บทที่ 4

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง

4.1 คำนำ

ปัญหาซึ่งเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ของฟังก์ชั่นของตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป โดยที่ตัวแปร(หรือฟังก์ชั่น) เหล่านี้ต้องเป็นไปตามการบังคับ (Constraints) อย่างหนึ่งที่กำหนด ปัญหาลักษณะเช่นนี้จะเรียกว่า ปัญหา Optimization เทคนิคของการ Optimization เหล่านี้ เป็นที่รู้จักกันมานานแล้วกว่า 150 ปี และได้ถูกนำไปใช้ในการหาคำตอบในปัญหาทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรมศาสตร์จำนวนมากและให้ผลเป็นที่น่าพอใจ โดยทั่วไปเทคนิคของการ Optimization ที่เคยใช้มาแล้วในอดีตจะใช้แก้ปัญหาการโปรแกรมได้น้อยมาก ดังนั้นจึงมีการพัฒนาวิธีใหม่ๆ ขึ้นมาหลายวิธี แต่ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นตรงอย่างเดียวเท่านั้น

กล่าวโดยทั่วไปแล้วการแก้ปัญหาการโปรแกรม ก็คือการแบ่งสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดอย่างดีที่สุดเพื่อให้เป็นไปตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ เนื่องจากทรัพยากรมีอยู่อย่างจำกัดจึงมีวิธีจัดสรร(คำตอบ) ได้หลายวิธี เพื่อจะให้บรรลุเป้าหมาย แต่วิธีจัดสรรคำตอบที่เป็นไปตามข้อกำหนดเกี่ยวกับทรัพยากรและให้ได้ผลตามจุดประสงค์เหมาะที่สุดจะเรียกว่า คำตอบเหมาะที่สุด (Optimum Solution)

การศึกษาเรื่องการลดกำลังสูญเสียของระบบไฟฟ้ากำลังให้น้อยที่สุดนี้ ก็ได้อาศัยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาช่วยหาผลลัพธ์ หรือค่าที่เหมาะที่สุด(กำลังสูญเสียน้อยที่สุด)ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดของปัญหาการออปติไมซ์กำลังสูญเสียของระบบ จำเป็นจะต้องทราบรายละเอียดของเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นตรง[18]เสียก่อน ทั้งนี้เพื่อจะได้เข้าใจและนำไปสู่ปัญหาการลดกำลังสูญเสียที่จะได้กล่าวในบทต่อไป

4.2 รูปแบบแทนระบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear Programming Model)

เทคนิคการออปติไมซ์ (Optimization) คือการทำให้ค่าของฟังก์ชันหนึ่งๆ มีค่าเหมาะสม(มากที่สุดหรือน้อยที่สุด) โดยการปรับตัวแปรควบคุมและระบบนั้นยังคงเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ(Constraints)การโปรแกรมเชิงเส้นตรงจึงจำเป็นต้องมีรูปแบบแทนระบบทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้สอดคล้องกับการออปติไมซ์ เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปร และฟังก์ชัน เหมาะสมที่สุด

รูปแบบแทนระบบทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมีโครงสร้างดังนี้

1. ฟังก์ชันหรือสมการกำหนดเป้าหมาย (Objective Function) คือการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร เป็นสมการหรือฟังก์ชันที่จะทำการ Optimization เพื่อให้ได้เป้าหมายสูงสุดหรือต่ำสุด (Maximize,Minimize)

2. มีสมการแสดงขอบข่าย (Constraints) ซึ่งแสดงความจำกัดของเงื่อนไขบังคับในการทำออปติไมซ์ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ เงื่อนไขบังคับแบบอสมการ (Inequality Constraints) และเงื่อนไขบังคับแบบสมการ (Equality Constraint)

3. ความสัมพันธ์ของตัวแปรในสมการต่างๆ ของรูปแบบแทนระบบ ต้องมีลักษณะเชิงเส้นตรง (Linear Form) คือตัวแปรทุกตัว ในสมการเป้าหมายและสมการหรืออสมการของขอบข่ายจะต้องมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงเป็นกำลังเดียวกัน(โดยมากเป็นกำลังหนึ่ง)

4. ตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ (All Positive Value)

จากรูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้จะเห็นได้ว่าตัววัดผลของการออปติไมซ์ (Measure Of Effectiveness) จะได้จากสมการกำหนดเป้าหมายซึ่งเราจะต้องพยายามหาค่าเป็นไปตามเป้าหมาย โดยเทคนิคที่มีอยู่ตัวแปรต่างๆจะเป็นตัวแทนจำนวนปริมาณที่มีอยู่จำกัด โดยการกำหนดสมการหรืออสมการขอบข่ายของปัญหา ผลการวิเคราะห์จะได้เป็นค่าของตัวแปรที่จะนำไปตัดสินใจเพื่อดำเนินการให้ได้ตามเป้าหมายการกำหนดขอบข่ายของปัญหาด้วยสมการ หรืออสมการนั้นเรากำหนดขึ้นแทนความเป็นจริง ซึ่งจะมีโอกาสอยู่ในระบบของอสมการมากกว่า

รูปแบบแทนระบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปร เช่น $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่ทำให้ผลการดำเนินงานที่มีค่าสูงสุดตามสมการเป้าหมายดังนี้

สมการเป้าหมาย :Max.Z = $C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots\dots + C_n X_n$ (4.1)

สมการหรืออสมการขอบข่าย: $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots\dots + a_{1n} X_n \le b_1$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots\dots + a_{2n} X_n \le b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1} X_2 + a_{m2} X_2 + \dots\dots + a_{mm} X_n \le b_m$$

$X_i \ge 0$; $i=1,2,\dots,n$

โดยมี $Z= F(X_i)$ เป็นสมการเป้าหมาย

X_i เป็นค่าตัวแปรที่แทนค่าในสมการเป้าหมาย

a_{ij} ,C_j เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าคงที่

b_i เป็นปริมาณเงื่อนไขที่จะนำมาใช้ในแต่ละอสมการซึ่งมีค่าคงที่ ในตัวอย่างนี้เรามีตัวแปรที่จะสามารถเลือกเปลี่ยนได้อยู่ n ตัว การเพิ่มค่าตัวแปรตัวหนึ่งตัวใดมีผลทำให้ตัวแปรอื่นๆที่เกี่ยวข้องกันลดค่าลงไปด้วยภายใต้ขอบข่ายที่กำหนดเป็นสมการหรืออสมการ โดยเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์คือ = (เท่ากับ),$\le$(น้อยกว่าหรือเท่ากับ) และ$\ge$(มากกว่าหรือเท่ากับ)

4.3 ขั้นตอนการดำเนินการของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

เพื่อช่วยให้เข้าใจลักษณะของปัญหา และวิธีการใช้เทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นตรงในการแก้ปัญหาต่างๆ ซึ่งเราพอสรุปขั้นตอนการดำเนินงานได้ดังนี้

1. การจัดตั้งรูปแบบแทนระบบของปัญหา(Model Formulation)

ก่อนอื่นต้องศึกษาข้อมูลองค์ประกอบของปัญหาให้เข้าใจ โดยเลือกเฉพาะองค์ประกอบที่สำคัญและมีอิทธิพลมาก แล้วจัดตั้งตัวแปรแทนส่วนประกอบของปัญหานั้นๆ ให้ถูกต้องจนสามารถจัดตั้งส่วนประกอบดังนี้

ก. สมการกำหนดเป้าหมาย

ข. สมการหรืออสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรภายใต้ขอบข่ายต่างๆที่มีอยู่

ค. ให้แน่ใจว่าสมการหรืออสมการต่างๆ ที่ตั้งขึ้นแล้วเป็นไปในลักษณะของสมการเชิงเส้นตรงและมีค่าของตัวแปรทุกตัวเป็นค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. การหาผลลัพธ์ของรูปแบบแทนระบบของปัญหา(Model Solution)

เมื่อสามารถจัดปัญหาเข้ารูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเรียบร้อยแล้ว เราจะสามารถหาผลลัพธ์จากรูปแทนระบบด้วยวิธีการดังกล่าวต่างๆ ดังนี้

ก. ในกรณีที่ปัญหาที่มีตัวแปรเป็น 2 ตัว เราอาจใช้

1. วิธีกำจัดขอบข่ายของคำตอบ (Direct Elimination Method)
2. วิธีอนุมานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Deduction Method)
3. วิธีกราฟ (Graphical Method)

ข. ในกรณีที่เป็นปัญหามีตัวแปรมากกว่า 2 ตัว เราอาจใช้

1. วิธีทางพีชคณิตทั่วไป (General Algebraic Method)
2. วิธี Simplex Method

4.4 การหาผลลัพธ์ของรูปแบบแทนระบบของปัญหา(Model Solution)

รูปแบบของปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะสามารถเขียนให้รัดกุมได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย: Max.(Min.)Z = $c_j x_j$ (4.2)

อสมการขอบข่าย $a_{1j} x_j \quad (\le,=,\ge) b_1$

$$a_{mj} x_j \quad (\le,=,\ge) b_m$$

และ $x_j \ge 0$

โดยมากระบบของปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้น จะมีตัวแปรซึ่งเป็นองค์ประกอบของระบบจำนวนมากซึ่งมีความซับซ้อนมากการหาผลลัพธ์จึงมักจะใช้คอมพิวเตอร์ ช่วยในการคำนวณ อย่างไรก็ตามส่วนมากปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นปัญหาที่ซับซ้อนมีตัวแปรมากกว่าสองค่าจึงจะขอกล่าวเพียงแต่วิธีการหาผลลัพธ์จากรูปแบบที่มีตัวแปรมากกว่าสองค่าขึ้นไป เพื่อที่จะนำเอาประโยชน์ของการใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรงไปประยุกต์เข้ากับปัญหาการออปติไมซ์จริงๆ โดยอาศัยหลักการหาผลลัพธ์ของตัวแปรในอสมการขอบข่ายซึ่งถ้ามีคำตอบเดียว(Unique Solution) เราก็สามารถนำมาแทนค่าหาผลลัพธ์จากสมการเป้าหมายได้ตามต้องการ

กรณีที่ปัญหาเป็นแบบมีตัวแปร มากกว่า 2 ตัว เรามีวิธีหาผลลัพธ์ของรูปแบบแทนระบบ

ปัญหาได้ 2 วิธี คือ

4.5 วิธีทางพีชคณิตทั่วๆไป (General Algebraic Method)

รูปแบบทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรงดังกล่าวมาแล้วจะเป็นดังนี้

$$\text{Max.}Z = C_j X_j \tag{4.3}$$

$$a_{1j} X_j \quad (\geq, =, \leq) \ b_1$$

$$a_{mj} X_j \quad (\geq, =, \leq) \ b_m$$

$$X_j \geq 0$$

เมื่อเขียนเป็นรูป matrix จะเป็น

$$\text{Max.}Z = CX \tag{4.4}$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

วิธีทางพีชคณิตนี้จะได้นำเอาส่วนที่แสดงขอบข่ายมาหาค่าของ X_1 โดยการคูณสมการที่ได้ว่า Inverse ของ A คือ A^{-1} จะได้ผลดังนี้

$$A^{-1} A X \leq A^{-1} b \tag{4.5}$$

$$I X \leq A^{-1} b$$

$$X \leq A^{-1} b$$

ค่าของ X_1 ซึ่งได้จากวิธีทางพีชคณิตตามหลักของ Matrix สามารถหามาได้จากสมการดังนี้

$$[A \;\vdots\; I \;\vdots\; b] \tag{4.6}$$

$$[A^{-1} A \;\vdots\; A^{-1} I \;\vdots\; A^{-1} b]$$

$$[I \;\vdots\; A^{-1} \;\vdots\; A^{-1} b]$$

I คือ Identity Matrix และ A^{-1} คือ Inverse Matrix ของ A เพื่อใช้วิธีการดังกล่าวมาแล้ว เราจะต้องหา Inverse Matrix โดยวิธี Gauss Jordan Elimination Method เปลี่ยน Matrix A ให้เป็น I จะทำให้เกิด A^{-1} B เป็นผลลัพธ์ในตัวและผลลัพธ์

ของปัญหาจะมีค่าเท่ากับ $[X_i] = [A^{-1} b]$

เนื่องจากวิธีทางพีชคณิตนี้เป็นการหาค่า X_i จากสมการแสดงขอบข่าย โดยที่ไม่ได้พิจารณาสมการเป้าหมายผลลัพธ์ที่ได้จะใช้เป็นค่าแทนสมการเป้าหมาย ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องจริงๆ ก็ต่อเมื่อค่าขอบข่ายเป็นลักษณะสมการแทนที่จะเป็นอสมการซึ่งจะมีผลลัพธ์เพียงอย่างเดียว ซึ่งวิธีนี้มีโอกาสที่จะให้ค่าผลลัพธ์ผิดไปจากที่ควรจะเป็น ดังนั้นวิธีการนี้จึงเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมทั้งนี้เพราะว่าผลลัพธ์ที่ได้ ได้มาโดยการไม่นำสมการเป้าหมายมาคิด อย่างไรก็ตามความเข้าใจวิธีการนี้จะช่วยให้เข้าใจวิธีการแบบ Simplex Method ได้ดียิ่งขึ้น

4.6 วิธี Simplex Method

จากวิธีทางพีชคณิตที่กล่าวมาแล้วเราไม่สามารถนำสมการเป้าหมายมาคิดด้วย ผลลัพธ์จึงถูกต้องตามขอบข่าย แต่ไม่ถูกต้องที่สุด นอกจากนี้ถ้าหากปัญหามีขนาดกว้างขึ้นคือมีตัวแปรมากขึ้นจะเป็นการยุ่งยากในการปรับค่าตัวแปรตัวแล้วตัวเล่า การแก้ปัญหาจึงไม่สะดวกและรวดเร็วตามต้องการการพัฒนาวิธีทาง Simplex Method เป็นวิธีทางพีชคณิตที่อาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์เข้าร่วมจัดรูปแบบปัญหาให้มีระบบยิ่งขึ้นช่วยให้สังเกตความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ง่ายและสามารถเข้าใจแนวทางที่ตัวแปรแต่ละตัวจะเปลี่ยนไปอย่างมีเหตุมีผล วิธีดังกล่าวจะเริ่มด้วยการเปลี่ยนแปรต่างๆให้สมการเป้าหมายมีแนวโน้มสู่เป้าหมายในทางที่ดีที่สุด การจัดรูปสมการเข้าเป็นตารางแล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ถูกต้องและทำให้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมาย ผลลัพธ์ใดๆ อันเกิดจากค่าตัวแปรที่ใช้ได้ (Satisfy) ในสมการหรืออสมการขอบข่ายย่อมถือเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ผลลัพธ์ใกล้เคียงเป้าหมายที่สุดถือเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดและผลลัพธ์ที่ดีที่สุดซึ่งเกิดผลตามเป้าหมายเดียวกันอาจมีได้หลาย ๆ อัน

ก่อนที่จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินงานตามวิธี Simplex Method เราต้องศึกษาส่วนที่เกี่ยวพันกับปัญหาในลักษณะดังต่อไปนี้เสียก่อน

1. ปัญหาที่จะให้สมการเป้าหมายสูงสุด (Maximization) มีความสัมพันธ์กับปัญหาที่จะให้สมการเป้าหมายต่ำสุด (Minimization) ดังนี้

$$\text{Max.}Z = C_j X_j \tag{4.7}$$

มีผลเท่ากับ $\text{Min.}W = -\text{Max.}Z = - C_j X_j$

2. การคูณเครื่องหมายลบเข้าไปในอสมการ จะมีผลทำให้เครื่องหมายอสมการเปลี่ยนจากค่ามากกว่าเป็นน้อยกว่า หรือในทางตรงข้าม เช่น

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \tag{4.8}$$

มีผลเท่ากับ $-a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$

3. สมการใดๆ อาจแทนได้ด้วยอสมการในทิศทางตรงกันข้ามสองอันพร้อมกัน เช่น

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 = b \tag{4.9}$$

มีผลเท่ากับ $a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$ และ $a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b$

หรือ $a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$ และ $-a_1 x_1 - a_2 X_2 \leq -b$

4. ถ้าทางซ้ายมือของอสมการเป็นค่าสัมบูรณ์(Absolute Value) จะสามารถเปลี่ยนเป็นอสมการสองอัน เช่น

$$|a_1 X_1 + a_2 X_2| \leq b \tag{4.10}$$

มีผลเท่ากับ $a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq -b$ และ $-a_1 X_1 - a_2 x_2 \leq -b$

ในการดำเนินการตามขั้นตอน จะเปลี่ยนระบบสมการของขอบข่ายให้เป็นสมการของขอบข่ายโดยการเพิ่มตัวแปรสมมติขึ้น ซึ่งจะเป็นรูปแบบสมการขยาย (Augmented Form) ทำได้ดังนี้

$$\text{Max.}Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 +,\ldots,+C_n X_n \tag{4.11}$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 +,\ldots,+a_{1n} X_n \leq b_1 \tag{4.11.1}$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 +,\ldots,+a_{2n} x_n \geq b_2 \tag{4.11.2}$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 +,\ldots,+a_{mn} X_n = b_2 \tag{4.11.3}$$

รูปแบบสมการขยายจะเป็น

$$\text{Max.}Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 +,\ldots,+C_n X_n$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_1 +,\ldots,+a_{1n} X_n + X_{n+1} = b_1 \tag{4.11.1}$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 +,\ldots,+a_{2n} X_n - X_{n+2} + X_{n+3} = b_2 \tag{4.11.2}$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 +,\ldots,+a_{mn} x_n + X_{n+k} = b_m \tag{4.11.3}$$

ตัวแปรที่เพิ่มขึ้นมาในรูปแบบสมการขยายพอแยกได้ดังนี้

1. ในกรณีที่อสมการขอบข่ายเป็นอยู่ในรูปน้อยกว่าหรือเท่ากับ (≤) เราเพิ่มค่าตัวแปร ซึ่งคิดเป็นค่าของส่วนของตัวแปรที่เหลือลงไปทางซ้ายมือของอสมการ แล้วเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เป็นสมการของขอบข่ายนั้นๆเช่นค่า X_{n+1} จากอสมการ(4.11.1) ตัวแปรที่เพิ่มขึ้นนี้เรียกว่า Slack Variable

2. ในกรณีที่สมการขอบข่ายเป็นอยู่ในรูปมากกว่า หรือเท่ากับ (≥) เราลดค่าตัวแปร ซึ่งคิดเป็นค่าของตัวแปรส่วนเกินจากทางซ้ายมือของอสมการ และเปลี่ยนอสมการเป็นสมการของขอบข่ายนั้นๆเช่นค่า $-X_{n+2}$ จากอสมการ(4.11.2) เป็นส่วนแสดงว่าค่าทางซ้ายมือมากกว่าค่าทางขวามืออยู่ X_{n+2} ซึ่ง X_{n+2} เป็น Slack Variable ที่มีเครื่องหมายลบว่า Surplus Variable จากหลักการทางเมทริกซ์นั้นตัวแปรที่ให้ผลลัพธ์แต่ละครั้งเมื่อคำนวณหาจะมีสัมประสิทธิ์เท่ากับบวกหนึ่ง (+1) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ตัวแปรที่เป็น Basic Variable มีลักษณะเป็น Identity Matrix และตามข้อกำหนดของวิธี Simplex Method ได้กำหนดว่าผลลัพธ์เบื้องต้นที่เป็นไปได้(Initial Feasible Solution)จะมีค่าตัวแปรที่เป็น Basic Variable มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้นสำหรับวิธีSimplex Method จึงได้กำหนดให้ Slack Variable เท่านั้นที่เป็น Basic Variable ในผลลัพธ์อันดับแรกของปัญหา แต่เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ Surplus Variable เป็นลบหนึ่ง (-1) ด้วยเหตุนี้จึงต้องเพิ่มตัวแปรอีกตัวหนึ่งขึ้น คือ X_{n+3} เพื่อให้หาผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหาได้ แต่ค่า X_{n+3} นั้นตั้งขึ้นมาเพียงเพื่อช่วยให้หาผลลัพธ์เบื้องต้นได้เท่านั้น ในการหาผลลัพธ์ขั้นต่อไปจึงจำเป็นต้องกำจัดตัวแปร X_{n+3} นี้ออกไปโดยการปรับค่า X_{n+3} จนกว่าาจะมีค่าเป็นศูนย์ไปในที่สุด ถ้ากำจัดไม่หมดก็แสดงว่าปัญหานี้ผลลัพธ์คำตอบไม่ได้ ค่า X_{n+3} นี้เราเรียกว่า Artificial Variable

3. ในกรณีที่เป็นสมการขอบข่ายอยู่แล้ว (=) เราเพียงแต่เพิ่มค่าตัวแปรช่วยเช่นX_{m+k} ในอสมการ (4.11.3)เป็น Artificial Variable ดังกล่าวมาแล้วในท้ายกรณีที่ 2 โดยสรุปจะเขียนตัวแปรเพิ่มขึ้นมาดังนี้

≤	+S
≥	-S+R
=	+R

S=Slack variable (4.12)

R=Artificial Variable

4.6.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธี Simplex Method

ดังได้กล่าวมาแล้วปัญหาของการทำออปติไมซ์ มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปของสมการอยู่ 3 ลักษณะ คือ

1. รูปของสมการที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ (≤) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการขอบข่ายได้โดยการเพิ่มค่าตัวแปรที่เรียกว่า Slack Variable

2. รูปของอสมการซึ่งอยู่ในลักษณะของสมการอยู่แล้ว (=)

3. รูปของอสมการที่อยู่ในลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ (≥)

ซึ่งในลักษณะรูปอสมการที่ 2 และ3 นี้จำเป็นจะต้องเพิ่มตัวที่มีความหมายในเชิงตัวเลขที่เรียกว่า Artificial Variable เข้าไปประกอบเป็นส่วนของ Identity Matrix ซึ่งการหาผลลัพธ์ของรูปอสมการที่ 2 และ3 นี้ย่อมแตกต่างจากการหาค่าผลลัพธ์ของรูปอสมการที่ 1 ซึ่งมีวิธีการหาผลลัพธ์แบบ Simplex ธรรมดา ซึ่งมีขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ไม่ยุ่งยาก ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแก้ปัญหา Simplex Method แบบธรรมดาก่อน แล้วจึงค่อยกล่าวถึงวิธีการในการหาผลลัพธ์ในปัญหาที่มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปอสมการที่ 2 และ 3 ต่อไป

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธี Simplex Method มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1

จากรูปแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง จัดรูปแบบสมการขยายเข้าสู่ตารางดังต่อไปนี้

$$\text{Max.}Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \tag{4.13}$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \le b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \le b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \le b_3$$

สมการขยายจะเป็น

$$Z - C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3 = 0 \tag{4.14}$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + X_4 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + X_5 = b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + X_6 = b_3$$

ตารางเพื่อหาผลลัพธ์เบื้องต้น(Initial Basic Feasible Solution)จะเป็นดังนี้

(1)	(2)	(3)			(4)			(5)
	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0	0 (6)
X_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
X_5	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2 (7)
X_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3

(4.15)

โดยกำหนดให้

(1): ตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable)

(2): ค่าเป้าหมาย (Objective Value)

(3): ตัวแปรเปลี่ยน (Decision Variable)

(4): ตัวแปรเพิ่ม (Slack or Artificial Variable)

(5): ผลลัพธ์ (Solution)

(6): สมการเป้าหมาย

(7): สมการขอบข่าย

ภายในตารางจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรโดยมีหลักเกณฑ์ของ Simplex Method กำหนดไว้ว่าตัวแปรเพิ่มนั้นต้องเป็น Identity Matrix สำหรับผลลัพธ์เบื้องต้น

ขั้นตอนที่ 2

พิจารณาจากค่าต่างๆ บนตารางในขั้นตอนที่ 1 ซึ่งถือว่าเป็นผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

1. เริ่มค่าตัวแปรเปลี่ยน(Decision Variable)หรือ Nonbasic Variable เป็นศูนย์หมดคือ X_1 ,X_2 ,X_3 =0 อันนี้เป็นจุดเริ่มต้นที่มั่นใจได้ว่าตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. ค่าของสมการเป้าหมายซึ่งได้จาก $Z-C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3 = 0$ จะมีค่า $Z=0$ ด้วย

3. ค่าตัวแปรเพิ่มต่าง ๆ อ่านจากผลลัพธ์ค่าตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable) ได้ดังนี้

$$X_4 = b_1 \quad (4.16)$$

$$X_5 = b_2$$

$$X_6 = b_3$$

ขั้นตอนที่ 3

พิจารณาทดสอบผลลัพธ์ว่าที่สุดแล้วหรือยัง การทดสอบผลลัพธ์นี้เรียกว่า การทดสอบหลักเกณฑ์ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimality Criterion) จะเห็นได้ว่าในบางครั้งแม้แต่ผลลัพธ์เบื้องต้นก็อาจเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดอยู่แล้ว แต่โดยมากเรามักจะหาผลลัพธ์ที่ดีกว่าได้โดยใช้หลักเกณฑ์ทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

เราจะรู้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จะดีที่สุดแล้วหรือยัง โดยการวิเคราะห์สมการเป้าหมาย $Z - C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3 = 0$ โดยการเริ่มแรกด้วย $X_1, X_2, X_3 = 0$ มีผลทำให้ $Z=0$ จะเห็นได้ว่าถ้าเราเพิ่มค่าของตัวแปร X_1, X_2 หรือ X_3 ตัวหนึ่งตัวใดจะมีผลทำให้ค่า Z สูงขึ้นเช่น $Z - C_1 X_1 - C_2 X_2 = C_3 X_3$ นั่นคือถ้าเพิ่มค่า X_3 เพียงค่าเดียวจะมีผลทำให้ $Z = C_3 X_3$ คือมีค่าสูงขึ้นเท่ากับ $C_3 X_3$ จากข้อสังเกตุนี้เองจะเห็นได้ว่า ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ในตารางที่เป็นสมการเป้าหมายยังมีค่าเป็นลบอยู่ในตารางการเพิ่มค่าตัวแปรของสัมประสิทธิ์นั้นๆ จะมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่งถ้าค่า C_1, C_2 และ C_3 ดังกล่าวยังติดเครื่องหมายลบอยู่การดำเนินการเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีขึ้นยังต้องทำกันต่อไป

หมายเหตุ กรณีดังกล่าวข้างต้นใช้กับปัญหาเพื่อให้ได้ผลลัพธ์สูงสุด ถ้าจะให้ได้ผลลัพธ์ต่ำสุดก็ใช้เครื่องหมายในทางตรงข้ามกับข้างต้นเป็นหลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งจะเป็นวิธีที่ใช้แก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 4

(1) พิจารณาหาตัวแปรที่จะเพิ่มค่าซึ่งมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น การเพิ่มค่าตัวแปร พิจารณาจากค่าตัวแปรที่ให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มได้มากที่สุด สังเกตุได้จากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยนมีค่าลบสูงสุด ซึ่งเมื่อย้ายข้างมาด้านขวาของสมการเป้าหมายในตารางจะเป็นสัมประสิทธิ์บวกสูงสุดถือเป็นตัวที่จะเพิ่มค่า จากตาราง ถ้าC_2 มีค่าลบสูงสุด X_2 จะเป็นตัวที่เราเพิ่มค่าให้ก่อน ส่วนจะเพิ่มค่าเป็นเท่าไรจะได้ติดตามกันต่อไป

(2) พิจารณาตัวแปรเพื่อลดค่าจากตัวแปรเพิ่ม(Slack or Artificial Variable)

ซึ่งมีค่า $X_4 = b_1$, $X_5 = b_2$, $X_6 = b_3$

การจะลดค่าตัวไหนก่อน จะใช้หลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Feasibility Criterion) เข้ามาช่วย

การพิจารณาหาตัวลดค่าเพื่อเพิ่มค่า X_2 นั้นจะต้องลดค่าตัวแปรเพิ่มให้มากที่สุดภายใต้เงื่อนไขขอบข่ายที่ว่า ค่าตัวแปรเพิ่มที่ลดนั้นต้องไม่เป็นค่าลบ จากสมการขอบข่ายในตารางจะเห็นได้ว่าจะลดค่า X_4 ,X_5 หรือ X_6 ได้ทั้งนั้น ส่วนจะให้ลดตัวไหนนั้นต้องเลือกใช้ส่วนที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบข่ายทั้งสามอันได้หมดโดยการพิจารณาจากผลหารที่เกิดจากผลลัพธ์ค่าตัวแปรในตารางและแถวตั้งของค่าตัวแปรเปลี่ยนที่จะเพิ่มค่า X_2 จะได้ผลหารตามแนวนอนตัวต่อตัวดังนี้ b_1/a_{12} , b_2/a_{22} , b_3/a_{32} เลือกค่าผลหารน้อยที่สุดแสดงเป็นตัวลดค่าของตัวแปรเพิ่มตามแนวนอนคือ X_4 , X_5 หรือ X_6 เช่น ถ้า b_2/a_{32} น้อยที่สุด ตัวแปรที่จะลดค่าคือ X_5 สาเหตุที่เราถือค่าผลหารน้อยที่สุดเป็นแนวช่วยตัดสินตัวแปรลดค่า ก็เพราะว่าค่าตัวแปรที่เพิ่มค่านั้นต้องอยู่ในขอบข่ายทุกๆ สมการขอบข่าย ถ้าเราถือเอาผลหารมากมาเป็นเกณฑ์ จะทำให้ขาดคุณสมบัติในอสมการขอบข่ายที่มีตัวผลหารน้อยกว่า และทำให้ผิดหลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

ตัวแปรเข้า (4.16)

		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
	Z	1	C_1	C_2	C_3	0	0	0	0
	X_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
ตัวแปร	$\boxed{X_5}$	0	a_{21}	$\boxed{a_{22}}$	a_{23}	0	1	0	b_2
ออก	X_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3

เราเรียกตัวที่เพิ่มค่าของตัวแปรในตารางว่า ตัวแปรเข้า(X_2)และตัวแปรที่ลดค่าว่าตัวแปรออก (X_5) พิจารณาจากแนวนอนของตัวแปรออกจะได้สมการ

$$a_{22} X_2 + X_5 = b_2 \quad \text{โดย } X_1 , X_3 = 0 \tag{4.17}$$

เมื่อลดค่า $X_5 = 0$ จะได้ $X_2 = b_2 / a_{22}$

เราแทนค่า X_2 เป็นตัวแปรเข้ามีค่า b_2 / a_{22} ในตารางโดยวิธีหารแนวนอนของตัวแปรลดค่าหรือตัวแปรออกด้วย a_{22} สัมประสิทธิ์ในช่องที่เกิดจากการตัดกันของแถวยืนของตัวแปรเข้าและแถวนอนของตัวแปรออกจะมีค่าเป็น 1 และเราเรียกจุดนี้ว่า จุดหมุน(Pivot Point)

ขั้นตอนที่ 5 จากจุดหมุน

เราใช้วิธีทางพีชคณิตดังกล่าวมาแล้วทำสัมประสิทธิ์อื่นๆ ในแถวยืนให้เป็นศูนย์ ผลที่ได้จะทำให้ค่า Z มีผลลัพธ์สูงขึ้นดังนี้

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
Z	1	$-C_1$	0	$-C_3$	0	C_5	0	$C_2\ b_2$
X_4	0	a_{11}	0	a_{13}	1	a_{15}	0	b_1
$\boxed{X_2}$	0	a_{21}	$\boxed{1}$	a_{23}	0	a_{25}	0	b_2
X_6	0	a_{31}	0	a_{33}	0	a_{35}	1	b_3

(4.18)

เมื่อได้ตารางแสดงผลการดำเนินการตามขั้นตอนที่ 5 แล้วให้กลับไปเริ่มในขั้นตอนที่ 3 ต่อไปจนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimal Solution) การดำเนินตามขั้นตอนที่กล่าวมาแล้วเราใช้ในกรณีที่จะเพิ่มค่าสมการเป้าหมายให้สูงขึ้นแต่ถ้าเกิดมีปัญหาให้หาค่าต่ำสุด การดำเนินงานอาจทำได้อย่างเดียวกันเพียงแต่พิจารณาในมุมกลับกันคือพยายามหาตัวแปรเปลี่ยนที่ทำให้ค่าสมการเป้าหมายลดลงเร็วที่สุด การพิจารณาว่าต่ำสุด แล้วหรือยังก็อาศัยสัมประสิทธิ์ในตารางว่ามีค่าเป็นลบหมดแล้วหรือยัง ถ้ายังคงมีค่าบวกอยู่เราก็ดำเนินการจนกว่าจะได้ค่าต่ำสุด หรือในอีกทางหนึ่งเราอาจทำได้ด้วยหลักที่ว่า

$$-\text{Max.}(-Z) = \text{Min.}Z \qquad (4.19)$$

แล้วดำเนินการ Max. สมการของ -Z ดังนี้

$$\text{Max.}(-Z) = -\ C_J\ X_J$$

จากวิธีการทาง Simplex Method ที่กล่าวมาแล้วเป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปของอสมการซึ่งมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ (≤) เท่านั้น แต่ถ้ามีกรณีที่อสมการอยู่ในลักษณะเท่ากับ(=) หรือลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ(≥) ถ้าเราใช้วิธีการ Simplex แบบธรรมดาเหมือนอย่างที่กล่าวมาแล้วจะไม่สามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการที่พัฒนามาใช้หาในปัจจุบัน วิธีการที่นิยมใช้กันแพร่หลายในการหาผลลัพธ์คือวิธีของ Big-M Method

4.6.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธี Big-M Method

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ในกรณีของสมการขอบข่ายที่อยู่ในลักษณะเท่ากับ (=) หรือลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ (≥) จะต้องเพิ่มค่าตัวแปรที่เรียกว่า Artificial Variable ซึ่งโดยความหมายแล้วจะเป็นตัวแปรที่ไม่มีความหมายทางตัวเลข ดังนั้นค่าของตัวแปรชนิดนี้จะเป็นอื่นไปไม่ได้นอกจากศูนย์ ค่า M คือค่าสมมุติที่มีค่าสูงมากใช้ประกอบเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรชนิด Artificial Variable และบรรจุในสมการเป้าหมายจากสมการดังต่อไปนี้ M จะเป็นสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายที่ขยายรูปแบบแล้ว

สมการเป้าหมาย: $\text{Max.}Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$ (4.20)

ขอบข่าย:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \le b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \ge b_2$$
$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

รูปแบบสมการขยาย:

$$Z- C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + MR_1 + MR_2 = 0$$
$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + S_2 = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 - S_1 + R_1 = b_2$$
$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + R_2 = b_3$$

ในสมการเป้าหมาย เมื่อใส่ตารางตามหลักการหาผลลัพธ์แบบ Simplex Method เราจะพยายามเพิ่มค่าตัวแปรซึ่งมีผลทำให้ค่า Z เพิ่มเร็วที่สุดโดยพิจารณาค่าที่เป็นลบของสัมประสิทธิ์สูงสุด ดังนั้นในสมการเป้าหมายตามตัวอย่างนี้ค่าสัมประสิทธิ์ของ R_1 และ R_2 เป็นค่าบวก M ซึ่งสมมุติว่ามีค่าสูงมากๆ จึงเป็นตัวกำหนดไม่ให้เพิ่มค่าของ R_1 และ R_2 ซึ่งจะต้องเป็นศูนย์เท่านั้น ดังนั้นการใส่สัมประสิทธ์ M ได้แก่ Artificial Variable ในสมการเป้าหมายจึงเป็นหลักเกณฑ์สำคัญมาก ตัวอย่างข้างเป็นการหาผลลัพธ์มีเป้าหมายสูงสุด เครื่องหมายของ M ในสมการเป้าหมายของรูปแบบสมการขยายจะเป็นบวก (+) ถ้าเป้าหมายต้องการผลลัพธ์ต่ำสุดเครื่องหมายของ M ในรูปแบบสมการขยายดังกล่าวจะเป็นค่าลบ (-) การจัดเข้ารูปแบบเพื่อใช้วิธี Simplex Method

เพื่อที่จะหาผลลัพธ์ได้ในวิธี Simplex Method เราจำเป็นที่จะต้องปรับรูปปัญหาที่มีตัวแบบ Artificial Variable ให้มาอยู่ในรูปแบบของวิธี Simplex Method แบบธรรมดา

ที่ได้กล่าวไปแล้ว คือการปรับรูปแบบปัญหาให้ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น คือเป็นตาราง Initial Solution ซึ่งเราจะได้ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยการขจัดสัมประสิทธิ์ซึ่งเราสามารถขจัดสัมประสิทธิ์ได้สองวิธีดังนี้

ก. โดยวิธีแทนค่าธรรมดา จากรูปแบบสมการขยายหาค่าตัวแปร Artificial ในสมการขอบข่ายแล้วคูณด้วยสัมประสิทธิ์ M นำไปแทนค่าในสมการเป้าหมาย เปลี่ยนสมการเป้าหมายเป็นผลลัพธ์เบื้องต้น

จากสมการข้างต้น $R_1 = b_2 - a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - a_{23} X_3 + S_1$ (4.21)

$$R_2 = b_3 - a_{31} X_1 - a_{32} X_2 - a_{33} X_3$$

$$M(R_1 + R_2) = M(b_2 + b_3) - M(a_{21} + a_{31})X_1 - M(a_{22} + a_{32})X_2 - M(a_{23} + a_{33})X_3 + MS_1$$

แทนในสมการเป้าหมายจะเป็น

$$Z - \{C_1 + M(a_{21} + a_{31})\}X_1 - \{C_2 + M(a_{22} + a_{32})\}X_2 - \{C_3 + M(a_{23} + a_{33})\} + MS_1 = -M(b_2 + b_3)$$

ข. โดยวิธี ROW-OPERATOR วิธีนี้เหมือนกับวิธีทางพีชคณิตในขั้นตอนที่ทำให้สัมประสิทธิ์ในแถวยืนเป็นศูนย์ คือทำสัมประสิทธิ์ที่มีค่า M ใน Artificial Variable ให้เป็นศูนย์นั่นเองผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนวิธีแทนค่าธรรมดา

เมื่อได้ตารางของผลลัพธ์เบื้องต้นแล้ว การดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมายตามวิธีของ Simplex Method จะดำเนินไปเหมือนขั้นตอนที่กล่าวมาแล้ว

การแก้ปัญหาโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้ ปัญหาโดยมากจะมีลักษณะซับซ้อนมากและมีตัวแปรเกี่ยวข้องจำนวนมาก จะหาผลลัพธ์ตามวิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวมาจะต้องใช้เวลามากในการหาตัวเพิ่มและตัวลด ในแต่ละขั้นตอน ในปัจจุบันปัญหาที่ซับซ้อนของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยหาผลลัพธ์ ซึ่งจะประหยัดเวลา ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการรวดเร็วขึ้นและใช้นำไปตัดสินใจใช้งานได้ทันใจ การเปลี่ยนแปลงต่างๆ ในระบบของปัญหาจะมีผลอย่างไรกับผลลัพธ์ เราก็สามารถกำหนดได้ทันที