บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

การศึกษาความถดถอยเชิงเส้นแบบง่ายในการวิจัยครั้งนี้ สิ่งที่สนใจศึกษาก็คือ วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อลักษณะค่าคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันและความแปรปรวนไม่คงที่ โดยมีรายละเอียดต่าง ๆ เป็นดังนี้

2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์

ในกรณีที่ผู้วิจัยต้องการตัวสถิติสำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น โดยอาศัยวิธีกำลังสองต่ำสุด และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป ซึ่งรายละเอียดของแต่ละวิธีเป็นดังนี้

2.1.1 วิธีกำลังสองต่ำสุด (Ordinary Least Square)

วิธีการหาตัวประมาณพารามิเตอร์วิธีนี้ เป็นวิธีที่มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้น (Theory of Linear Estimation) โดยมีหลักเกณฑ์ดังนี้คือ ให้หาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของผลต่างของค่าสังเกตได้จากค่าคาดหวังของตัวแปรที่มีค่าต่ำสุด ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย เพื่อช่วยให้การวิเคราะห์มีแบบแผนและง่ายขึ้น

รูปแบบความถดถอยเชิงเส้นแบบง่าย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,n$$

ข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย มีดังนี้คือ

1. ค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) เป็นตัวแปรสุ่ม
2. $E(\varepsilon_t) = 0$ (Zero mean)
3. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = \sigma^2$ เมื่อ $s = t$ (Homoscedasticity)
4. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0$ เมื่อ $s \neq t$ (Nonautocorrelation)
5. ตัวแปรอิสระ X เป็นค่าคงที่ (Nonstochastic)

จากหลักเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้น จะทำการหาตัวประมาณกำลังสองต่ำสุด โดยพิจารณาจากสมการถดถอย $Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ เพื่อให้เป็นรูปแบบทั่วไป จึงเขียนสมการถดถอยอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{- - - - - - - - - - (1)}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{Y}$ คือเวคเตอร์ขนาด nx1 ของตัวแปรตาม Y

$\underset{\sim}{\beta}$ คือเวคเตอร์ขนาด kx1 ของพารามิเตอร์ ในที่นี้ k=2

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือเวคเตอร์ขนาด nx1 ของค่าคลาดเคลื่อน (Error term)

X คือเมตริกซ์ขนาด nxk ของสัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ β

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นเวคเตอร์ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งเมื่อแทนที่ $\hat{\beta}$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$\underset{\sim}{Y} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{\sim}{e}$$

$$\text{เมื่อ} \quad \underset{\sim}{e} = \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

พิจารณาผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อน (Sum Square of Residual):SSE

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

$$= \quad \underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e}$$

$$= \quad (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'(\underset{\sim}{Y} \quad X\hat{\underset{\sim}{\beta}})$$

$$= \quad (\underset{\sim}{Y}' - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X')(Y - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})$$

$$= \quad \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$= \quad \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

การหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อน ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อนเทียบกับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\underset{\sim}{\beta}}}\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} = \frac{\partial}{\partial\hat{\underset{\sim}{\beta}}}(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = 0$$

และเมื่อทำการหาอนุพันธ์ จะได้สมการปกติ คือ

$$(X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y$ คือ ค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$

2.1.2 <u>วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป</u> (Generalized Least Square)

ในสถานการณ์ทางปฏิบัติอาจพบว่า $E(\varepsilon_s\varepsilon_t) \neq 0$ ในทุกค่าของ $s \neq t$ และ $E(\varepsilon_s\varepsilon_t) \neq \sigma^2$ ในทุกค่าของ $s=t$ นั่นคือ ค่าคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันและความแปรปรวนไม่คงที่ตามลำดับ ซึ่งเป็นลักษณะที่ไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย ในสถานการณ์เช่นนี้ $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}')$ จะมิใช่ $\sigma^2 I_n$ แต่กลับพบว่า $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$ โดยที่

Ω เป็น Symmetric Positive Definite Matrix* ขนาด nxn โดยอาศัยเทคนิคการแปลงข้อมูล (Transformation Technique) เพื่อหาตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปได้ดังนี้

เนื่องจาก $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2 \Omega$ โดยที่ Ω เป็น Symmetric Positive Definite Matrix จึงสามารถหาเมตริกซ์ T ที่ทำให้ $T'T = \Omega^{-1}$ ได้ทำให้สามารถแปลงรูปสมการ $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ ที่ $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$ ได้ดังนี้

จากสมการ $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$

คูณด้านหน้าตลอดด้วย T จะได้

$$T\underset{\sim}{Y} = TX\underset{\sim}{\beta} + T\underset{\sim}{\varepsilon}$$

หรือ $$\underset{\sim}{Y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^* \qquad \text{------------------(2)}$$

โดยที่ $Y^* = T\underset{\sim}{Y}$, $X^* = TX$ และ $\underset{\sim}{\varepsilon}^* = T\underset{\sim}{\varepsilon}$

จากสมการ (2) จะพบว่า

$$\begin{aligned} E(\underset{\sim}{\varepsilon}^*\underset{\sim}{\varepsilon}^{*\prime}) &= E(T\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}'T') \\ &= T\,E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}')\,T' \\ &= \sigma^2\, T\,\Omega T' \\ &= \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

---

*Positive Definite Matrix คือ เมตริกซ์ที่ให้ค่า Characteristic Value เป็นบวกทุกค่า โดยปกติใน GLS ถือว่า σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ขณะที่ Ω เป็นเมตริกซ์ที่ต้องทราบค่าของสมาชิกทุกตัว แต่ในทางปฏิบัติมักไม่ทราบค่าสมาชิกของ Ω ซึ่งจะทราบได้ก็โดยการประมาณค่าสมาชิกของ Ω ด้วยวิธีที่เหมาะสม การประมวลผลโดยใช้ค่าประมาณ $\hat{\Omega}$ เรียกว่า Estimated Generalized Least Square :EGLS

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ $\underset{\sim}{Y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^*$ มีคุณสมบัติสอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่ว่า $E(\varepsilon_s^*\varepsilon_t^*) = 0$; $s \neq t$ และ $E(\varepsilon_s^*\varepsilon_t^*) = \sigma^2$; $s = t$ จึงสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้ โดยวิธี OLS ดังที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นดังนี้

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็น OLS-estimator ของ $\underset{\sim}{\beta}$ และเมื่อแทนที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$\underset{\sim}{Y}^* = X^*\hat{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{\sim}{e} \quad \text{และ} \quad \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y}^* - X^*\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

โดยอาศัยเทคนิคการหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อน จะพบว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* = (X^{*\prime}X^*)^{-1}(X^{*\prime}Y^*)$$

$$= \left[(TX)'(TX)\right]^{-1}(TX)'(TY)$$

$$= (X'T'TX)^{-1}(X'T')(TY)$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'T'TY)$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\underset{\sim}{Y})$ คือค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$

2.2 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

เมื่อข้อมูลมีลักษณะไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย นั่นคือ ค่าคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันและความแปรปรวนไม่คงที่ เป็นการขัดแย้งต่อข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่ว่า $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0$ ในทุกค่าของ $s \neq t$ และ $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = \sigma^2$ ในทุกค่าของ $s = t$ ตามลำดับในการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ จะอาศัยวิธีกำลังสองต่ำสุด(OLS) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป (GLS) โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.2.1 วิธีกำลังสองต่ำสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองต่ำสุดในกรณีนี้เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มิได้คำนึงถึงข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย แสดงว่า ค่าคลาดเคลื่อนมีลักษณะเป็นทั้งสหสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนไม่คงที่ ซึ่งสามารถหาตัวประมาณ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้จาก

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underset{\sim}{Y})$$

2.2.2 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปในกรณีนี้ เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่คำนึงถึงข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.2.2.1 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป ในการแก้ปัญหาเฉพาะลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีความแปรปรวนไม่คงที่

เป็นวิธีการที่คำนึงเฉพาะข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนคงที่ โดยสามารถแยกจำแนกตามความผันแปรของความแปรปรวนได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรอิสระ

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 X_t^2 \qquad t = 1,2,\ldots,n$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}' = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\underset{\sim}{Y})$$

เมื่อ

$$\Omega = \begin{bmatrix} X_1^2 & & & \phi \\ & X_2^2 & & \\ \phi & & \ddots & \\ & & & X_n^2 \end{bmatrix}$$

กรณีที่ 2 ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรตาม

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \left[E(Y_t)\right]^2$ เมื่อ $t = 1,2,\ldots, n$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}'' = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}^{-1}\underset{\sim}{Y})$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^2 & & & \phi \\ & \hat{Y}_2^2 & & \\ \phi & & \ddots & \\ & & & \hat{Y}_n^2 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\hat{Y}_t$ เป็นค่าประมาณของ Y_t ที่ได้จากข้อมูลจริง โดยอาศัยวิธีกำลังสองต่ำสุด

<u>กรณีที่ 3</u> ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อน ผันแปรค่าแบบสุ่ม

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 Z_t$ เมื่อ $t = 1,2,\ldots, n$

โดย Z_t มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution) จะได้ว่าค่าประมาณของพารามิเตอร์ β มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : จากข้อมูล (Y_t, X_t) ให้จัดเรียงลำดับข้อมูลเสียใหม่โดยเรียงลำดับจากน้อยไปหามากตามค่า X_t

ขั้นตอนที่ 2 : แบ่งข้อมูลจากขั้นตอนที่ 1 ออกเป็น 3 ส่วนให้มีขนาด n_1, n_2 และ n_3 โดยที่แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน นั่นคือ $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$

$n_3 = n - n_1 - n_2$

ขั้นตอนที่ 3 : ประมาณค่าความแปรปรวน (S_i^2) จากสูตร

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-2} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{\beta}_{oi} - \hat{\beta}_{1i}X_{ij})^2$$

เมื่อ

S_i^2 คือ ค่าความแปรปรวนของข้อมูลกลุ่มที่ i , i = 1,2,3

n_i คือ จำนวนข้อมูลในกลุ่มที่ i

Y_{ij} คือ ค่าสังเกตของ Y ในกลุ่มที่ i ลำดับที่ j

X_{ij} คือ ค่าสังเกตของ X ในกลุ่มที่ i ลำดับที่ j

$\hat{\beta}_{oi}$, $\hat{\beta}_{1i}$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความถดถอยของค่าสังเกตกลุ่มที่ i โดยวิธี OLS

ขั้นตอนที่ 4 : ประมาณค่าพารามิเตอร์ β จากสูตร

$$\hat{\beta}''' = (X'\hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} (X'\hat{\Omega}^{-1} \underset{\sim}{Y})$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} S_1^2 I_{n_1} & & \phi \\ & S_2^2 I_{n_2} & \\ \phi & & S_3^2 I_{n_3} \end{bmatrix}$$

โดย I_{n_i} เป็น Identity matrix ขนาด n_i

2.2.2.2 <u>วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปในการแก้ปัญหาเฉพาะลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีสหสัมพันธ์กัน</u>

เป็นวิธีการที่คำนึงเฉพาะข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน นั่นคือ ลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่นำมาพิจารณาก็คือ

$$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , \quad s \neq t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$$

เมื่อ $|\rho| < 1$

$$V_t \sim N(0, \sigma^2 V)$$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ β คือ

$$\hat{\beta}^{*} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}^{-1}Y)$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^{2} & \cdots & \hat{\rho}^{n-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho}^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ \hat{\rho}^{n-1} & \hat{\rho}^{n-2} & \hat{\rho}^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{2}}$$

$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ซึ่ง $\hat{Y}_t$ เป็นค่าประมาณของ Y_t ที่ได้จากข้อมูลจริง โดยอาศัยวิธี OLS

2.2.2.3 <u>วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปในการแก้ปัญหา ทั้งลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีสหสัมพันธ์กันและความแปรปรวนไม่คงที่</u>

ในกรณีนี้ผู้วิจัยขอเสนอวิธีการที่คำนึงถึงข้อตกลง เบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนคงที่ โดยสามารถแยกจำแนกตามความผันแปรของความแปรปรวนได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรอิสระ

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 X_t^2 \quad , \; t = 1,2,\ldots, n$

และ $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , \; s \neq t$

โดยที่ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $|\rho| < 1 \quad , \; V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$

พิจารณา $E(\varepsilon_s \varepsilon_t)$

$$E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = E\left[\varepsilon_1 (\rho\varepsilon_1 + V_2)\right]$$

$$= E\left[\rho\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 V_2\right]$$

$$= \rho\sigma^2 X_1^2$$

$$E(\varepsilon_1 \varepsilon_3) = E\left[\varepsilon_1 (\rho\varepsilon_2 + V_3)\right]$$

$$= E\left[\rho\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 V_3\right]$$

$$= \rho E(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

$$= \rho^2 \sigma^2 X_1^2$$

$$\vdots$$

$$E(\varepsilon_1 \varepsilon_t) = \rho^{t-1} \sigma^2 X_1^2$$

$$E(\varepsilon_2\varepsilon_3) = E\left[\varepsilon_2(\rho\varepsilon_2 + V_3)\right]$$

$$= E\left[\rho\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 V_3\right]$$

$$= \rho\sigma^2 X_2^2$$

$$E(\varepsilon_2\varepsilon_4) = E\left[\varepsilon_2(\rho\varepsilon_3 + V_4)\right]$$

$$= E\left[\rho\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2 V_4\right]$$

$$= \rho\, E(\varepsilon_2\varepsilon_3)$$

$$= \rho^2\,\sigma^2 X_2^2$$

$$\vdots$$

$$E(\varepsilon_s\,\varepsilon_t) = \rho^{t-s}\,\sigma^2\,X_s^2 \quad \text{เมื่อ } s < t$$

ดังนั้น $$E(\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} X_1^2 & \rho X_1^2 & \rho^2 X_1^2 & \cdots & \rho^{n-1} X_1^2 \\ \rho X_1^2 & X_2^2 & \rho X_2^2 & \cdots & \rho^{n-2} X_2^2 \\ \vdots & & & & \\ \rho^{n-1} X_1^2 & \rho^{n-2} X_2^2 & \rho^{n-3} X_3^2 & \cdots & X_n^2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}' \quad = \quad (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}\ (X'\hat{\Omega}^{-1}\underset{\sim}{Y})$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} \quad = \quad \begin{bmatrix} X_1^2 & \hat{\rho}\,X_1^2 & \hat{\rho}^2X_1^2 & \cdots & \hat{\rho}^{n-1}X_1^2 \\ \hat{\rho}X_1^2 & X_2^2 & \hat{\rho}\,X_2^2 & \cdots & \hat{\rho}^{n-2}X_2^2 \\ \hat{\rho}^{n-1}\,X_1^2 & \hat{\rho}^{n-2}\,X_2^2 & \hat{\rho}^{n-3}\,X_3^2 & \cdots & X_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} \quad = \quad \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum\limits_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ซึ่ง $\hat{Y}_t$ เป็นค่าประมาณของ Y_t ที่ได้จากข้อมูลจริงโดยอาศัยวิธี OLS

<u>กรณีที่ 2</u> ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรตาม

นั่นคือ $\quad V(\varepsilon_t) \quad = \quad \sigma^2\left[\,E(Y_t)\right]^2 \quad , \quad t=1,2,\ldots,n$

และ $\quad E(\varepsilon_s\varepsilon_t) \quad \neq \quad 0 \quad , \quad s \neq t$

โดยที่ $\quad \varepsilon_t \quad = \quad \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $\quad |\rho| < 1 \quad , \quad V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$

พิจารณา $E(\varepsilon_s\varepsilon_t)$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 1 ที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่า

$$E(\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^2 & \rho\,\hat{Y}_1^2 & \rho\,\hat{Y}_1^2 & \cdots & \rho^{n-1}\,\hat{Y}_1^2 \\ \rho\,\hat{Y}_1^2 & \hat{Y}_2^2 & \rho\,\hat{Y}_2^2 & \cdots & \rho^{n-2}\,\hat{Y}_2^2 \\ \rho^2\hat{Y}_1^2 & \rho\hat{Y}_2^2 & \hat{Y}_3^2 & \cdots & \rho^{n-3}\,\hat{Y}_3^2 \\ \vdots & & & & \\ \rho^{n-1}\,\hat{Y}_1^2 & \rho^{n-2}\,\hat{Y}_2^2 & \rho^{n-3}\,\hat{Y}_3^2 & \cdots & \hat{Y}_n^2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}'' = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}\,(X'\hat{\Omega}^{-1}\underset{\sim}{Y})$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1^2 & \hat{\rho}\hat{Y}_1^2 & \hat{\rho}^2\hat{Y}_1^2 & \cdots & \hat{\rho}^{n-1}\hat{Y}_1^2 \\ \hat{\rho}\,\hat{Y}_1^2 & \hat{Y}_2^2 & \hat{\rho}\hat{Y}_2^2 & \cdots & \hat{\rho}^{n-2}\hat{Y}_2^2 \\ \vdots & & & & \\ \hat{\rho}^{n-1}\hat{Y}_1^2 & \hat{\rho}^{n-2}\hat{Y}_2^2 & \hat{\rho}^{n-3}\hat{Y}_3^2 & \cdots & \hat{Y}_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t\,e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

$e_t = Y_t - \hat{Y}_t'$ ซึ่ง $\hat{Y}_t'$ เป็นค่าประมาณของ Y_t ที่ได้จากข้อมูลจริง

โดยอาศัยวิธี OLS

สำหรับ $\hat{Y}_t$ ใน $\hat{\Omega}$ ผู้วิจัยขอเสนอวิธีการประมาณสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ ดังนี้

1. ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ โดยอาศัยวิธี 2.2.2.2 ซึ่งคำนึงเฉพาะข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

2. นำค่าประมาณ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ได้ มาประมาณค่า $\hat{Y}_t$ จากสูตร

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_t \qquad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

<u>กรณีที่ 3</u> ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าแบบสุ่ม

นั่นคือ $\quad V(\varepsilon_t) \quad = \quad \sigma^2 Z_t \qquad , \quad t = 1,2,\ldots, n$

และ $\quad E(\varepsilon_s\varepsilon_t) \quad \neq \quad 0 \qquad , \quad s \neq t$

โดยที่ $\quad \varepsilon_t \quad = \quad \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $\quad |\rho| \quad < \quad 1 \qquad , \quad V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$

Z_t มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม

พิจารณา $E(\varepsilon_s\varepsilon_t)$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 1 ที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่า

$$E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} V(\varepsilon_1) & \rho V(\varepsilon_1) & \rho^2 V(\varepsilon_1) & \ldots & \rho^{n-1}V(\varepsilon_1) \\ \rho V(\varepsilon_1) & V(\varepsilon_2) & \rho\ V(\varepsilon_2) & \ldots & \rho^{n-2}V(\varepsilon_2) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \rho^{n-1}V(\varepsilon_1) & \rho^{n-2}V(\varepsilon_2) & \rho^{n-3}V(\varepsilon_3) & \ldots & V(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า ค่าประมาณของพารามิเตอร์ β คือ

$$\hat{\beta}''' = (X'\hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} (X'\hat{\Omega}^{-1} Y)$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{V}(\varepsilon_1) & \hat{\rho}\hat{V}(\varepsilon_1) & \hat{\rho}^2\hat{V}(\varepsilon_1) \dots \hat{\rho}^{n-1}\hat{V}(\varepsilon_1) \\ \hat{\rho}\hat{V}(\varepsilon_1) & \hat{V}(\varepsilon_2) & \hat{\rho}\hat{V}(\varepsilon_2) \dots \hat{\rho}^{n-2}\hat{V}(\varepsilon_2) \\ \vdots & & \\ \hat{\rho}^{n-1}\hat{V}(\varepsilon_1) & \hat{\rho}^{n-2}\hat{V}(\varepsilon_2) & \hat{\rho}^{n-3}\hat{V}(\varepsilon_3) \dots \quad \hat{V}(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ซึ่ง $\hat{Y}_t$ เป็นค่าประมาณของ Y_t ที่ได้จากข้อมูลจริง โดยอาศัยวิธี OLS

สำหรับ $\hat{V}(\varepsilon_t)$ ใน $\hat{\Omega}$ ผู้วิจัยขอเสนอวิธีการประมาณสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : จากข้อมูล (Y_t , X_t) ให้จัดเรียงลำดับข้อมูลเสียใหม่เป็น $(Y_{(t)} , X_{(t)})$ เป็นข้อมูลที่เรียงลำดับจากน้อยไปมากตามค่า X

ขั้นตอนที่ 2 : แบ่งข้อมูล $(Y_{(t)} , X_{(t)})$ จากขั้นตอนที่ 1ออกเป็น 3 ส่วนให้มีขนาด n_1 , n_2และ n_3 โดยที่แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน นั่นคือ $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$ และ $n_3 = n - n_1 - n_2$

ขั้นตอนที่ 3 : ประมาณค่าพารามิเตอร์ β โดยอาศัยวิธี 2.2.2.2 ซึ่งคำนึงเฉพาะข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน

ขั้นตอนที่ 4 : นำค่าประมาณ $\hat{\beta}$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 และ $\hat{\rho}$ ที่กล่าวข้างต้น มาประมาณค่าความแปรปรวน (S_i^2) จากสูตร

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-3} \sum_{j=2}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2$$

เมื่อ

S_i^2 คือ ค่าความแปรปรวนของข้อมูลกลุ่มที่ i , i = 1,2,3

n_i คือ จำนวนข้อมูลในกลุ่มที่ i , i = 1,2,3

Y_{ij} คือ ค่าสังเกตของ Y ในกลุ่มที่ i ลำดับที่ j , i=1,2,3, ; j = 1,2,...,n_i

$\hat{Y}_{ij}$ คือ ค่าประมาณของ Y_{ij} ซึ่งหาได้จาก

$$\hat{Y}_{ij} = \hat{\beta}_o(1-\hat{\rho}) + \hat{\beta}_1(X_{ij} - \hat{\rho}X_{i,j-1}) + \hat{\rho}Y_{i,j-1}$$

X_{ij} คือ ค่าสังเกตของ X ในกลุ่มที่ i ลำดับที่ j

ขั้นตอนที่ 5 : ค่าประมาณของ $V(\varepsilon_t)$ จะมีค่าดังนี้

$$\hat{V}(\varepsilon_t) = \begin{cases} S_1^2 & \text{เมื่อ } X_t \text{ ตกอยู่ในกลุ่มที่ } 1 \\ S_2^2 & \text{เมื่อ } X_t \text{ ตกอยู่ในกลุ่มที่ } 2 \\ S_3^2 & \text{เมื่อ } X_t \text{ ตกอยู่ในกลุ่มที่ } 3 \end{cases}$$

2.2.2.4 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปในการแก้ปัญหาทั้งลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีสหสัมพันธ์กันและความแปรปรวนไม่คงที่โดยอาศัยวิธีการแปลงข้อมูล

ในกรณีนี้ผู้วิจัยขอเสนอวิธีการที่คำนึงถึงข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยเช่นเดียวกับ 2.2.2.3 แตกต่างกันเพียงขั้นตอนการคำนวณเท่านั้น ซึ่งสามารถแยกจำแนกตามความผันแปรของความแปรปรวนได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรอิสระ

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 X_t^2 \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$

และ $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , \quad s \neq t$

โดยที่ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $|\rho| < 1 \quad , \quad V_t \sim N(0,\sigma^2 V_t)$

ซึ่งมีขั้นตอนในการประมาณค่าพารามิเตอร์ β ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณาจากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\ldots, n \text{--------------}(1)$$

นำค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ (X_t) มาแปลงสมการ (1) ดังนี้

$$\frac{Y_t}{X_t} = \beta_o\left(\frac{1}{X_t}\right) + \beta_1 + \frac{\varepsilon_t}{X_t}$$

$$Y_t^* = \beta_o X_t^* + \beta_1 + \varepsilon_t^* \quad \text{---------------------}(2)$$

ขั้นตอนที่ 2 : จากสมการ (2) นำมาประมาณค่าสหสัมพันธ์ (ρ) จากสูตร

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^* \, e_{t-1}^*}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{*2}}$$

$e_t^* = Y_t^* - \hat{Y}_t^*$ ซึ่ง $\hat{Y}_t^*$ เป็นค่าประมาณของ Y_t^* ที่ได้จากข้อมูลที่ถูกแปลงในสมการ (2) โดยอาศัยวิธี OLS

ขั้นตอนที่ 3 : ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ จากสูตร

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}' = (X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1}X^{*})^{-1}(X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1}\underset{\sim}{Y}^{*})$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^{2} & \cdots & \hat{\rho}^{n-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho}^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ \hat{\rho}^{n-1} & \hat{\rho}^{n-2} & \hat{\rho}^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{*} = \begin{bmatrix} X_1^{*} & 1 \\ X_2^{*} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_n^{*} & 1 \end{bmatrix}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าไปตามตัวแปรตาม

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \left[E(Y_t) \right]^2 , t = 1,2,\ldots, n$

และ $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , s \neq t$

โดยที่ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $|\rho| < 1 = V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$

ซึ่งมีขั้นตอนในการประมาณค่าพารามิเตอร์ β ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: พิจารณาจากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \;,\; t = 1,2,\ldots, n \text{ ---------(1)}$$

นำค่าประมาณของตัวแปรตาม $(\hat{Y}_t)$ มาแปลงสมการ (1) ดังนี้

$$\frac{Y_t}{\hat{Y}_t} = \beta_o\left(\frac{1}{\hat{Y}_t}\right) + \beta_1\left(\frac{X_t}{\hat{Y}_t}\right) + \frac{\varepsilon_t}{\hat{Y}_t}$$

$$Y_t^* = \beta_o X^*_{1t} + \beta_1 X^*_{2t} + \varepsilon^*_t \text{ -----------------(2)}$$

โดยที่ค่าประมาณ $\hat{Y}_t$ หาได้เช่นเดียวกับ 2.2.2.3 ในกรณีที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 : จากสมการ (2) นำมาประมาณค่าสหสัมพันธ์ $(\hat{\rho})$ จากสูตร

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^* e_{t-1}^*}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{*2}}$$

$e_t^* = Y_t^* - \hat{Y}_t^*$ ซึ่ง $\hat{Y}_t^*$ เป็นค่าประมาณของ Y_t^* ที่ได้จากข้อมูลที่ถูกแปลงในสมการ (2) โดยอาศัยวิธี OLS

ขั้นตอนที่ 3 : ประมาณค่าพารามิเตอร์ β จากสูตร

$$\hat{\beta}'' \quad (X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1} X^*)^{-1} (X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1} Y^*)$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \ldots & \hat{\rho}^{n-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \ldots & \hat{\rho}^{n-2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \hat{\rho}^{n-1} & \hat{\rho}^{n-2} & \hat{\rho}^{n-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{*} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}$$

<u>กรณีที่ 3</u> ค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนผันแปรค่าแบบสุ่ม

นั่นคือ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 Z_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$

และ $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , \quad s \neq t$

โดยที่ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$

เมื่อ $|\rho| < 1 \quad , \quad V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$

Z_t มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม

ซึ่งมีขั้นตอนในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณาจากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \ , \quad t = 1,2,\ldots, n \quad \text{------------(1)}$$

นำค่าประมาณของความแปรปรวนของข้อมูล (S_i^2) มาแปลงสมการ (1) ดังนี้

$$\frac{Y_t}{S_i} = \beta_o\left(\frac{1}{S_i}\right) + \beta_1\left(\frac{X_t}{S_i}\right) + \frac{\varepsilon_t}{S_i}$$

$$Y_t^* = \beta_o X_{1t}^* + \beta_1 X_{2t}^* + \varepsilon_t^* \quad \text{------------------(2)}$$

โดยที่ค่าประมาณ S_i^2 หาได้เช่นเดียวกับ 2.2.2.3 ในกรณีที่ 3

ขั้นตอนที่ 2 : จากสมการ (2) นำมาประมาณค่าสหสัมพันธ์ $(\hat{\rho})$ จากสูตร

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^* e_{t-1}^*}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{*2}}$$

$e_t^* = Y_t^* - \hat{Y}_t^*$ ซึ่ง $\hat{Y}_t^*$ เป็นค่าประมาณของ Y_t^* ที่ได้จากข้อมูลที่ถูกแปลงในสมการ (2) โดยอาศัยวิธี OLS

ขั้นตอนที่ 3 : ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ จากสูตร

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}'' = (X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1}X^*)^{-1}(X^{*\prime}\hat{\Omega}^{-1}\underset{\sim}{Y}^*)$$

เมื่อ

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \cdots & \hat{\rho}^{n-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho}^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ \hat{\rho}^{n-1} & \hat{\rho}^{n-2} & \hat{\rho}^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^* = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ \vdots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}$$

2.3 <u>ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ความถดถอย</u>

เมื่อลักษณะของข้อมูลมีผลทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน และความแปรปรวนไม่คงที่ ซึ่งเป็นผลกระทบต่อความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ความถดถอย ในที่นี้จะสนใจเฉพาะ β_1 เนื่องจากในสมการถดถอยเชิงเส้นแบบง่าย β_1 เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.3.1 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ β_1 กับตัวประมาณ $\hat{\beta}_1$</u>

จากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

$$Y_t - \bar{Y} = \beta_1(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

หรือ $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t'$

โดยอาศัยวิธี OLS จะได้ค่า $\hat{\beta}_1$ ดังนี้

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

แทนค่า $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t'$ ใน $\hat{\beta}_1$ จะได้

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t (\beta_1 x_t + \varepsilon_t')}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t'}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} - \frac{\bar{\varepsilon} \sum_{t=1}^{n} x_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

ดังนั้น $$\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$ เมื่อ $x_t = X_t - \bar{X}$

2.3.2 <u>ความไม่เอนเอียงของ</u> $\hat{\beta}_1$

จากรูปแบบความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้ว่า

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left[\beta + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\right]$$

$$= E(\beta_1) + \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t E(\varepsilon_t)}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \qquad \text{--------------(1)}$$

ดังนั้น $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ แสดงว่า $\hat{\beta}_1$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ β_1

จากสมการ (1) จะเห็นได้ว่า ความไม่เอนเอียงของ $\hat{\beta}_1$ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่าคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กันและมีความแปรปรวนไม่คงที่ แต่ขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อน

2.3.3 <u>ความแปรปรวนของ</u> $\hat{\beta}_1$ <u>เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย</u>

จากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , t = 1,2,\ldots, n$$

ในกรณีนี้ ลักษณะของข้อมูลเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า

1. ค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) เป็นตัวแปรสุ่ม
2. $E(\varepsilon_t) = 0$ (Zero mean)
3. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = \sigma^2 \quad S = t$ (Homoscedasticity)
4. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0 \quad s \neq t$ (Nonautocorrelation)
5. ตัวแปรอิสระ X เป็นค่าคงที่ (Nonstochastic)

จะได้ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ดังนี้

$$V(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2} \; E\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2\sum_{s<t} x_t \varepsilon_t \, x_{t-s} \, \varepsilon_{t-s}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2} \left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \, E(\varepsilon_t^2) + 2\sum_{s<t} x_t \, x_{t-s} \; E(\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-s})\right]$$

$$= \frac{1}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2} \left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \, \sigma^2\right]$$

ดังนั้น $V(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$

2.3.4 <u>ความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลมีความแปรปรวนไม่คงที่</u>

จากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

ในกรณีนี้ ลักษณะของข้อมูลพบว่า

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2 \quad , t = 1,2,\ldots, n$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad , t = 1,2, \ldots, n$$

จะได้ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ดังนี้

$$V'(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} x_t\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2} E\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2\varepsilon_t^2 + 2\sum_{s<t} x_t\varepsilon_t\, x_{t-s}\varepsilon_{t-s}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2}\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2\, E(\varepsilon_t^2) + 2\sum_{s<t} x_t x_{t-s}\, E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-s})\right]$$

ดังนั้น $$V'(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t^2\sigma_t^2}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2}$$

2.3.5 <u>ความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$</u> <u>เมื่อค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลมีสหสัมพันธ์กัน</u>

จากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

ในกรณีนี้ ลักษณะของข้อมูลพบว่า

$$E(\varepsilon_s\varepsilon_t) \neq 0 \quad , \quad s \neq t$$

และ $$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$$

เมื่อ $|\rho| < 1$, $V_t \sim N(0, \sigma_V^2)$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า

$$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \quad = \quad 0 \qquad , s \neq t$$

จะได้ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ดังนี้

$$V''(\hat{\beta}_1) \quad = \quad E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2} \quad E\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2 \sum_{s<t} x_t \varepsilon_t \, x_{t-s} \, \varepsilon_{t-s}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2} \quad \left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \; E(\varepsilon_t^2) + 2 \sum_{s<t} x_t \, x_{t-s} \, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s})\right]$$

เนื่องจาก $\quad E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \quad = \quad \rho^{t-s} \sigma^2 \qquad s < t \qquad$ จะได้ว่า

$$V''(\hat{\beta}_1) \quad = \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2} \left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \, \sigma^2 + 2 \sum_{s<t} x_t \, x_{t-s} \, \rho^s \, \sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2\right)^2} \left[\sigma^2 \sum_{t=1}^{n} x_t^2 + 2\,\sigma^2 \sum_{s<t} x_t \, x_{t-s} \, \rho^s\right]$$

ดังนั้น $$\overset{''}{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} + \frac{2\sigma^2}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2}\left[\rho \sum_{t=2}^{n} x_t x_{t-1} + \rho^2 \sum_{t=3}^{n} x_t x_{t-2} + \ldots\right]$$

2.3.6 <u>ความแปรปรวนของ</u> $\hat{\beta}_1$ <u>เมื่อค่าคลาดเคลื่อนของข้อมูลมีสหสัมพันธ์และความแปรปรวนไม่คงที่</u>

จากสมการถดถอย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

ในกรณีนี้ ลักษณะของข้อมูลพบว่า

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2 \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

และ $$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0 \quad , \quad s \neq t$$

โดยที่ $$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + V_t$$

เมื่อ $$|\rho| < 1 \quad , \quad V_t \sim N(0, \sigma^2 V_t)$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอยที่กล่าวไว้ว่า

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad , \quad t = 1,2,\ldots, n$$

และ $$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0 \quad , \quad s \neq t$$

จะได้ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ดังนี้

$$\overset{'''}{V}(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} x_t \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_t^2)^2} E\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \varepsilon_t^2 + 2 \sum_{s<t} x_t \varepsilon_t x_{t-s} \varepsilon_{t-s}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2}\left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \; E(\varepsilon_t^2) + 2 \sum_{s<t} x_t x_{t-s} \; E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s})\right]$$

พิจารณา $E(\varepsilon_t \; \varepsilon_s)$ เช่นเดียวกับหัวข้อ 2.2.2.3 จะได้ว่า

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \rho^{t-s} \sigma_s^2 \quad \text{เมื่อ} \quad s < t$$

จะได้ $\hat{V}'''(\hat{\beta}_1) = \dfrac{1}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2} \left[\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \sigma_t^2 + 2 \sum_{s<t} x_t \, x_{t-s} \, \rho^s \, \sigma_{t-s}^2\right]$

ดังนั้น $\hat{V}'''(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \sigma_t^2}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2} + \dfrac{2}{(\sum_{t=1}^{n} x_t^2)^2}\Big[\rho \sum_{t=2}^{n} x_t \, x_{t-1} \, \sigma_{t-1}^2$

$$+ \rho^2 \sum_{t=3}^{n} x_t \, x_{t-2} \, \sigma_{t-2}^2 + \ldots\Big]$$

2.4 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าความคลาดเคลื่อน

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าความคลาดเคลื่อน จะทำการทดสอบดังนี้

2.4.1 การทดสอบภาวะค่าคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนคงที่

สมมติฐานที่ทดสอบ

H_o : ค่าคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนคงที่
(Homoscedasticity)

H_a : ค่าคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนไม่คงที่
(Heteroscedasticity)

ในการทดสอบสมมติฐาน จะนำวิธีการของ Bartlett มาใช้ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.4.1.1 สถิติทดสอบ

$$B = \frac{-\ 4.60517 \log M}{1 + N}$$

โดย $$\log M = \frac{\sum_{t=1}^{m} (n_i - 1)}{2} \log S_i^2 - \frac{(n-m)}{2} \log \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i-1) S_i^2}{n-m}$$

$$N = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{n}}{3(m-1)}$$

โดยมีขั้นตอนในการหา S_i^2 ดังนี้

1. จากค่าสังเกต $Z_t = (Y_t , X_t)$, $t = 1,2,\ldots, n$ ให้จัดเรียงลำดับค่าสังเกตเหล่านี้จากน้อยไปหามาก ตามค่าของตัวแปรอิสระ (X)

2. แบ่งข้อมูล Z ที่จัดเรียงลำดับแล้วในขั้นที่ 1 ออกเป็น m ส่วนให้มีขนาด n_1 , n_2 ..., n_m โดยที่แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน

3. จากแต่ละกลุ่มตัวอย่างย่อยให้วิเคราะห์สมการถดถอยโดยวิธี OLS แล้วคำนวณหา S_i^2 , $i = 1,2, \ldots , m$ กล่าวคือ

$$\hat{\beta}_i = (X_i' X_i)^{-1} (X_i' Y_i) \quad , \quad S_i^2 = \frac{1}{n-2} (Y_i'Y_i - \hat{\beta}_i' X_i'Y_i)$$

$$i = 1,2, \ldots, m$$

โดย "i" เป็นดัชนีแทนกลุ่มตัวอย่างย่อยกลุ่มที่ i

2.4.1.2 <u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ $B \geq \chi^2(\alpha, m-1)$

เมื่อ $\chi^2(\alpha, m-1)$ เป็นค่าวิกฤตที่ได้จากตาราง χ^2 ที่องศาอิสระ m-1 ณ ระดับนัยสำคัญ α

2.4.2 <u>การทดสอบภาวะค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน</u>

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบ

H_o : ค่าคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน (Nonautocorrelation)

H_a : ค่าคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กัน (Autocorrelation)

ในการทดสอบสมมติฐาน จะนำวิธีการของเดอบิน-วัตสันมาใช้ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.4.2.1 สถิติทดสอบ

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

โดย $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

$\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นเวคเตอร์ที่ได้จากการวิเคราะห์สมการถดถอย โดยวิธี OLS

2.4.2.2 เกณฑ์การตัดสินใจ

โดยนำค่า d ไปเปรียบเทียบกับค่า dL และ du ดังนี้

1. จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ $d < dL$ หรือ $d > 4 - dL$

2. ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ $du < d < 4 - du$

3. ไม่อาจตัดสินใจได้ เมื่อ $dL \leq d \leq du$ หรือ $4 - du \leq d \leq 4 - dL$

เมื่อ dL คือ ขีดจำกัดล่างของฟังก์ชันการแจกแจงในตาราง เดอบิน-วัตสัน ณ ระดับนัยสำคัญ α

du คือ ขีดจำกัดบนของฟังก์ชันการแจกแจงในตาราง เดอบิน-วัตสัน ณ ระดับนัยสำคัญ α