บทที่ 3

การวิเคราะห์แบบโครงข้อแข็งในสามมิติ

การวิเคราะห์บันไดยื่นอิสระโดยประมาณด้วยการจำลองพื้นบันไดและชานพักเป็นชิ้นส่วนมิติเดียว (one-dimensional element) ซึ่งประกอบเป็นโครงข้อแข็งในสามมิติ เป็นวิธีวิเคราะห์โดยประมาณวิธีหนึ่งที่ใช้ในการออกแบบ (1,2,7,8) ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงโครงสร้างจำลองทางคณิตศาสตร์ของ "บันได" และการวิเคราะห์โครงสร้างจำลองภายใต้น้ำหนักกระจายสม่ำเสมอตามแนวดิ่งแบบสมมาตรและปฏิสมมาตร

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โครงสร้างจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เป็นโครงข้อแข็งในสามมิติ ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับโครงสร้างจำลองที่เสนอโดย Fuchsteiner[1] และ Sauter[2] กล่าวคือเป็นโครงสร้างจำลองที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนเส้นตรง (straight-line element) วางตัวตามแนวแกนจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัด (centroidal axis) ของพื้นบันไดบนและชิ้นส่วนเส้นตรงวางตัวตามแนวแกนจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดของพื้นบันไดล่าง ซึ่งเชื่อมต่อกันโดยชิ้นส่วนเส้นโค้ง (curve line element) ที่มีรัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของความกว้างบันไดและวางตัวในระนาบที่ผ่านกึ่งกลางความหนาของชานพักตามที่แสดงในรูปที่ 3.1

3.2 สมมุติฐานในการวิเคราะห์

การวิเคราะห์โครงสร้างจำลองทางคณิตศาสตร์ของบันไดในแบบโครงข้อแข็งในสามมิติ มีสมมุติฐานในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้ คือ

1. วัสดุมีคุณสมบัติอีลาสติคเชิงเส้น (linearly elastic) ไอโซโทรปิค (isotropic) และมีเนื้อเดียวกันตลอดโครงสร้าง (homogenous)

2. การเคลื่อนที่ของโครงสร้างเมื่อรับแรงมีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับมิติรูปทรงของโครงสร้าง ฉะนั้นในการวิเคราะห์สามารถพิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงต่าง ๆ จากรูปทรงของโครงสร้างขณะยังไม่รับแรง

3. ในการวิเคราะห์สามารถใช้หลักการรวมผล (principle of superposition)

4. บริเวณรอยต่อระหว่างพื้นบันไดกับชานพัก และที่รองรับเป็นข้อต่อแบบข้อแข็ง (rigid joint) และเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาวรอยต่อ

5. ไม่มีการเลื่อนตัวหรือทรุดตัวของที่รองรับ

6. ส่วนโค้งของโครงสร้างจำลองบนชานพัก สามารถแทนด้วยคานโค้งที่มีความกว้าง b และมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดของแกนหลักดังแสดงในรูปที่ 3.1(ก) โดยผลของพื้นที่ส่วนแลเงาบนชานพักที่ตัดทิ้งออกไป ซึ่งอยู่นอกวงกลมรัศมี b นั้น มีผลต่อโครงสร้างจำลองน้อย

3.3 แกนโคออร์ดิเนต และแรงภายใน

ในการกำหนดรูปทรงเรขาคณิต ทิศทางบวกของแรงกระทำการเคลื่อนที่ และแรงภายในจะเทียบกับแกนอ้างอิง 2 ชุด ได้แก่

1. แกนโคออร์ดิเนตหลัก เป็นแกนอ้างอิงในระบบแกนตั้งฉากตามกฎมือขวา โดยแกน X และ Y วางตัวอยู่ในระนาบกึ่งกลางความหนาของชานพักบันได ตามที่แสดงในรูปที่ 3.1

แกนโคออร์ดิเนตหลัก เป็นแกนอ้างอิงที่ใช้กำหนดรูปทรงเรขาคณิตของบันได ทิศของแรงกระทำภายนอก แรงปฏิกิริยาและการเคลื่อนที่โดยที่จะมีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศไปตามทิศทางบวกของแกนโคออร์ดิเนตนั้น

2. แกนโคออร์ดิเนตรอง เป็นแกนอ้างอิงในระบบแกนตั้งฉากกันตามกฎมือขวา ของชิ้นส่วนโครงสร้าง โดยมีแกนโคออร์ดิเนตแกนหนึ่งวางตัวในแนวแกนของชิ้นส่วนโครงสร้างจำลอง และแกนโคออร์ดิเนตอีกสองแกนตั้งฉากกับแนวแกนของชิ้นส่วนโครงสร้างนั้น โดยมีแกนหนึ่งขนานกับระนาบ X-Y ของแกนหลักและแกนที่เหลือ ($\bar{Z}$) ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นพื้นของชิ้นส่วนโครงสร้างนั้น แกนโคออร์ดิเนตรองสำหรับพื้นบันไดบน, ชานพักส่วนบันไดบน, พื้นบันไดล่าง และชานพักส่วนบันไดล่าง แสดงในรูปที่ 3.2(ค), 3.2(จ), 3.3(ค) และ 3.3(จ) ตามลำดับ

แกนโคออร์ดิเนตรองเป็นแกนอ้างอิงที่ใช้กำหนดทิศของแรงภายในของชิ้นส่วนโครงสร้าง และเนื่องจากโครงสร้างจำลองเป็นโครงข้อแข็งในสามมิติ ดังนั้นแรงภายในที่หน้าตัดใด ๆ ของ

โครงสร้างจำลองจึงประกอบด้วยแรงตามแนวแกน, แรงเฉือนในสองทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวแกน โมเมนต์บิด และโมเมนต์ดัดในสองทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวแกน รวมเป็นแรงภายในทั้งหมดหกตัว ซึ่งแรงภายในแต่ละตัวจะมีทิศเป็นบวกเพื่อกระทำในทิศทางบวกของแกนรองของโครงสร้างส่วนที่พิจารณา แรงภายในที่เป็นบวกในพื้นบันไดบน, ชานพักบันไดส่วนบน, พื้นบันไดล่าง และชานพักบันไดส่วนล่าง แสดงในรูปที่ 3.2(ง), 3.2(ฉ), 3.3(ง) และ 3.3(ฉ) ตามลำดับ

3.4 <u>การวิเคราะห์โครงสร้างจำลอง</u>

เนื่องจากโครงสร้างจำลองทางคณิตศาสตร์ของ "บันได" เป็นโครงข้อแข็งในสามมิติ ซึ่งมีที่รองรับที่ปลายของพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างเป็นที่รองรับแบบยึดแน่น ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจึงมีสิบสองตัว แต่เนื่องจากสมการแสดงสภาวะสมดุลย์มีเพียงหกสมการ ดังนั้นโครงสร้างจำลองจึงจัดเป็นโครงสร้างอินดีเทอร์มีเนตที่มีตัวไม่รู้ค่าหกตัว ทำให้การวิเคราะห์โครงสร้างจำลองยุ่งยาก แต่เนื่องจากโครงสร้างจำลองเป็นโครงสร้างที่มีสมมาตร ดังนั้นผลของแรงกระทำใด ๆ ต่อโครงสร้างสามารถแสดงในรูปผลรวมของแรงกระทำแบบสมมาตร (symmetrical loading) และแรงกระทำแบบปฏิสมมาตร (anti-symmetrical loading) ของแรงกระทำที่มีทิศและตำแหน่งเดียวกันกับแรงกระทำจริง แต่มีขนาดเพียงครึ่งหนึ่งของแรงกระทำจริง ซึ่งเมื่อรวมแรงกระทำทั้งสองชุดจะได้แรงกระทำที่มีขนาดและทิศทางเท่ากับแรงกระทำจริง ตามที่แสดงในรูปที่ 3.4 ดังนั้นการวิเคราะห์โครงสร้างจำลองจึงสามารถทำในรูปการวิเคราะห์โครงสร้างสมมาตรภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตร และปฏิสมมาตรซึ่งมีตัวไม่รู้ค่าเพียงสี่และสองตัวตามลำดับ

ในงานวิจัยนี้จะแสดงการวิเคราะห์โครงสร้างจำลองภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอแบบสมมาตรและปฏิสมมาตรโดยอาศัยหลักการของสมมาตรที่กล่าวข้างต้นในการวิเคราะห์และพิจารณาโครงสร้างเฉพาะส่วนที่อยู่ระหว่างแกนสมมาตรและที่รองรับที่ปลายพื้นบันไดล่าง ซึ่งจะเรียกว่า "ส่วนบันไดล่าง" เท่านั้น สำหรับโครงสร้างส่วนที่เหลือจะเรียก "ส่วนบันไดบน" สามารถหาค่าแรงภายในจากแรงภายในที่จุดคู่สมมาตรกันของส่วนบันไดล่าง โดยอาศัยหลักการของสมมาตรซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

การวิเคราะห์โครงสร้างจำลองที่จะกล่าวถึงต่อไป ประกอบด้วยการวิเคราะห์ผลของน้ำหนักบรรทุกดังต่อไปนี้ คือ

1. ผลของน้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสมมาตร

1.1 ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนพื้นบันได

1.2 ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนชานพักบันได

2. ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนพื้นบันไดแบบสมมาตร

สำหรับผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนชานพักแบบสมมาตรจะไม่กล่าวถึงในงานวิจัยนี้

การวิเคราะห์ผลของน้ำหนักบรรทุกในแต่ละกรณีประกอบด้วยการเลือกโครงสร้างดีเทอร์มีเนต ในการวิเคราะห์การหาค่าตัวไม่รู้ค่าของโครงสร้างในรูปของแรงกระทำภายนอกจากสมการสภาวะสมดุลย์ การหาแรงภายในและพลังงานความเครียด (strain energy) ของโครงสร้างดีเทอร์มีเนต เพื่อหาค่าตัวไม่รู้ค่าจากทฤษฎีของงานน้อยที่สุด

3.5 การวิเคราะห์โครงสร้างจำลองภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสมมาตร

เมื่อโครงสร้างจำลองรับน้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสมมาตร (ในกรณีน้ำหนักบรรทุกตามแนวดิ่งคือ น้ำหนักบรรทุกที่จุดคู่สมมาตรในส่วนบันไดบนและส่วนบันไดล่าง มีขนาดและทิศกระทำเดียวกันตามที่แสดงในรูปที่ 3.4 (ข)) แรงภายในที่จุด A บนแกนสมมาตร[6] มีเพียงแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในแนวรัศมีของคานโค้งเท่านั้น แรงภายในที่เหลือต้องเป็นศูนย์ และการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับแรงภายในทั้งสองต้องเป็นศูนย์ ขณะที่การเคลื่อนที่ในทิศทางอื่นสามารถเกิดขึ้นได้ ตามที่แสดงในรูปที่ 3.5 ดังนั้นแรงปฏิกิริยาและแรงภายในที่จุด A ซึ่งต้องรู้ค่าเพื่อหาแรงภายในโครงสร้างจำลองจึงมีทั้งหมดแปดตัว ทำให้โครงสร้างจำลองเป็นโครงสร้างอินดีเทอร์มีเนตซึ่งมีตัวไม่รู้ค่าสองตัว ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกเป็น X_1 และ X_2 ตามที่แสดงในรูปที่ 3.6 ซึ่งสามารถแสดงแรงปฏิกิริยาและแรงภายในที่จุด A และ C ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้คือ

$$\{R_{CC}\}^T_{xyz} = < Rx_{CC} \quad Ry_{CC} \quad Rz_{CC} \quad X_2 \quad My_{CC} \quad Mz_{CC} > \qquad (3.1)$$

$$\{R_{AA}\}^T_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = < R\bar{x}_{AA} \quad 0 \quad 0 \quad X_1 \quad 0 \quad 0 > \qquad (3.2)$$

โดยที่

$\{R_{ij}\}_{①②③}$ = เมตริกซ์แสดงแรงปฏิกิริยาหรือตัวไม่รู้ค่า กระทำที่จุด j ในทิศแกนโคออร์-

คิเนต ①②③ เมื่อพิจารณาที่จุด i

$R\eta_{ij}, M\eta_{ij}$ = ผลของแรงปฏิกิริยาหรือแรงภายในกระทำที่จุด j ในทิศของแกน η เมื่อพิจารณาที่จุด i

3.5.1 <u>ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนพื้นบันไดแบบปฏิสมมาตร</u>

ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ w_f บนพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างกระทำในลักษณะปฏิสมมาตร สามารถวิเคราะห์ได้จากการพิจารณาส่วนบันไดล่าง ตามที่แสดงในรูปที่ 3.7 โดยการสมมุติให้แรงปฏิกิริยาและตัวไม่รู้ค่ากระทำในทิศบวก ซึ่งเมื่อพิจารณาสภาวะสมดุลย์ที่จุด C ได้ดังนี้คือ

$\Sigma Fx = 0;$

$$\frac{R\bar{x}_{AA}}{\sqrt{2}} + Rx_{CC} = 0 \qquad (3.3a)$$

$\Sigma Fy = 0;$

$$\frac{R\bar{x}_{AA}}{\sqrt{2}} + Ry_{CC} = 0 \qquad (3.3b)$$

$\Sigma Fz = 0;$

$$Rz_{CC} + w_f a = 0 \qquad (3.3c)$$

$\Sigma Mx_C = 0;$

$$R\bar{x}_{AA}\left(\frac{S \sin \alpha}{\sqrt{2}}\right) + \frac{X_1}{\sqrt{2}} + X_2 - w_f a\left(\frac{a}{2} - S \cos \alpha\right) = 0 \qquad (3.3d)$$

$\Sigma My_C = 0;$

$$- R\bar{x}_{AA}\left(\frac{S \sin \alpha}{\sqrt{2}}\right) + My_{CC} + \frac{X_1}{\sqrt{2}} = 0 \qquad (3.3e)$$

$\Sigma Mz_C = 0;$

$$- R\bar{x}_{AA}\left(\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2\sqrt{2}}\right) + Mz_{cc} = 0 \qquad (3.3f)$$

จากสมการ (3.3d)

$$R\bar{x}_{AA} = -\frac{\sqrt{2}}{S\sin\alpha}\left[\frac{X_1}{\sqrt{2}} + X_2 - w_f a\left(\frac{a}{2} - S\cos\alpha\right)\right] \qquad (3.4)$$

แทนค่าในสมการสมดุลย์อื่นและจัดเทอมใหม่เพื่อแสดงแรงปฏิกิริยาที่จุด C ในรูปของน้ำหนักบรรทุก w_f และตัวไม่รู้ค่า X_1 และ X_2 ได้ดังนี้ คือ

$$Rx_{cc} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \qquad (3.5a)$$

$$Ry_{cc} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \qquad (3.5b)$$

$$Rz_{cc} = -w_f a \qquad (3.5c)$$

$$My_{cc} = -\frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} S\sin\alpha) \qquad (3.5d)$$

$$Mz_{cc} = R\bar{x}_{AA}\left(\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2\sqrt{2}}\right) \qquad (3.5e)$$

แรงภายในที่หน้าตัดใด ๆ ในโครงสร้างจำลองสามารถแสดงในรูปของผลรวมของแรงภายในที่จุด A X_1 และน้ำหนักบรรทุกบนส่วนโครงสร้างระหว่างจุด A และหน้าตัดที่พิจารณา ดังนี้คือ

แรงภายในที่จุด $P_\emptyset$ ใด ๆ บนช่วงส่วนโค้ง AB ที่อยู่ห่างจากจุด A เป็นมุม $\emptyset$ เรเดียน นับจากแกนสมมาตรตามที่แสดงในรูปที่ 3.8 ในทิศของแกนรองที่จุด $P_\emptyset$ มีดังนี้คือ

$$S\bar{x}_\emptyset = R\bar{x}_{AA}\cos\emptyset \qquad (3.6a)$$

$$S\bar{y}_\emptyset = R\bar{x}_{AA}\sin\emptyset \qquad (3.6b)$$

$$S\bar{z}_\emptyset = 0 \qquad (3.6c)$$

$$M\bar{x}_{\emptyset} = X_1 \cos \emptyset \tag{3.6d}$$

$$M\bar{y}_{\emptyset} = X_1 \sin \emptyset \tag{3.6e}$$

$$M\bar{z}_{\emptyset} = -\frac{1}{2}(R\bar{x}_{AA} b \sin \emptyset) \tag{3.6f}$$

แรงภายในที่จุด $P_{x'}$ ใด ๆ บนพื้นบันไดที่อยู่ห่างจากจุด B ไปตามแนวยาวของพื้นบันไดเป็นระยะ X ตามที่แสดงในรูปที่ ๓.๙ แบ่งเป็นสองกรณีดังนี้คือ

ก) $x' \leqslant a/\cos\alpha$

$$S\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \tag{3.7a}$$

$$S\bar{y}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{x}_{AA} \cos \alpha) - w_f x' \sin\alpha \cos \alpha \tag{3.7b}$$

$$S\bar{z}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{x}_{AA} \sin \alpha) + w_f x' \cos^2\alpha \tag{3.7c}$$

$$M\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{x}_{AA} x' \sin \alpha + X_1) + \frac{1}{2} w_f (x' \cos\alpha)^2 \tag{3.7d}$$

$$M\bar{y}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (R\bar{x}_{AA} b \sin \alpha + 2X_1 \cos\alpha) \tag{3.7e}$$

$$M\bar{z}_{x'} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (2x' + b \cos \alpha) R\bar{x}_{AA} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 \sin\alpha) \tag{3.7f}$$

ข) $x' > a/\cos\alpha$

$$S\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \tag{3.8a}$$

$$S\bar{y}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} \cos \alpha) - w_f a \sin \alpha \tag{3.8b}$$

$$S\bar{z}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} \sin\alpha) + w_f a \cos \alpha \tag{3.8c}$$

$$M\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} x' \sin\alpha + X_1) + w_f a(x' \cos\alpha - \frac{a}{2}) \tag{3.8d}$$

$$M\bar{y}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} b\sin \alpha + 2X_1 \cos \alpha) \tag{3.8e}$$

$$M\bar{z}_{x'} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(2x' + b \cos \alpha) R\bar{x}_{AA} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 \sin \alpha) \tag{3.8f}$$

ค่าของตัวไม่รู้ค่า X_1 และ X_2 สามารถหาได้จากทฤษฎีของงานน้อยที่สุดโดยการหาพลังงานความเครียดจากแรงภายในตามสมการ (๓.๖), (๓.๗) และ (๓.๘) และเนื่องจาก

อนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับตัวไม่รู้ค่าแต่ละตัวมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้เกิดสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวไม่รู้ค่าและน้ำหนักบรรทุกภายนอก เพื่อใช้หาค่าตัวไม่รู้ค่าซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) และ (3.8) จะได้ค่าแรงภายในโครงสร้างจำลอง

เนื่องจากผลของแรงตามแนวแกนและแรงเฉือนต่อพลังงานความเครียดมีค่าน้อย ฉะนั้นในการคำนวณจึงไม่นำผลของแรงทั้งสองชนิดนี้มารวมด้วย และเนื่องจากมิติความกว้างของบันไดมากกว่าความหนามาก ทำให้พลังงานความเครียดจากโมเมนต์ดัดในทิศตั้งฉากกับระนาบของแผ่นพื้น ($M\bar{z}$) มีค่าน้อย ฉะนั้นจึงไม่นำผลของโมเมนต์ดัดตั้งฉากระนาบแผ่นพื้นมาคำนวณพลังงานความเครียดเช่นกัน ดังนั้นพลังงานความเครียดของโครงสร้างจำลอง U สามารถแสดงดังนี้คือ

$$U = \int_0^{\ell} \frac{(M\bar{x})^2}{2EI\bar{x}} ds + \int_0^{\ell} \frac{(M\bar{y})^2}{2GJ\bar{y}} ds \qquad (3.9)$$

โดยที่

U	=	พลังงานความเครียด
E	=	โมดูลัสของการยืดหยุ่น
G	=	โมดูลัสเฉือนของแผ่นพื้น
$I\bar{x}_i$	=	โมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia) รอบแกน X ของจุด i
$J\bar{y}_i$	=	ค่าคงที่การบิด (torsional constant) รอบแกน y ของจุด i
ℓ	=	ความยาวของโครงสร้างจำลองจากจุด A ถึงจุด C
ds	=	ความยาวของส่วนย่อย ๆ บนตัวโครงสร้างจำลองจากการหาอนุพันธุ์ของแรงภายในเทียบกับตัวไม่รู้ค่า แต่ละตัวจะได้สมการเพื่อใช้คำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่า ดังนี้คือ

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} ; \quad K_{11}X_1 + K_{12}X_2 = A_1 \qquad (3.10a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} ; \quad K_{21}X_1 + K_{22}X_2 = A_2 \qquad (3.10b)$$

โดยที่

$$K_{11} = \frac{b}{4I\bar{x}_{\phi}}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{S}{6I\bar{x}_{x'}} + \frac{b}{4\beta J\bar{y}_{\phi}}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{S}{2\beta J\bar{y}_{x'}}(\cos\alpha - \frac{b}{2S})^2 \tag{3.10c}$$

$$K_{12} = -\frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b}{2\sqrt{2}\beta J\bar{y}_{x'}}(\cos\alpha - \frac{b}{2S}) \tag{3.10d}$$

$$K_{21} = -\frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b}{2\sqrt{2}\beta J\bar{y}_{x'}}(\cos\alpha - \frac{b}{2S}) \tag{3.10e}$$

$$K_{22} = \frac{S}{3I\bar{x}_{x'}} + \frac{b^2}{4S\beta J\bar{y}_{x'}} \tag{3.10f}$$

$$A_1 = \frac{a^2 w_f}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}}(S - \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{a^2}{4S\cos^2\alpha}) - \frac{ab\,w_f}{2\sqrt{2}\beta J\bar{y}_{x'}}(\frac{a}{2} - S\cos\alpha)$$

$$(\cos\alpha - \frac{b}{2S}) \tag{3.10g}$$

$$A_2 = \frac{a^2 w_f}{12I\bar{x}_{x'}}(\frac{a^2}{2S\cos^2\alpha} - S) + \frac{ab^2 w_f}{4S\beta J\bar{y}_{x'}}(\frac{a}{2} - S\cos\alpha) \tag{3.10h}$$

และ β = อัตราส่วนระหว่างโมดูลัสเฉือนของแผ่นพื้นต่อโมดูลัสยืดหยุ่น $(\frac{G}{E})$

3.5.2 ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนชานพักบันไดแบบปฏิสมมาตร

ผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ, w_{ℓ} บนชานพักบันไดกระทำแบบปฏิสมมาตร (น้ำหนักบรรทุกกระจายเต็มพื้นที่ชานพักบันได) ตามที่แสดงในรูปที่ 3.10 สามารถแสดงในทำนองเดียวกับผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ w_f บนพื้นบันได กล่าวคือ

สภาวะสมดุลย์ที่จุด C

$$\Sigma Fx = 0 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}R\bar{x}_{AA} + Rx_{CC} = 0 \tag{3.11a}$$

$$\Sigma Fy = 0 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} + Ry_{CC} = 0 \tag{3.11b}$$

$$\Sigma Fz = 0 ;$$

$$Rz_{CC} + w_{\ell} \frac{b\pi}{8} = 0 \tag{3.11c}$$

$$\Sigma Mx_{C} = 0 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} S \sin\alpha) + \frac{X_1}{\sqrt{2}} + X_2 + \frac{w_{\ell} b\pi}{8}\left[\frac{\sqrt{2}b(\sqrt{2}-1)}{\pi} + S\cos\alpha\right] = 0 \tag{3.11d}$$

$$\Sigma My_{C} = 0 ;$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} S \sin\alpha) + My_{CC} + \frac{X_1}{\sqrt{2}} - \frac{w_{\ell} b\pi}{8}\left[\frac{\sqrt{2}b}{\pi} - \frac{b}{2}\right] = 0 \tag{3.11e}$$

$$\Sigma Mz_{C} = 0 ;$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} (2S\cos\alpha + b) + Mz_{CC} = 0 \tag{3.11f}$$

จากสมการ (3.11d)

$$R\bar{x}_{AA} = -\frac{\sqrt{2}}{S\sin\alpha}\left[\frac{X_1}{\sqrt{2}} + X_2 + \frac{w_{\ell} b\pi}{8}\left(\frac{\sqrt{2}b(\sqrt{2}-1)}{\pi} + S\cos\alpha\right)\right] \tag{3.12}$$

แทนค่าในสมการสมดุลย์อื่น และจัดเทอมใหม่เพื่อแสดงแรงปฏิกิริยาที่จุด C ดังนี้คือ

$$Rx_{CC} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \tag{3.13a}$$

$$Ry_{CC} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \tag{3.13b}$$

$$Rz_{CC} = -w_{\ell}\frac{b\pi}{8} \tag{3.13c}$$

$$My_{CC} = -\frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} S \sin\alpha) + w_\ell \frac{b\pi}{8}\left[\frac{\sqrt{2}b}{\pi} - \frac{b}{2}\right] \quad (3.13d)$$

$$Mz_{CC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA}(2S\cos\alpha + b) \quad (3.13e)$$

แรงภายในที่จุด $P_\emptyset$ ใด ๆ บนช่วงส่วนโค้ง AB ที่อยู่ห่างจากจุด A เป็นมุม $\emptyset$ เรเดียนนับจากแกนสมมาตรตามที่แสดงในรูปที่ 3.11 คือ

$$S\bar{x}_\emptyset = R\bar{x}_{AA}\cos\emptyset \quad (3.14a)$$

$$S\bar{y}_\emptyset = R\bar{x}_{AA}\sin\emptyset \quad (3.14b)$$

$$S\bar{z}_\emptyset = w_\ell \frac{b\emptyset}{2} \quad (3.14c)$$

$$M\bar{x}_\emptyset = X_1\cos\emptyset + w_\ell \frac{b^2(1-\cos\emptyset)}{4} \quad (3.14d)$$

$$M\bar{y}_\emptyset = X_1\sin\emptyset + w_\ell \frac{b^2\emptyset}{4} - w_\ell \frac{b^2\sin\emptyset}{4} \quad (3.14e)$$

$$M\bar{z}_\emptyset = -\frac{1}{2}(R\bar{x}_{AA} b\sin\emptyset) \quad (3.14f)$$

แรงภายในที่จุด $P_{x'}$ ใด ๆ บนพื้นบันไดที่อยู่ห่างจากจุด B ไปตามแนวยาวของพื้นบันได เป็นระยะ x' ตามที่แสดงในรูปที่ 3.12 มีดังนี้คือ

$$S\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA} \quad (3.15a)$$

$$S\bar{y}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA}\cos\alpha - w_\ell \frac{b\pi\sin\alpha}{8} \quad (3.15b)$$

$$S\bar{z}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{x}_{AA}\sin\alpha + w_\ell \frac{b\pi\cos\alpha}{8} \quad (3.15c)$$

$$M\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA} x'\sin\alpha + X_1) + w_\ell \frac{b\pi}{8}\left[\frac{\sqrt{2}b(\sqrt{2}-1)}{\pi} + x'\cos\alpha\right] \quad (3.15d)$$

$$M\bar{y}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(R\bar{x}_{AA}b\sin\alpha + 2X_1\cos\alpha) - w_\ell\frac{b\pi}{8}\cos\alpha\left[\frac{\sqrt{2}b}{\pi} - \frac{b}{2}\right] \quad (3.15e)$$

$$M\bar{z}_{x'} = -R\bar{x}_{AA}\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{b\cos\alpha}{2\sqrt{2}}\right) + X_1\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} - w_\ell\frac{b\pi\sin\alpha}{8}\left[\frac{\sqrt{2}b}{\pi} - \frac{b}{2}\right]$$

(3.15f)

จากการหาค่าพลังงานความเครียดตามที่แสดงในสมการ (3.9) และหาอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับตัวไม่รู้ค่าจะได้สมการเพื่อใช้คำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่าดังนี้คือ

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}\ ; \quad K_{33}X_1 + K_{34}X_2 = A_3 \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2}\ ; \quad K_{43}X_1 + K_{44}X_2 = A_4 \quad (3.16b)$$

โดยที่

$$K_{33} = \frac{b}{4I\bar{x}_\phi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{S}{6I\bar{x}_{x'}} + \frac{b}{4\beta J\bar{y}_\phi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{S}{2\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha - \frac{b}{2S}\right)^2$$

(3.16c)

$$K_{34} = -\frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b}{2\sqrt{2}\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha - \frac{b}{2S}\right) \quad (3.16d)$$

$$K_{43} = -\frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b}{2\sqrt{2}\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha - \frac{b}{2S}\right) \quad (3.16e)$$

$$K_{44} = \frac{S}{3I\bar{x}_{x'}} + \frac{b^2}{4S\beta J\bar{y}_{x'}} \quad (3.16f)$$

$$A_3 = -\frac{w_\ell b^3}{8I\bar{x}_\phi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{w_\ell b^2S(\sqrt{2}-1)}{24I\bar{x}_{x'}} - \frac{w_\ell b^3}{8\beta J\bar{y}_\phi}\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$- \frac{w_\ell b^2}{8\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\frac{b(\sqrt{2}-1)}{2S} + \cos\alpha\right)\left(\frac{b}{2} - S\cos\alpha\right) \quad (3.16g)$$

$$A_4 = \frac{w_\ell b^2 S(\sqrt{2}-1)}{24\sqrt{2}\ I\bar{x}_{x'}} - \frac{w_\ell b^3}{8\sqrt{2}\,\beta\ J\bar{y}_{x'}}\left(\frac{b(\sqrt{2}-1)}{2S} + \cos\alpha\right) \qquad (3.16h)$$

สัมประสิทธิ์จากการวิเคราะห์ทั้งสองกรณี เมื่อแทนค่าจะได้ว่าค่าสติฟเนสของโครง-สร้างที่ได้เหมือนกัน

3.5.3 <u>แรงภายในโครงสร้างจำลองส่วนบันไดบน เมื่อรับน้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสม-มาตร</u>

เมื่อโครงสร้างจำลองรับน้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสมมาตร แรงภายใน "ส่วนบันไดบน" สามารถหาค่าได้จากแรงภายในจุดคู่สมมาตรใน "ส่วนบันไดล่าง" ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในของส่วนบันไดทั้งสอง เมื่อกำหนดให้แรงภายในส่วนบันไดล่างเป็นบวกได้ดังนี้

ก. แรงภายในส่วนโค้งส่วนบันไดบน

$$S\bar{x}_{\phi u} = -S\bar{y}_{\phi} \qquad (3.17a)$$

$$S\bar{y}_{\phi u} = -S\bar{x}_{\phi} \qquad (3.17b)$$

$$S\bar{z}_{\phi u} = S\bar{z}_{\phi} \qquad (3.17c)$$

$$M\bar{x}_{\phi u} = -M\bar{y}_{\phi} \qquad (3.17d)$$

$$M\bar{y}_{\phi u} = -M\bar{x}_{\phi} \qquad (3.17e)$$

$$M\bar{z}_{\phi u} = M\bar{z}_{\phi} \qquad (3.17f)$$

ข. แรงภายในพื้นบันไดบน

$$S\bar{x}_{x'u} = -S\bar{y}_{x'} \qquad (3.18a)$$

$$S\bar{y}_{x'u} = - S\bar{x}_{x'} \quad (3.18b)$$

$$S\bar{z}_{x'u} = S\bar{z}_{x'} \quad (3.18c)$$

$$M\bar{x}_{x'u} = - M\bar{y}_{x'} \quad (3.18d)$$

$$M\bar{y}_{x'u} = - M\bar{x}_{x'} \quad (3.18e)$$

$$M\bar{z}_{x'u} = M\bar{z}_{x'} \quad (3.18f)$$

รูปที่ 3.13 แสดงแรงภายในส่วนบันไดบน เมื่อแรงภายในส่วนบันไดล่างมีค่าเป็นบวก

3.6 การวิเคราะห์โครงสร้างจำลองภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอบนพื้นบันไดแบบสมมาตร

เมื่อโครงสร้างจำลองรับน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตร (ในกรณีน้ำหนักบรรทุกตามแนวดิ่ง คือ น้ำหนักบรรทุกที่จุดคู่สมมาตรในส่วนบันไดบนและล่างมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศกระทำตรงกันข้าม ตามที่แสดงในรูป 3.4 (ค)) แรงภายในที่จุด A ที่มีค่าได้มีเพียงสี่ตัว ตามที่แสดงในรูปที่ 3.14 แรงภายในที่เหลือต้องเป็นศูนย์ และการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับแรงภายในทั้งสี่ต้องเป็นศูนย์ (ณ ที่การเคลื่อนที่ในทิศทางอื่นสามารถเกิดขึ้นได้ ดังนั้นแรงปฏิกิริยา และแรงภายในที่จุด A ซึ่งต้องรู้ค่าเพื่อหาแรงภายในโครงสร้างจำลองจึงมีทั้งหมดสิบตัว ทำให้โครงสร้างจำลองเป็นโครงสร้างอินดีเทอร์มีเนต ซึ่งเหลือตัวไม่รู้ค่าสี่ตัว โดยเลือกเป็น x_3 , x_4 , x_5 และ x_6 ตามที่แสดงในรูปที่ 3.14 แรงปฏิกิริยาและแรงภายในที่จุด A และ C แสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้คือ

$$\left\{ R_{CC} \right\}^{T}_{xyz} = < Rx_{CC} \quad Ry_{CC} \quad Rz_{CC} \quad X_6 \quad My_{CC} \quad Mz_{CC} > \quad (3.19)$$

$$\left\{ R_{AA} \right\}^{T}_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = < 0 \quad R\bar{y}_{AA} \quad X_3 \quad 0 \quad X_4 \quad X_5 > \quad (3.20)$$

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ที่จุด C เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ w_f บนพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างกระทำในลักษณะสมมาตร ซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้จากการพิจารณาส่วนบันไดล่างตามที่แสดงในรูปที่ 3.14 ได้ดังนี้คือ

$\Sigma Fx = 0$;

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} + Rx_{CC} = 0 \qquad (3.21\ a)$$

$\Sigma Fy = 0$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} + Ry_{CC} = 0 \qquad (3.21\ b)$$

$\Sigma Fz = 0$

$$Rz_{CC} + X_3 + w_f\, a = 0 \qquad (3.21\ c)$$

$\Sigma Mx_C = 0$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{y}_{AA}\ S\sin\alpha) + X_3 \left(\frac{b}{2\sqrt{2}} + S\cos\alpha \right) - \frac{X_4}{\sqrt{2}} + X_6 - w_f a \left(\frac{a}{2} - S\cos\alpha \right)$$

$$= 0 \qquad (3.21\ d)$$

$\Sigma My_C = 0$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{y}_{AA}\ S\sin\alpha) + My_{CC} + X_3 \left[\frac{b}{2\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1) \right] + \frac{X_4}{\sqrt{2}}$$

$$= 0 \qquad (3.21\ e)$$

$\Sigma Mz_C = 0$;

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA}(2\ S\cos\alpha - b + \sqrt{2}\ b) + Mz_{CC} + X_5$$

$$= \quad 0 \qquad (3.21\ f)$$

จากสมการ (3.21 d)

$$R\bar{y}_{AA} = -\frac{\sqrt{2}}{S\sin\alpha}\left[x_3\left(\frac{b}{2\sqrt{2}} + S\cos\alpha\right) - \frac{X_4}{\sqrt{2}} + X_6\right.$$

$$\left. - w_f\, a\left(\frac{a}{2} - S\cos\alpha\right)\right] \qquad (3.22)$$

แทนค่าในสมการสมดุลย์อื่น และจัดเทอมใหม่เพื่อแสดงแรงปฏิกิริยาที่จุด C ในรูปของน้ำหนักบรรทุก w_f และตัวไม่รู้ค่าได้ดังนี้คือ

$$Rx_{CC} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \qquad (3.23\ a)$$

$$Ry_{CC} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \qquad (3.23\ b)$$

$$Rz_{CC} = -X_3 - w_f a \qquad (3.23\ c)$$

$$My_{CC} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{y}_{AA}\ S\sin\alpha) - X_3\left[\frac{b}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)\right] - \frac{X_4}{\sqrt{2}} \qquad (3.23\ d)$$

$$Mz_{CC} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA}(2\ S\cos\alpha - b + \sqrt{2}\ b) - X_5 \qquad (3.23\ e)$$

แรงภายในที่จุด P_ϕ ใด ๆ บนช่วงส่วนโค้ง AB ที่อยู่ห่างจากจุด A เป็นมุม ϕ เรเดียนนับจากแกนสมมาตรตามที่แสดงในรูปที่ 3.15 มีดังนี้คือ

$$S\bar{x}_\phi = -R\bar{y}_{AA} \sin\phi \qquad (3.24\ a)$$

$$S\bar{y}_{\phi} = R\bar{y}_{AA} \cos \phi \qquad (3.24\ b)$$

$$S\bar{z}_{\phi} = X_3 \qquad (3.24\ c)$$

$$M\bar{x}_{\phi} = X_3 \frac{b \sin \phi}{2} - X_4 \sin \phi \qquad (3.24\ d)$$

$$M\bar{y}_{\phi} = X_3 \left[\frac{b(1-\cos \phi)}{2}\right] + X_4 \cos \phi \qquad (3.24\ e)$$

$$M\bar{z}_{\phi} = \frac{1}{2} R\bar{y}_{AA}\, b\,(1-\cos \phi) + X_5 \qquad (3.24\ f)$$

แรงภายในที่จุด $P_{x'}$ ใด ๆ บนพื้นบันไดบน ที่อยู่ห่างจากจุด B ไปตามแนวยาวของพื้นบันไดเป็นระยะ x' ตามที่แสดงในรูปที่ 3.16 แบ่งเป็นสองกรณีคือ

ก) <u>$x' \leqslant a/\cos \alpha$</u>

$$S\bar{x}_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \qquad (3.25\ a)$$

$$S\bar{y}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \cos \alpha - X_3 \sin \alpha - w_f x' \sin \alpha \cos \alpha \qquad (3.25\ b)$$

$$S\bar{z}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \sin\alpha + X_3 \cos\alpha + w_f x' \cos^2\alpha \qquad (3.25\ c)$$

$$M\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA}\, x' \sin\alpha + X_3 \left(\frac{b}{2\sqrt{2}} + x' \cos\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 + w_f \frac{(x' \cos \alpha)^2}{2} \qquad (3.25\ d)$$

$$M\bar{y}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA}\, b \sin\alpha\,(1-\sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} X_3\, b \cos\alpha\,(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 \cos \alpha - X_5 \sin \alpha \qquad (3.25\ e)$$

$$M\bar{z}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \left[2x' - b \cos\alpha \ (1-\sqrt{2}\ )\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} X_3 \ b \sin\alpha \ (\sqrt{2} - 1)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 \sin\alpha + X_5 \cos\alpha \qquad (3.25 \text{ f})$$

ข) $\underline{x' > a/\cos\alpha}$

$$S\bar{x}_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \qquad (3.26 \text{ a})$$

$$S\bar{y}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \cos\alpha - X_3 \sin\alpha - w_f a \sin\alpha \qquad (2.26 \text{ b})$$

$$S\bar{z}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \sin\alpha + X_3 \cos\alpha + w_f a \cos\alpha \qquad (3.26 \text{ c})$$

$$M\bar{x}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \ x' \sin\alpha + X_3 \left(\frac{b}{2\sqrt{2}} + x' \cos\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} X_4$$

$$+ w_f a \left(x' \cos\alpha - \frac{a}{2}\right) \qquad (3.26 \text{ d})$$

$$M\bar{y}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \ b \sin\alpha \ (1-\sqrt{2}\ ) + \frac{1}{2\sqrt{2}} X_3 \ b \cos\alpha \ (\sqrt{2} - 1)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 \cos\alpha - X_5 \sin\alpha \qquad (3.26 \text{ e})$$

$$M\bar{z}_{x'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} R\bar{y}_{AA} \left[2x' - b \cos\alpha \ (1 - \sqrt{2})\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} X_3 \ b \sin\alpha \ (\sqrt{2} - 1)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 \sin\alpha + X_5 \cos\alpha \qquad (3.26 \text{ f})$$

จากสมการหาค่าพลังงานความเครียดตามที่แสดงในสมการ (๓.๙) และหาอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับตัวไม่รู้ค่า แต่ละตัว จะได้สมการเพื่อใช้หาค่าตัวไม่รู้ค่า ดังนี้คือ

$$\frac{\partial U}{\partial X_3} = 0 \; ; \; K_{55}\; X_3 + K_{56}\; X_4 + K_{57}\; X_5 + K_{56}\; X_6 = A_5 \qquad (3.27\,a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_4} = 0 \; ; \; K_{65}\; X_3 + K_{66}\; X_4 + K_{67}\; X_5 + X_{68}\; X_6 = A_6 \qquad (3.27b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_5} = 0 \; ; \; K_{75}\; X_3 + K_{76}\; X_4 + X_{77}\; X_5 + K_{78}\; X_6 = A_7 \qquad (3.27c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_6} = 0 \; ; \; K_{85}\; X_3 + K_{86}\; K_4 + K_{87}\; X_5 + K_{88}\; X_6 = A_8 \qquad (3.27\,d)$$

โดยที่

$$K_{55} = \frac{b^3}{32I\bar{x}_{\emptyset}}\left(\frac{\P}{2} - 1\right) + \frac{b^2S}{24I\bar{x}_{x'}} + \frac{b^3}{32\beta J\bar{y}_{\emptyset}}\left(\frac{3\P}{2} - 4\sqrt{2} + 1\right) + \frac{b^2}{8\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha - b(1-\sqrt{2})\cos\alpha + \frac{b^2(1-\sqrt{2})^2}{4S}\right) \qquad (3.27e)$$

$$K_{56} = -\frac{b^2}{16I\bar{x}_{\emptyset}}\left(\frac{\P}{2} - 1\right) - \frac{bS}{12I\bar{x}_{x'}} - \frac{b^2}{16\beta J\bar{y}_{\emptyset}}\left(\frac{\P}{2} - 2\sqrt{2} + 1\right) + \frac{b}{4\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha - \frac{b^2(1-\sqrt{2})^2}{4S}\right) \qquad (3.27f)$$

$$K_{57} = -\frac{b\sin\alpha}{2\sqrt{2}\;\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos\alpha - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2}\right) \qquad (3.27g)$$

$$K_{58} = -\frac{bS}{12\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b^2(1-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2S}\right) \qquad (3.27h)$$

$$K_{65} = -\frac{b^2}{16I\bar{x}_{\emptyset}}\left(\frac{\P}{2} - 1\right) - \frac{bS}{12I\bar{x}_{x'}} - \frac{b^2}{16\beta J\bar{y}_{\emptyset}}\left(\frac{\P}{2} - 2\sqrt{2} + 1\right) + \frac{b}{4\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha - \frac{b^2(1-\sqrt{2})^2}{4S}\right) \qquad (3.27j)$$

$$K_{66} = \frac{b}{8I\bar{x}_{\emptyset}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{S}{6I\bar{x}_{x'}} + \frac{b}{8\beta J\bar{y}_{\emptyset}}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + \frac{1}{2\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha + b(1-\sqrt{2})\cos\alpha + \frac{b^2(1-\sqrt{2})^2}{4S}\right) \qquad (3.27k)$$

$$K_{67} = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos\alpha + \frac{b(1-\sqrt{2})}{2}\right) \qquad (3.27l)$$

$$K_{68} = \frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha + \frac{b(1-\sqrt{2})}{2S}\right) \qquad (3.27m)$$

$$K_{75} = -\frac{b\sin\alpha}{2\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos\alpha - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2}\right) \qquad (3.27n)$$

$$K_{76} = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos\alpha + \frac{b(1-\sqrt{2})}{2}\right) \qquad (3.27o)$$

$$K_{77} = \frac{S\sin^2\alpha}{\beta J\bar{y}_{x'}} \qquad (3.27p)$$

$$K_{78} = \frac{b(1-\sqrt{2})\sin\alpha}{2\,\beta J\bar{y}_{x'}} \qquad (3.27q)$$

$$K_{85} = -\frac{bS}{12\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b^2(1-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2S}\right) \qquad (3.27r)$$

$$K_{86} = \frac{S}{6\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}} - \frac{b(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\cos\alpha + \frac{b(1-\sqrt{2})}{2S}\right) \qquad (3.27s)$$

$$K_{87} = \frac{b(1-\sqrt{2})\sin\alpha}{2\,\beta J\bar{y}_{x'}} \qquad (3.27t)$$

$$K_{88} = \frac{S}{3I\bar{x}_{x'}} + \frac{b^2(1-\sqrt{2})^2}{4S\,\beta J\bar{y}_{x'}} \qquad (3.27u)$$

$$A_5 = \frac{a^2 b\, w_f}{12\sqrt{2}I\bar{x}_{x'}}\left(\frac{a^2}{4S\cos^2\alpha} - \frac{a}{\cos\alpha} + S\right) + \frac{ab^2 w_f(1-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha - \frac{a\cos\alpha}{2} - \frac{b(1-\sqrt{2})\cos\alpha}{2} + \frac{ab(1-\sqrt{2})}{4S}\right) \qquad (3.27v)$$

$$A_6 = -\frac{a^2 w_f}{6I\bar{x}_{x'}}\left(\frac{a^2}{4S\cos^2\alpha} - \frac{a}{\cos\alpha} + S\right) + \frac{abw_f(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(S\cos^2\alpha\right.$$

$$\left. - \frac{a\cos\alpha}{2} + \frac{b(1-\sqrt{2})\cos\alpha}{2} - \frac{ab(1-\sqrt{2})}{4S}\right) \qquad (3.27w)$$

$$A_7 = \frac{abw_f(1-\sqrt{2})\sin\alpha}{2\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\frac{a}{2} - S\cos\alpha\right) \qquad (3.27x)$$

$$A_8 = \frac{a^2 w_f}{12I\bar{x}_{x'}}\left(\frac{a^2}{2S\cos^2\alpha} - S\right) + \frac{ab^2 w_f(1-\sqrt{2})^2}{4S\,\beta J\bar{y}_{x'}}\left(\frac{a}{2} - S\cos\alpha\right) \qquad (3.27y)$$

3.6.1 แรงภายในโครงสร้างจำลองส่วนบันไดบน เมื่อรับน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตร

เมื่อโครงสร้างจำลองรับน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตรแรงภายใน ส่วนบันไดบนสามารถหาค่าได้จากแรงภายในจุดคู่สมมาตรในส่วนบันไดล่าง ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในของส่วนบันไดทั้งสอง เมื่อกำหนดให้แรงภายในส่วนบันไดล่าง เป็นบวกได้ดังนี้

ก. แรงภายในส่วนโค้งบันไดบน

$$S\bar{x}_{\phi u} = S\bar{y}_{\phi} \qquad (3.28\ a)$$

$$S\bar{y}_{\phi u} = S\bar{x}_{\phi} \qquad (3.28\ b)$$

$$S\bar{z}_{\phi u} = -S\bar{z}_{\phi} \qquad (3.28\ c)$$

$$M\bar{x}_{\phi u} = M\bar{y}_{\phi} \qquad (3.28\ d)$$

$$M\bar{y}_{\phi u} = M\bar{x}_{\phi} \qquad (3.28\ e)$$

$$M\bar{z}_{\phi u} = -M\bar{z}_{\phi} \qquad (3.28\ f)$$

ข. แรงภายในพื้นบันไดบน

$$S\bar{x}_{x\acute{u}} = S\bar{y}_{x'} \qquad (3.29\ a)$$

$$S\bar{y}_{x\acute{u}} = S\bar{x}_{x'} \qquad (3.29\ b)$$

$$S\bar{z}_{x\acute{u}} = -\,S\bar{z}_{x'} \qquad (3.29\ c)$$

$$M\bar{x}_{x\acute{u}} = M\bar{y}_{x'} \qquad (3.29\ d)$$

$$M\bar{y}_{x\acute{u}} = M\bar{x}_{x'} \qquad (3.29\ e)$$

$$M\bar{z}_{x\acute{u}} = -\,M\bar{z}_{x'} \qquad (3.29\ f)$$

แรงภายในส่วนบันไดบนเมื่อแรงภายในส่วนบันไดล่าง มีค่าเป็นบวก แสดงอยู่ในรูปที่ 3.17