$\phi'_n [\bar{D}'_{n-} + \bar{\Sigma}'_{n-}] - \bar{D}'_{n-} \phi'_{n-1} = \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^3 \nu_j \bar{\Sigma}'_{r,n-} \phi'_j + \bar{\Sigma}'_{r,n-} \phi'_{n-1} \quad (2.231)$$

จากสมการ (2.229) ใช้เงื่อนไขตามสมการ (2.230) และ (2.231) ก็จะได้กลุ่มของสมการที่อยู่ในระบบไตรไดอะโกนัล (tridiagonal) เมื่อเขียนในรูปของเมทริกซ์

$$\underline{\Gamma} \underline{\phi} = 1/\lambda \underline{X} \underline{F} \underline{\phi} + \underline{R} \underline{\phi} \quad (2.232)$$

$\underline{\Gamma}$ เป็นเมทริกซ์แบบไตรไดอะโกนัล มีสมาชิกในตำแหน่งของสับไดอะโกนัล (subdiagonal), ไดอะโกนัล และซูเปอร์ไดอะโกนัล (superdiagonal) เป็นสัมประสิทธิ์ของค่า ϕ'_{n-1} , ϕ'_n และ ϕ'_{n+1} ตามลำดับ เทอม $\underline{\phi}$ เป็นเวกเตอร์ โดย

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_0^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_N^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \phi_N^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.233)$$

ตัวเลขในวงเล็บแสดงเลขประจำกลุ่ม ตัวสับสคริปต์ (subscript) เป็นเลขประจำจุดเมซ และสำหรับ เมทริกซ์ \underline{X} เป็นเมทริกซ์ชนิด $3N \times N$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots \\ \cdot & X_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_2 & 0 & \dots \\ \cdot & X_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_3 & 0 & \dots \\ \cdot & X_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}$$

\underline{F} เป็นเมทริกซ์ ชนิด $N \times 3N$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} v_1 \Sigma_{r1}^{(1)} 0 \dots & v_2 \Sigma_{r1}^{(2)} 0 \dots & v_3 \Sigma_{r1}^{(3)} 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 \Sigma_{rN}^{(1)} & v_2 \Sigma_{rN}^{(2)} & v_3 \Sigma_{rN}^{(3)} \end{bmatrix}$$

และ \underline{R} เป็นเมทริกซ์ชนิด $3N \times 3N$ โดยมี $\Sigma_{rj}^{(i)}$ เมื่อ $j=1, N$ และ $i=1, 2$ อยู่บนตำแหน่งสับไดอะโกนอล ที่ $N+1$ เมื่อทำการรวมเมทริกซ์เหล่านี้เข้าด้วยกัน สมการ (2.232) เปลี่ยนเป็น

$$\underline{E} \underline{\phi} = 1/\lambda \underline{G} \underline{\phi} \quad (2.234)$$

หรือ
$$\underline{E}^{-1} \underline{G} \underline{\phi} = \lambda \underline{\phi} \quad (2.235)$$

ปริมาณที่สำคัญในการคำนวณเครื่องปฏิกรณ์ คือค่าไอเกนที่ใหญ่ที่สุด (largest eigenvalue, λ_1) และไอเกนเวกเตอร์ $\underline{\phi}_1$ ของเมทริกซ์ $\underline{E}^{-1} \underline{G}$ วิธีปกติที่ใช้ในการหาค่าดังกล่าวคือ วิธีเพาเวอร์ไอเทอเรชัน (power iteration) เริ่มด้วยการเดาค่าเริ่มต้น $\underline{\phi}_0$ และที่แต่ละขั้นที่ต่อเนื่องกันก็จะคำนวณหาค่าถัดไป, $\underline{\phi}^{(n+1)}$ จากค่า $\underline{\phi}$ ที่หาได้ในขั้นก่อนนั้น, $\underline{\phi}^{(n)}$ ตามความสัมพันธ์

$$\underline{\phi}^{(n+1)} = 1/\lambda^{(n)} \underline{E}^{-1} \underline{G} \underline{\phi}^{(n)} \quad (2.236)$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^3 v_j \bar{\Sigma}^j r_k \phi_k^{j(n)} \quad (2.237)$$

จากสมการ (2.232) สามารถคำนวณหาค่า $\underline{\phi}^{(n+1)}$ ได้โดยใช้วิธีเกาส์เซียนเอลิมีเนชัน (Gaussian elimination) (6,8) ให้ทางขวามือของสมการแทนด้วย $(1/\lambda^{(n)}) \underline{G} \underline{\phi}^{(n)} + \underline{R} \underline{\phi}^{(n)}$ ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในมอดูล ODMUG คือใช้วิธีเกาส์เซียนเอลิมีเนชัน (Gaussian elimination) ในฟอร์มของโทมัส (Thomas algorithm) และใช้เทคนิคการเร่งการลู่เข้าด้วยโพลีโนเมียลของเชบิเชฟ (convergence acceleration by Chebyshev polynomial) (6,8)

2.6.2 การตรวจหาความเข้มข้นของพอยซอน (poison)

สำหรับการตรวจสอบความเข้มข้นของพอยซอน เพื่อให้ได้ค่าไอเกนตามที่ต้องการ เริ่มโดยการเดาค่าเริ่มต้น Σ_{pro}^j สำหรับบริเวณ n กลุ่มที่ j การคำนวณโดยใช้การไอเทอเรชันจนได้ค่า $X \Sigma_{pro}^j$ ซึ่งให้ค่าไอเกนตามที่ต้องการ หลังจากกำหนดค่าเริ่มต้น 2 ค่าคือ $\Sigma_{pr}^j = \Sigma_{pro}^j$ และ $\Sigma_{pr}^j = 0$ แล้วใช้การหาค่าแทรกเชิงเส้น (linear interpolation or extrapolation) เพื่อหาค่า X ตัวถัดไป กำหนด

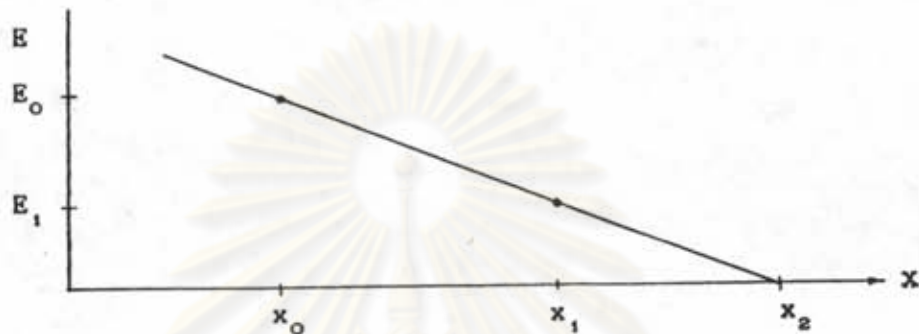
$$E_i = \lambda_i - \lambda$$

เมื่อ λ เป็นค่าไอเกนที่ต้องการ และ λ_i เป็นผลลัพธ์จากไอเทอเรชันในวงรอบที่ i โดยใช้ $\Sigma_{pr}^j = X_i \Sigma_{pro}^j$ E_0 และ E_1 เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ $X = X_0$ และ $X = X_1$ (ตามรูป 2.7) และถ้าต้องการเลือก X_2 ดังนั้น $E_2 = 0$ จะได้สมการสำหรับ $E(X)$ โดยยึด E_0 และ E_1 เป็นหลัก

$$E(X) = \left[\begin{array}{c} E_1 - E_0 \\ X_1 - X_0 \end{array} \right] X + \frac{E_0 X_1 - X_0 E_1}{X_1 - X_0}$$

ถ้ากำหนด $E(X_0)=E_0$ และ $E(X_1)=E_1$ เมื่อให้ $E(X_2)=0$ จะได้

$$X_2 = \frac{E_1 X_0 - E_0 X_1}{E_1 - E_0} \quad (2.238)$$



รูป 2.7 แผนการหาค่าแทรกสำหรับการตรวจหาพอยซัน

ดังนั้นจากค่าเดาที่ต่อเนื่องกัน 2 ค่าคือ x_0 และ x_1 และค่าผิดพลาดของทั้งสองคือ E_0 และ E_1 ทำให้คำนวณค่าเดาตัวถัดไปได้ จากสมการ (2.238)

ในการคำนวณค่าพังก์ชันเฉลี่ยในแต่ละรีเจียนและแต่ละกลุ่มพลังงาน ค่าเฉลี่ยของพังก์ชันสำหรับรีเจียน j และกลุ่มที่ ν กำหนดด้วยสมการ

$$\bar{\phi}_{\nu,j} = \frac{\int_0^{r_2} \phi_{\nu,j}(r) dV_p}{\int_0^{r_2} dV_p} \quad (2.239)$$

เมื่อ dV_p เป็น ปริมาตรเล็กก

สำหรับกรณี 1 มิติ $dV_p = C_p r^p dr$, $C_p = 1, 2\pi, 4\pi$, $p = 0, 1, 2$

เมื่อ p เป็นตัวเลขแสดงรูปทรงที่ต่างกันตามที่กล่าวแล้ว เทอมอินทิกรัลประมาณได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2=r_1+h} f(r) dV_p &= C_p \int_{r_1}^{r_2=r_1+h} r^p f(r) dr \\ &= C_p \left[\frac{h(r_1^p f_1 + r_2^p f_2)}{2!} + \frac{h^2 p(r_1^{p-1} f_1 - r_2^{p-1} f_2)}{3!} + \frac{h^3 p(p-1)(r_1^{p-2} f_1 + r_2^{p-2} f_2)}{4!} \right] \end{aligned}$$

เมื่อ $f_j = f(r_j)$ จากตอนต้นได้มีการกำหนด $G(r) = \sum_{j=1}^3 v_j \Sigma_{f,j}(r) \phi_j(r)$

ดังนั้น สามารถคำนวณเทอมเนอร์แมโลร์ซอร์ส (normalized source) โดยใช้สมการ

$$S(r) = \frac{G(r)}{\int_0^R G(r) dv} \quad (2.240)$$

การคำนวณเนอร์แมโลร์นิวตรอนฟลักซ์ (normalized neutron flux) ตามระดับกำลัง (power level) ที่ต้องการ จากคำนิยามกำหนดให้ กำลัง, P

$$P = K \int_{vol} \sum_{g=1}^3 \phi_g(r) \Sigma_g^f(r) dv_p$$

K เป็นค่าคงที่ คือจำนวนวัตต์-วินาทีต่อฟิชชัน

$$P = K \sum_{g=1}^3 \Sigma \bar{\phi}_{g,i} \Delta V_i \Sigma_{g,i}^f$$

เมื่อ ΔV_i เป็นตัวหารในสมการ (2.239) สำหรับใน 3 มิติ ΔV_i คำนวณได้จาก

$$\Delta V_i = \begin{cases} (R_{i+1} - R_i)HL & , \text{ สำหรับแผ่นระนาบ} \\ \pi(R_{i+1}^2 - R_i^2)H & , \text{ สำหรับทรงกระบอก} \\ 4/3\pi(R_{i+1}^3 - R_i^3) & , \text{ สำหรับทรงกลม} \end{cases}$$

เมื่อ H และ L เป็นความสูงและความลึกสำหรับแผ่นระนาบ หรือ H เป็นความสูงของทรงกระบอก เนื่องจากฟลักซ์ของแต่ละกลุ่มพลังงานเป็นคำตอบของปัญหาไอเกนแวกเตอร์ชนิดเอกพันธ์ ถ้าให้ ϕ เป็นคำตอบของสมการ (2.235) ซึ่งที่จริงคือ $k\phi$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$\bar{\phi}_{g,i} = k\bar{\phi}_{g,i}$$

เพื่อให้ได้คำตอบตามค่าระดับกำลัง P ที่ต้องการ จะได้ว่า

$$k = \frac{P}{K \sum_{g=1}^3 \sum_{l=1}^{N_{reg}} \bar{\phi}_{gl} \Delta V_l \Sigma_{gl} \alpha} \quad (2.241)$$

α เป็นส่วนกลับของอัตราส่วนระหว่างค่าพิกซ์สูงสุดกับค่าพิกซ์เฉลี่ย (peak-to-average flux ratio) ในทิศทางขวาง ซึ่งจะใช้คำนวณการรั่วในทิศทางขวาง ค่า α สำหรับทรงกระบอก

$$\alpha = \left[\frac{\bar{\phi}}{\phi_{\max}} \right] z$$

สำหรับแผ่นระนาบ

$$\alpha = \left[\frac{\bar{\phi}}{\phi_{\max}} \right] y \left[\frac{\bar{\phi}}{\phi_{\max}} \right] z$$

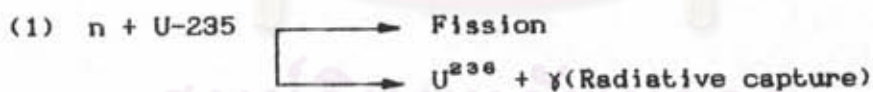
สำหรับทรงกลม

$$\alpha = 1$$

2.7 การคำนวณเบียร์อันของเชื้อเพลิง

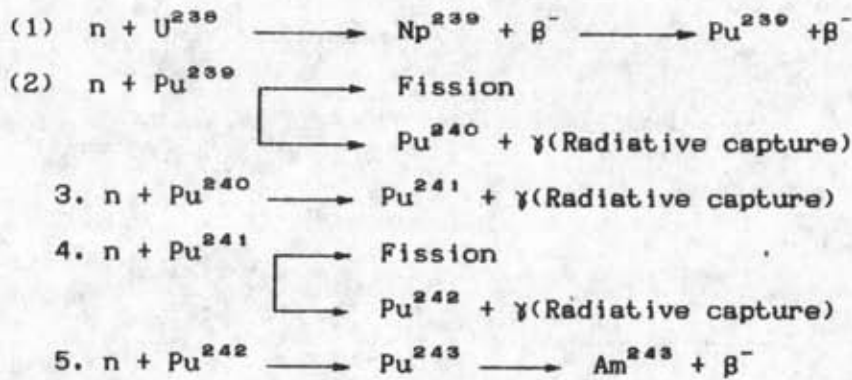
2.7.1 ปฏิกิริยานิวเคลียร์พื้นฐาน

ในวัฏจักรเชื้อเพลิงยูเรเนียม-พลูโทเนียม สามารถแบ่งชนิดของปฏิกิริยาออกเป็น 2 สาย สายที่ 1 เริ่มโดยยูเรเนียม-235 ดูกกลืนนิวตรอน



การดูดกลืนนิวตรอนในยูเรเนียม-235 มีประมาณน้อยกว่า 20 เปอร์เซ็นต์ (8) ที่เปลี่ยนเป็นยูเรเนียม-236 และเนื่องจากยูเรเนียม-236 เป็นไอโซโทปที่เสถียรมาก (ครึ่งชีวิต 2.4×10^7 ปี) มีภาคตัดขวางของการดูดกลืนน้อยจึงแทบไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของค่ารีแอกติวิตี (reactivity) เมื่อยูเรเนียม-236 จับนิวตรอนเปลี่ยนเป็นเนปจูเนียม-237 (Np-237) สลายตัวให้รังสีเบตาแล้วเปลี่ยนเป็นยูเรเนียม-237 ผลกระทบในแง่ของการลดค่ารีแอกติวิตีของเนปจูเนียม-237 และไอโซโทปอื่นๆ ที่เกิดจากการจับนิวตรอนในสายนี้มีน้อยมาก จึงไม่พิจารณา

สายที่ 2 เริ่มจากการที่ยูเรเนียม-238 ดูกกลืนนิวตรอนที่มีพลังงานต่ำกว่า 1.1 เมกะอีเล็กตรอนโวลต์ แสดงได้โดย



การดูดกลืนนิวตรอนโดยยูเรเนียม-239 และเนปจูเนียม-239 ไม่ต้องพิจารณา เนื่องจากอายุครึ่งชีวิตสั้นและมีค่าภาคตัดขวางของการดูดกลืนต่ำ ส่วนไอโซโทปทุกตัวของพลูโทเนียมแม้เสถียรและสลายตัวให้กัมมันตภาพรังสี อายุครึ่งชีวิตค่อนข้างยาว (6580 ปีหรือมากกว่า) ยกเว้นพลูโทเนียม-241 ซึ่งมีครึ่งชีวิตเพียง 13.2 ปี (8) มีค่าคงที่ของการสลายตัว 1.66×10^{-6} ต่อวินาที ในเครื่องปฏิกรณ์จะมีส่วนหนึ่งของพลูโทเนียม-241 สูญไปเนื่องจากการสลายตัว ตัวอย่างเช่น ในเครื่องปฏิกรณ์แบบใช้น้ำธรรมดา พลูโทเนียม-241 ซึ่งมีค่าภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืนนิวตรอนช้าประมาณ 1000 บาร์น และฟลักซ์เฉลี่ยของนิวตรอนช้าประมาณ 3×10^{13} นิวตรอนต่อซม.²ต่อวินาที (8) ดังนั้นอัตราการดูดกลืนต่ออะตอมของพลูโทเนียม-241 คือ $1000 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{13} = 3 \times 10^{-6}$ ต่อวินาที และอัตราส่วนของการสลายตัวต่อการดูดกลืนมีค่า $1.66 \times 10^{-6} / 3 \times 10^{-6} = 0.055$ สำหรับพลูโทเนียม-242 ดูดกลืนนิวตรอนแล้วเปลี่ยนเป็นอะเมริเชียม-243 (Am-243) โดยการสลายให้รังสีเบตา ค่าภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืนเทอร์มัลนิวตรอนเท่ากับ 20 บาร์น (8) ดังนั้นปริมาณของอะเมริเชียม-243 จึงเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ และมีผลในการลดค่ารีแอกติวิตีน้อยมาก อะเมริเชียม-243 และตัวอื่น ๆ ที่เกิดจากการดูดกลืนนิวตรอนต่อไป จะนำออกไปในระหว่างกระบวนการรีโพรเซสซึ่งเชื้อเพลิง และเนื่องจากการที่มีผลต่อค่ารีแอกติวิตีน้อยมาก จึงไม่พิจารณา

2.7.2 พลังงานจากเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์

พลังงานที่ปลดปล่อยออกมาในแกนของเครื่องปฏิกรณ์ มาจากพลังงานจากนิวชันโดยตรง (ไม่รวมพลังงานของนิวตริโน) และพลังงานของรังสีแกมมาที่ได้จากกระบวนการจับแบบเรดิเอทีฟของนิวตรอนในไอโซโทปทุกชนิดในแกนกลาง พลังงานจากนิวชันโดยตรงนี้รวมพลังงานจลน์ของนิวชันแฟรกเมนต์ประมาณ 80 เปอร์เซ็นต์ของทั้งหมด (8) กับพลังงานจลน์ของนิวตรอนจากนิวชัน พลังงานจลน์ที่ปลดปล่อยออกมาทันที และจากการสลายตัวให้รังสีแกมมาและเบตา ของนิวชันโปรดักต์

2.7.3 สมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเปลี่ยนแปลงไอโซโทปเชื้อเพลิง

ปฏิกิริยาพื้นฐานที่แสดงไว้ในหัวข้อ 2.7.1 สามารถเขียนเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลลำดับที่หนึ่ง คือ

อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา = อัตราการผลิต - อัตราการสูญเสีย
 สำหรับแต่ละไอโซโทปเมื่อเขียนเป็นสมการแสดงการเปลี่ยนแปลง จะได้

$$U^{235} : \frac{dM_5}{dt} = -[\sigma_5^{(1)} \phi_1 + \sigma_5^{(2)} \phi_2 + \sigma_5^{(3)} \phi_3] M_5 \quad (2.242)$$

$$U^{238} : \frac{dM_6}{dt} = [\sigma_{v5}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{v5}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{v5}^{(3)} \phi_3] M_5 - [\sigma_6^{(1)} \phi_1 + \sigma_6^{(2)} \phi_2 + \sigma_6^{(3)} \phi_3] M_6 \quad (2.243)$$

$$U^{238} : \frac{dM_6}{dt} = -[\sigma_6^{(1)} \phi_1 + \sigma_6^{(2)} \phi_2 + \sigma_6^{(3)} \phi_3] M_6 \quad (2.244)$$

$$Pu^{239} : \frac{dM_9}{dt} = [\sigma_{v9}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{v9}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{v9}^{(3)} \phi_3] M_6 - [\sigma_9^{(1)} \phi_1 + \sigma_9^{(2)} \phi_2 + \sigma_9^{(3)} \phi_3] M_9 \quad (2.245)$$

$$Pu^{240} : \frac{dM_{10}}{dt} = [\sigma_{v9}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{v9}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{v9}^{(3)} \phi_3] M_9 - [\sigma_{10}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{10}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{10}^{(3)} \phi_3] M_{10} \quad (2.246)$$

$$Pu^{241} : \frac{dM_{11}}{dt} = [\sigma_{v10}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{v10}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{v10}^{(3)} \phi_3] M_{10} - [\sigma_{11}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{11}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{11}^{(3)} \phi_3 + \lambda_1] M_{11} \quad (2.247)$$

$$Pu^{242} : \frac{dM_{12}}{dt} = [\sigma_{v11}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{v11}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{v11}^{(3)} \phi_3] M_{11} - [\sigma_{12}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{12}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{12}^{(3)} \phi_3] M_{12} \quad (2.248)$$

- โดยที่ M_i เป็นความหนาแน่นของไอโซโทปที่ i ในหน่วยกิโลกรัมต่อลิตร ที่จุดใด ในแกนกลาง
 i เป็นตัวเลขตัวสุดท้ายของเลขมวลไอโซโทป เช่น $i=5$ สำหรับยูเรเนียม-235
 $\sigma_i^{(j)}$ เป็นค่าภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืน
 $\sigma_{vi}^{(j)}$ เป็นค่าภาคตัดขวางจุลภาคของการเกิดฟิชชัน
 $\sigma_{vi}^{(j)}$ เป็นค่าภาคตัดขวางจุลภาคของการจับแบบเรดิเอทีฟ

ค่า j แทนด้วย 1, 2 และ 3 หมายถึงกลุ่มของนิวตรอน 3 กลุ่ม คือกลุ่มนิวตรอนเร็ว, กลุ่มนิวตรอนเรโซแนนซ์ และกลุ่มนิวตรอนช้า ตามลำดับ

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 หมายถึง ฟลักซ์รวมของนิวตรอนรวมในกลุ่มเร็ว เรโซแนนซ์ และช้า ตามลำดับ

2.7.4 คำตอบของสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของไอโซโทปเชื้อเพลิง

โดยทั่วไปสเปกตรัมของนิวตรอนจะคงที่ในบริเวณหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์ในช่วงเวลาหนึ่ง นั่นคืออัตราส่วนของ $\phi_1/\phi_3, \phi_2/\phi_3$ และ ϕ_1/ϕ_2 คงที่ ในเครื่องปฏิกรณ์แบบเทอร์โมมีผลส่วนใหญ่ของนิวตรอนจะเกิดขึ้นจากกลุ่มของนิวตรอนช้า และความเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์เทียบกับเวลาที่เนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของไอโซโทปฟิสไซล์ สามารถใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์นิวตรอนช้า (ϕ_3)

พิจารณาจากสมการแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ยูเรเนียม-235

$$U^{235} : \frac{dM_5}{dt} = -[\sigma_5^{(1)} \frac{\phi_1}{\phi_3} + \sigma_5^{(2)} \frac{\phi_2}{\phi_3} + \sigma_5^{(3)}] \phi_3 M_5 \quad (2.249)$$

สัมประสิทธิ์ $\phi_3 M_5$ พิจารณาเป็นค่าคงที่ ภายในช่วงเวลาหนึ่งและในบริเวณหนึ่งๆ ของเครื่องปฏิกรณ์ คำตอบของสมการข้างต้น คือ

$$M_5(t) = M_5(0) \exp(-\mu_5 \int_0^t \phi_3(t') dt') \quad (2.250)$$

$$\text{เมื่อ } \mu_5 \equiv \frac{\sigma_5^{(1)} \phi_1}{\phi_3} + \frac{\sigma_5^{(2)} \phi_2}{\phi_3} + \sigma_5^{(3)} \quad (2.251)$$

และ $M_5(0)$ เป็นค่าเริ่มต้น โดยการกำหนดเทอมสโลว์ฟลูเอินซ์ (slow fluence, θ) โดยให้

$$\theta = \int_0^t \phi_3(t') dt' \quad (2.252)$$

เมื่อดิฟเฟอเรนทิเอตสมการ (2.252) จะได้

$$d\theta/dt = \phi_3(t) \quad (2.253)$$

สมการ (2.242) ถึง (2.248) เมื่อเขียนในเทอมของ θ จะได้

$$\frac{dM_5}{d\theta} = -\mu_5 M_5 \quad (2.254)$$

$$\frac{dM_e}{d\theta} = \gamma_s M_s - \mu_e M_e \quad (2.255)$$

$$\frac{dM_e}{d\theta} = -\mu_e M_e \quad (2.256)$$

$$\frac{dM_g}{d\theta} = \gamma_o M_o - \mu_g M_g \quad (2.257)$$

$$\frac{dM_o}{d\theta} = \gamma_g M_g - \mu_o M_o \quad (2.258)$$

$$\frac{dM_1}{d\theta} = \gamma_o M_o - \mu_1 M_1 \quad (2.259)$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \gamma_1 M_1 - \mu_2 M_2 \quad (2.260)$$

เมื่อ $\gamma_i \equiv \sigma_{yi}^{(1)} \phi_1 / \phi_3 + \sigma_{yi}^{(2)} \phi_2 / \phi_3 + \sigma_{yi}^{(3)}$

ในทุกไอโซโทปยกเว้นพลูโทเนียม-241 ค่า μ_i มีรูปแบบเดียวกันตามสมการ (2.251) แต่สำหรับ พลูโทเนียม-241 ต้องรวมเทอมของการสลายตัวเข้าไปด้วย

$$\mu_1 = [\sigma_{y1}^{(1)} \phi_1 / \phi_3 + \sigma_{y1}^{(2)} \phi_2 / \phi_3 + \sigma_{y1}^{(3)} + \lambda_1 / \phi_3] \quad (2.261)$$

ทำให้ค่า μ_1 ไม่เป็นค่าคงที่ แต่เนื่องจาก λ_1 / ϕ_3 มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่น ดังนั้นจึงใช้ค่าเริ่มต้นของ ϕ_3 และพิจารณาให้ μ_1 คงที่ สำหรับคำตอบของสมการ (2.254)-(2.260) เมื่อเขียนในเทอมของ พลูเออร์ แสดงอยู่ในตาราง 2.2

ตาราง 2.2 การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นไอโซโทปเทียบกับผลคูณ

$$M_s(\theta) = M_s(0) \exp(-\mu_s \theta)$$

$$M_e(\theta) = \left[\frac{M_e(0) + \gamma_s M_s(0)}{\mu_s - \mu_e} \right] \exp(-\mu_e \theta) + \frac{\gamma_s M_s(0) \exp(-\mu_s \theta)}{\mu_s - \mu_e}$$

$$M_o(\theta) = M_o(0) \exp(-\mu_o \theta)$$

$$M_g(\theta) = \left[\frac{M_g(0) + \gamma_o M_o(0)}{\mu_o - \mu_g} \right] \exp(-\mu_g \theta) + \frac{\gamma_o M_o(0) \exp(-\mu_o \theta)}{\mu_o - \mu_g}$$

$$M_0(\theta) = A \exp(-\mu_0 \theta) + B \exp(-\mu_o \theta) + C \exp(-\mu_g \theta)$$

$$M_1(\theta) = D \exp(-\mu_1 \theta) + E \exp(-\mu_o \theta) + F \exp(-\mu_g \theta) + G \exp(-\mu_e \theta)$$

$$M_2(\theta) = H \exp(-\mu_2 \theta) + G \exp(-\mu_o \theta) + R \exp(-\mu_1 \theta) + S \exp(-\mu_g \theta) + T \exp(-\mu_e \theta)$$

เมื่อ

$$A = M_o(0) + \frac{\gamma_o \gamma_s M_s(0)}{(\mu_o - \mu_g)(\mu_g - \mu_e)} + \frac{\gamma_o M_o(0)}{(\mu_o - \mu_o)} + \frac{\gamma_o \gamma_s M_s(0)}{(\mu_e - \mu_o)(\mu_o - \mu_g)}$$

$$B = \frac{\gamma_o}{\mu_o - \mu_g} \left[\frac{M_o(0) + \gamma_s M_s(0)}{\mu_o - \mu_g} \right]$$

$$C = \frac{\gamma_o \gamma_s M_s(0)}{(\mu_o - \mu_g)(\mu_g - \mu_e)}$$

$$D = M_1(0) + \frac{\mu_o}{\mu_o - \mu_1} A + \frac{\mu_o}{\mu_o - \mu_1} B + \frac{\mu_o}{\mu_e - \mu_1} C$$

$$E = \frac{\mu_o}{\mu_1 - \mu_o} A$$

$$F = \frac{\mu_o}{\mu_1 - \mu_o} B$$

ตาราง 2.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นไอโซโทปกับฟลักเอนซ์ (ต่อ)

$$G = \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} C$$

$$H = M_2(0) + \frac{\gamma_1}{\mu_1 - \mu_2} D + \frac{\gamma_1}{\mu_0 - \mu_2} E + \frac{\gamma_1}{\mu_0 - \mu_2} F + \frac{\gamma_1}{\mu_0 - \mu_2} G$$

$$Q = \frac{\gamma_1}{\mu_2 - \mu_0} E$$

$$R = \frac{\gamma_1}{\mu_2 - \mu_1} D$$

$$S = \frac{\gamma_1}{\mu_2 - \mu_0} F$$

$$T = \frac{\gamma_1}{\mu_2 - \mu_0} G$$

2.7.5 การกำเนิดพลังงาน (energy generation)

กำหนดให้ P เป็นความหนาแน่นกำลังในบริเวณหนึ่งของแกนเครื่องปฏิกรณ์ มีหน่วยเป็น กิโลวัตต์ต่อลิตร เนื่องจากสมการแสดงการเปลี่ยนแปลงเป็นการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นมวลของไอโซโทปฟิสไซล์ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีแฟกเตอร์มาคูณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็น P ตัวอย่างเช่น จำนวนของการเกิดนิวตรอนโดยนิวตรอนช้าในยูเรเนียม-235 1 ซม.³ แต่ในสมการแสดงการเปลี่ยนแปลงแสดงอยู่ในเทอมของความหนาแน่นยูเรเนียม-235 ในหน่วยกิโลกรัมต่อลิตร เพื่อคำนวณ N_5 จาก M_5 โดยการคูณ M_5 ด้วยเลขอาโวกาโดรแล้วหารด้วย มวลอะตอม A_0

ถ้า w_5 เป็นพลังงานต่อนิวตรอนในหน่วย วัตต์-วินาทีต่อนิวตรอน ดังนั้นแฟกเตอร์ที่จะนำไปคูณคือ $C_5 = w_5 n_0 / A_0$ แฟกเตอร์ C ของไอโซโทปต่างๆ แสดงในตาราง 2.3 (8) ความหนาแน่นกำลังสามารถเขียนได้เป็น

$$P = C_5 [\sigma_{r5}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{r5}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{r5}^{(3)} \phi_3] M_5 + C_0 \sigma_{r0}^{(1)} \phi_1 M_0$$

$$+ C_0 [\sigma_{r0}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{r0}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{r0}^{(3)} \phi_3] M_0$$

$$+ C_1 [\sigma_{r1}^{(1)} \phi_1 + \sigma_{r1}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{r1}^{(3)} \phi_3] M_1$$

(2.262)

ตาราง 2.3 พลังงานต่อฟิชชัน และค่าแฟกเตอร์ C ของไอโซโทปต่างๆ (8)

ไอโซโทป	จำนวนนิวตรอน ฟิชชัน (ν) นิวตรอนกลุ่มที่			$W(i)$ (10^{-11} W·S) fission นิวตรอนทุกกลุ่ม	C_i 10^{10} kW·S/kg นิวตรอนทุกกลุ่ม
	1	2	3		
	U-235	2.58	2.44		
U-238	--	--	2.60	3.09	7.82
Pu-239	3.05	2.89	2.89	3.24	8.16
Pu-241	3.18	3.02	3.02	3.27	8.17

พลังงานที่ผลิตขึ้นต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในระหว่างช่วงเวลา t_0 ได้จากการอินทิเกรตสมการ (2.262) จากเวลา 0 ถึง t_0 มีหน่วยเป็นกิโลวัตต์ชั่วโมงต่อลิตรแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(t_0)$ และก่อนที่จะคำนวณเพื่อให้สะดวกขึ้นโดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่า P กับ ϕ_3 จะได้ว่า

$$P = \beta_5 \phi_3 M_5 + \beta_6 \phi_3 M_6 + \beta_9 \phi_3 M_9 + \beta_1 \phi_3 M_1 \quad (2.263)$$

เมื่อ $\beta_i = C_i \left[\sigma_{f1}^{(1)} \frac{\phi_1 + \sigma_{f1}^{(2)} \phi_2 + \sigma_{f1}^{(3)} \phi_3}{\phi_3} \right], \quad i = 1, 5, 9$

และ $\beta_6 = C_6 \sigma_{f6}^{(1)} \phi_1 / \phi_3$

จากสมการ (2.253) คือ $d\theta = \phi_3 dt$ จะได้ว่า ความหนาแน่นพลังงาน

$$E(T_0) = \frac{1}{3600} \int_0^{t_0} P dt = \frac{1}{3600} \int_0^{\theta} \sum_{i=1,5,9} \beta_i M_i(\theta) d\theta \quad (2.264)$$

มีหน่วยเป็นกิโลวัตต์ชั่วโมงต่อลิตร แฟกเตอร์ $1/3600$ เปลี่ยนเวลาจากวินาทีเป็นชั่วโมง การอินทิเกรตสมการ (2.264) โดยการใช้ความหนาแน่นมวลของไอโซโทปเป็นฟังก์ชันของฟลูเอเนสส์ จะได้

$$E(\theta) = \frac{1}{3600} \left\{ \frac{\beta_s M_s(\theta)(1-e^{-\mu_s \theta})}{\mu_s} + \frac{\beta_o M_o(\theta)(1-e^{-\mu_o \theta})}{\mu_o} \right. \\ \left. + \frac{(M_s(\theta) + \gamma_o M_o(\theta)) \beta_o (1-e^{-\mu_o \theta})}{\mu_o - \mu_s} - \frac{\gamma_o M_o(\theta) \beta_o (1-e^{-\mu_s \theta})}{\mu_o - \mu_s} \right. \\ \left. + \frac{\beta_1 D(1-e^{-\mu_1 \theta})}{\mu_1} + \frac{\beta_1 E(1-e^{-\mu_o \theta})}{\mu_o} + \frac{\beta_1 F(1-e^{-\mu_o \theta})}{\mu_o} + \frac{\beta_1 G(1-e^{-\mu_o \theta})}{\mu_o} \right\} \quad (2.265)$$

ความหนาแน่นมวลของไอโซโทปเชื้อเพลิงที่เป็นฟังก์ชันของฟลูเอเนสส์คำนวณได้จากสมการในตาราง 2.2 ความหนาแน่นพลังงานคำนวณได้จากสมการ (2.265) ซึ่งใช้ได้กรณีที่มีความหนาแน่นกำลังคงที่สำหรับช่วงเวลาที่ต้องการเพื่อใช้คำนวณความหนาแน่นพลังงาน $E(\theta)$ คือ

$$t = E(\theta)/P \quad (2.266)$$

การคำนวณเบิร์นอัพของเชื้อเพลิงวัดในหน่วยเมกะวัตต์-วัน ของความร้อนที่ผลิตขึ้นต่อหน่วยเมตริกตันของไอโซโทปยูเรเนียมและพลูโทเนียมทั้งหมดที่มีอยู่ในเชื้อเพลิง ถ้าช่วงเวลาที่ใช้คำนวณสั้นพอ จน ϕ_s มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จะได้ว่าค่าเบิร์นอัพของเชื้อเพลิง

$$\frac{MWD}{MTF} = \frac{E(\theta)}{24M_T} = \frac{Pt}{24M_T} \quad (2.267)$$

เมื่อ M_T เป็นความหนาแน่นมวลของทั้งยูเรเนียมและพลูโทเนียมในหน่วยกิโลกรัมต่อลิตรของเชื้อเพลิงบริสุทธิ์ ค่าของฟลูเอเนสส์เปลี่ยนเป็น

$$\theta = \phi_s t \quad (2.268)$$

สรุปขั้นตอนการคำนวณเบิร์นอัพของเชื้อเพลิง ทำตามลำดับดังนี้

- (1) ใส่ค่าภาคตัดขวางจุลภาคทั้งหมด
- (2) ใส่ค่าเริ่มต้นของ $M_1, \phi_1/\phi_2, \phi_2/\phi_3$ และ P

- (3) ค่าความ ϕ_0 จากสมการ (2.263)
- (4) ใส่ค่าช่วงเวลาที่ใช้คำนวณ (time increment) ในหน่วยชั่วโมง
- (5) ค่าความเบี่ยงเบนด้วยใช้สมการ (2.267)
- (6) ค่าความค่าฟลักซ์ โดยสมการ (2.268)
- (7) ค่าความค่า M_1 โดยสมการในตาราง 2.2 จากค่าฟลักซ์ สำหรับในช่วงเวลาที่ถัดไป (โดยที่ค่าภาคตัดขวางจุลภาคยังคงที่)
- (8) ใส่ค่า $M_1(t)$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 7 และทำซ้ำตั้งแต่ขั้นตอนที่ 3 ถึง 7

2.7.6 อัตราส่วนการแปลง (instantaneous conversion ratio, ICR)

อัตราส่วนการแปลง คืออัตราส่วนระหว่างอัตราการเกิดของไอโซโทปฟิสไซส์กับอัตราการดูดกลืนของไอโซโทปฟิสไซส์ ค่าอัตราส่วนการแปลงเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับค่าฟลักซ์ ที่เวลา t โดย สำหรับในวัฏจักรเชื้อเพลิงยูเรเนียม-พลูโทเนียม ซึ่งจัดพลูโทเนียม-240 เป็นนิวคลีอ์ไนด์เช่นเดียวกับยูเรเนียม-238 จะได้ว่า

$$ICR(t) = \frac{\gamma_0 M_0(t) + \mu_0 M_0(t)}{\mu_0 M_0(t) + \mu_1 M_1(t)} \quad (2.269)$$

2.7.7 ความเป็นพิษของฟิชชันโปรดักต์ (Fission products poisoning)

ปฏิกิริยาฟิชชันก่อให้เกิดไอโซโทปชนิดต่างๆ ขึ้นภายในแกนของเครื่องปฏิกรณ์ ไอโซโทปเหล่านี้รวมเรียกว่าฟิชชันโปรดักต์ ไอโซโทปซีซอน-135 และซามเมเรียม-149 เป็นฟิชชันโปรดักต์ที่มีการผลิตออกมามากที่สุดและเป็นไอโซโทปที่มีค่าภาคตัดขวางสำหรับนิวตรอนเทอร์มัลสูง ในแกนกลางของเครื่องปฏิกรณ์ความเข้มข้นของไอโซโทปทั้งสองจะเพิ่มขึ้นและเข้าสู่สมดุลอย่างรวดเร็ว ซีซอน-135 ส่วนใหญ่เกิดจากการสลายตัวให้รังสีเบตาของไอโซโทปไอโอดีน-135 ซึ่งเป็นฟิชชันโปรดักต์โดยตรง นอกจากนี้ตัวมันเองก็เป็นฟิชชันโปรดักต์โดยตรงด้วย เนื่องจากค่าภาคตัดขวางของการดูดกลืนนิวตรอนของไอโอดีน-135 ค่อนข้างน้อยเมื่อเทียบกับอัตราการสลายตัวให้รังสีเบตา ดังนั้นถ้าให้ y เป็นผลผลิตของไอโอดีน-135 รวมกับผลผลิตโดยตรงของซีซอน-135 ในหน่วยอะตอมต่อฟิชชัน และให้ F เป็นอัตราการเกิดฟิชชันต่อหน่วยปริมาตร จะได้ว่าความหนาแน่นอะตอมสมดุลของซีซอน-135 คือ

$$\text{อัตราการดูดกลืน} = \text{อัตราการผลิต}$$

$$N_{x_0} [\sigma_{x_0} \phi_0 + \lambda_{x_0}] = yF$$

ค่าภาคตัดขวางมหภาคของการดูดกลืนนิวตรอนเทอร์มัลจะมีค่าสมดุลอยู่ที่

$$\Sigma_{x_e}^{(3)} = \frac{\sigma_{x_e}^{(3)}}{\sigma_{x_e}^{(3)} \phi_3 + \lambda_{x_e}} yF \quad (2.270)$$

สำหรับการคูณกลืนนิวตรอนพลังงานสูงของซีอน-135 ตัดทิ้งได้เนื่องจากภาคตัดขวางของการคูณกลืนนิวตรอนช้ามีค่าสูงมากเมื่อเทียบกับที่นิวตรอนพลังงานสูง ผลผลิตรวมของซีอน-135 เป็น .065 และ .072 (8) อะตอมต่อฟิชชันสำหรับยูเรเนียมและพลูโทเนียม ตามลำดับ แต่เนื่องจากในเครื่องปฏิกรณ์แบบ PWR ประมาณ 20 เปอร์เซนต์ของฟิชชันเกิดเนื่องจาก พลูโทเนียม-239 (8) ดังนั้นค่าผลผลิตเฉลี่ยต่อฟิชชันประมาณ .066 (ไม่พิจารณาฟิชชันเนื่องจากยูเรเนียม-238 และพลูโทเนียม-241) ค่าภาคตัดขวางสำหรับนิวตรอนช้าของซีอน-135 ในเครื่องปฏิกรณ์แบบนี้มีค่าประมาณ 1.53×10^5 บาร์น (8) ค่าคงที่ของการสลายตัวของซีอน-135 คือ 2.11×10^{-5} ต่อวินาที ดังนั้นอัตราส่วนระหว่างการคูณกลืนนิวตรอนในซีอน-135 กับการเกิดฟิชชันคือ

$$\frac{\Sigma_{x_e}^{(3)} \phi_3}{F} = \frac{0.066}{1 + 1.4 \times 10^{13} / \phi_3} \quad (2.271)$$

เครื่องปฏิกรณ์แบบ PWR มีฟลักซ์นิวตรอนช้าเฉลี่ยประมาณ 3×10^{13} โดยมีค่าสูงสุด 8×10^{13} นิวตรอนต่อ cm^2 ต่อวินาที (8) เมื่อคำนวณอัตราส่วนของการคูณกลืนในซีอน-135 ต่อการเกิดฟิชชันจะได้ค่า .045 และ .056 ตามลำดับ

ซาแมเรียม-149 เป็นผลผลิตสุดท้ายที่เสถียรของการสลายตัวให้รังสีเบตา 2 ครั้งจากไอโซโทปนีโอดีเมียม-149 (Nd-149) ซึ่งเป็นฟิชชันโปรดักต์โดยตรง โดยการสลายตัวอย่างรวดเร็วกลายเป็นไอโซโทปโพรมีเทียม-149 (Pm-149) แล้วสลายตัวต่อไปเป็น ซาแมเรียม-149 ด้วยครึ่งชีวิต 53 ชั่วโมง การคูณกลืนนิวตรอนของนีโอดีเมียม-149 และโพรมีเทียม-149 น้อยมากเมื่อเทียบกับซาแมเรียม-149 ค่าความหนาแน่นอะตอมสมมูลของ ซาแมเรียม-149 หาได้จาก

$$N_{sm} \sigma_{sm}^{(3)} \phi_3 = yF \quad (2.272)$$

อัตราส่วนการคูณกลืนของ ซาแมเรียม-149 ต่อการเกิดฟิชชัน คือ

$$\Sigma_{sm}^{(3)} \phi_3 / F = y \quad (2.273)$$

ข้อที่แตกต่างกันกับซีอน-135 คือสมมูลของซาแมเรียม-149 ขึ้นอยู่กับการผลิตซาแมเรียม-149 เพียงอย่างเดียว ซึ่งผลผลิตของมันจะเท่ากับ .011 และ .013 (8) สำหรับยูเรเนียม-235 และพลูโทเนียม-239 ตามลำดับ

สำหรับฟิชชันโปรดักต์ที่เหลือทั้งหมดจะแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ของแต่ละไอโซโทปฟิสไซส์ คือ

(1) กลุ่มอิ่มตัวอย่างช้าๆ (slowly saturating) เป็นนิชชันโปรดักท์กลุ่มที่จะเข้าสู่ค่าสมดุลหลังจากอาบนิวตรอนในระดับกำลังคงที่ อยู่ชั่วระยะเวลาหนึ่ง

(2) กลุ่มที่ไม่อิ่มตัว (non-saturating) เป็นนิชชันโปรดักท์กลุ่มที่มีค่าภาคตัดขวางของการดูดกลืนเฉลี่ยน้อยมาก

ค่าผลผลิตและค่าภาคตัดขวางสำหรับนิวตรอนเรโซแนนซ์และนิวตรอนช้า แสดงอยู่ในตาราง 2.4 ส่วนการดูดกลืนสำหรับนิวตรอนเร็วในตัดทิ้งได้สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบเทอร์มัล (thermal reactor)

ความเข้มข้นของนิชชันโปรดักท์กลุ่มที่อิ่มตัวอย่างช้า ๆ เป็นฟังก์ชันกับเวลาเขียนในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลได้คือ

$$\frac{dN}{dt} = yF - \mu\phi_3 N$$

- เมื่อ
- y เป็นผลผลิต (yield)
 - F เป็นอัตราแสดงความหนาแน่นของการเกิดนิชชัน
 - $\mu = \sigma_a^{(2)} \phi_2 / \phi_3 + \sigma_a^{(3)}$

ตาราง 2.4 ผลผลิตและภาคตัดขวางสำหรับนิวตรอนเรโซแนนซ์และนิวตรอนช้า (8)

Neutron Macro-Group	Energy Interval (eV)	Lethargy interval
Fast	$5.531 \times 10^3 - 1.0 \times 10^7$	7.50
Resonance	$0.640 - 5.531 \times 10^3$	9.06
Slow	$0.000 - 0.640$	--

Fission Product Group	U-235			Pu-239		
	Yield	$\sigma_a^{(2)}$	$\sigma_a^{(3)}$	Yield	$\sigma_a^{(2)}$	$\sigma_a^{(3)}$
Slowly Saturating	0.38	51	104	0.4	60	115
Non-Saturating	1.54	1.4	3.4	1.5	3.7	4.4

หมายเหตุ : Yield ในหน่วยอะตอมต่อนิชชัน, ภาคตัดขวางในหน่วยบาร์น และ $\sigma_a^{(3)}$ เป็นค่าที่ 2200 เมตรต่อวินาที

คำตอบของสมการอยู่ในรูป

$$N(t) = N(0) + yF (1 - e^{-\mu t}) \tag{2.274}$$

สำหรับความเข้มข้นของนิชชันโปรดักท์ในกลุ่มที่ไม่อิ่มตัว อยู่ในรูป

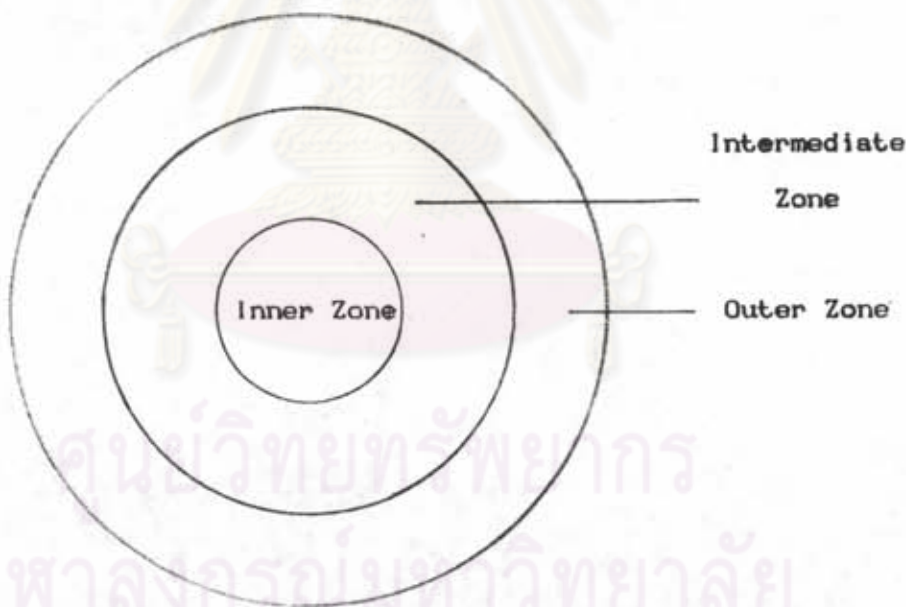
$$N(t) = N(0) + y F t \tag{2.275}$$

เนื่องจากมีค่าภาคตัดขวางน้อย ดังนั้นนิชชันโปรตักท์ในกลุ่มนี้จึงสลายไปน้อยมากจากการดูดกลืนนิวตรอน

2.7.8 การประยุกต์ในการคำนวณวัฏจักรเชื้อเพลิงของเครื่องปฏิกรณ์

วัฏจักรเชื้อเพลิงของเครื่องปฏิกรณ์หมายถึงช่วงเวลาของการเปลี่ยนเชื้อเพลิงซึ่งมีวิธีการอยู่หลายวิธีในการเปลี่ยนเชื้อเพลิงของเครื่องปฏิกรณ์ วิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบ PWR คือแบบเข้าออกสามโซน (Three zone out-in pattern) แสดงดังรูป 2.8

เมื่อถึงเวลาที่ต้องมีการเปลี่ยนแท่งเชื้อเพลิง จะนำชุดเชื้อเพลิงออกจากโซนในสุดเพื่อไปทำรีโพรเซสซิง และสลับเอาชุดเชื้อเพลิงจากโซนกลางไปแทนที่ แล้วนำชุดเชื้อเพลิงจากโซนนอกสุดไปแทนในโซนกลาง นำเชื้อเพลิงใหม่ใส่ในโซนนอกสุด เนื่องจากอัตราส่วนการแปลง (ICR) ของเครื่องปฏิกรณ์ชนิดน้ำธรรมดา มีค่าประมาณ 0.55 (8) ค่า k ของชุดเชื้อเพลิงจะลดลงจากค่าสูงสุดในโซนนอก และค่าต่ำสุดในโซนใน ค่า k เริ่มต้นและสิ้นสุดของเชื้อเพลิงในเครื่องปฏิกรณ์แบบ PWR ซึ่งใช้ยูเรเนียมความเข้มข้นยูเรเนียม-235 สูง 3 เปอร์เซ็นต์ แสดงในตาราง 2.5 การผลิตพลังงานของเชื้อเพลิงที่ดึงออกมีค่าประมาณ 28000 เมกะวัตต์วันต่อเมตริกตันยูเรเนียม (8)



รูป 2.8 รูปแบบการจัดเชื้อเพลิงแบบ เข้า-ออกสามโซน

ในเครื่องปฏิกรณ์ปกติจะทำงานเต็มกำลังโดยการดึงแท่งควบคุมออกมาประมาณ 90-95 เปอร์เซ็นต์ (8) การควบคุมสภาวะวิกฤตทำได้ทั้งโดยการเคลื่อนที่แท่งควบคุม และการปรับค่าความเข้มข้นของกรดบอริก (boric acid) ในน้ำที่ใช้ระบายความร้อนและหน่วงนิวตรอน เมื่อเชื้อเพลิงค่อยๆ หมดไปสภาวะวิกฤตจะควบคุมโดยการลดความเข้มข้นของกรดบอริก ส่วนแท่งควบคุมใช้เพื่อการเปลี่ยนระดับกำลัง การกระจายของ

กำลังเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาอย่างไม่คงที่ ค่าอัตราส่วนระหว่างค่ากำลังสูงสุดกับค่ากำลังเฉลี่ย จะเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงประมาณ 2 ถึง 3 (8) ในระหว่างการทำงานที่ระดับกำลังครึ่งหนึ่งของระดับกำลังเต็ม

ตาราง 2.5 ค่ามัธยัสถ์เคชันแฟกเตอร์ชนิดอนันต์ของ PWR เมื่อใช้วัฏจักรเชื้อเพลิงแบบ 3 โซน (8)

k_{∞} of Fuel Zones for Typical PWR
Three Zone Out-In Fuel Cycle

	Fuel Zone		
	Center	Intermediate	Outer
initial	1.04	1.15	1.27
final	0.97	1.04	1.15

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย