บทที่ 4

ทฤษฎีการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ระบบชักตัวอย่างข้อมูลด้วยนอร์ม H_2 นัยทั่วไป

บทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลด้วยนอร์ม H_2 นัยทั่วไป รวมทั้งความสัมพันธ์ระหว่างนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องกับนอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลด้วยแบบจำลองระบบลูกผสม ในการพิจารณาทางด้านการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ระบบชักตัวอย่างข้อมูลด้วยนอร์ม H_2 สามารถแบ่งได้ 2 กรณีดังนี้

1. เมื่อมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) ที่มีคุณลักษณะแปรผันตามเวลา
2. เมื่อมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) ที่มีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

4.1 เมื่อมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะแปรผันตามเวลา

สมการที่ (3.27) เป็นนิยามนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่ไม่มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ดังนั้นในหัวข้อนี้จะนิยามนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมใหม่ซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่แปรผันตามเวลาดังต่อไปนี้

นิยามที่ 4.1

$$\left\| \begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix} \right\|_{2,\alpha,\beta} = \sqrt{\left\| e^{\alpha t} z_c(t) \right\|_2^2 + \left\| \beta^k z_d[k] \right\|_2^2}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 1 \tag{4.1}$$

เป็นนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะที่แปรผันตามเวลาจะเห็นว่านอร์ม H_2 ดังกล่าวสามารถพิจารณาเป็นการวางตำแหน่งโพลภายในวงกลมขนาดใด ๆ โดยมีความสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ α, β และมีความสัมพันธ์กับความมั่นคง (robustness) ของระบบที่นำมาใช้ประโยชน์ในการออกแบบโพลวงรอบปิด (closed-loop poles) ต่อไป

4.1.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์

จากแบบจำลองระบบลูกผสมในสมการที่ (3.29) และ (3.30) ตามลำดับ การคำนวณค่านอร์ม H_2 เริ่มจากการกำหนดให้ $C_{c1\alpha}(t),\ C_{d2\beta}$ และ $\widetilde{\mathcal{D}}_c(t)$ ในสมการต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} C_{c1\alpha}(t) \\ C_{d2\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{cc\alpha}(t) & C_{cd\alpha}(t) \\ \beta C_{ds} & \beta C_d \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_c(t) = \mathcal{D}_{c\alpha}(t) \tag{4.3}$$

โดย $C_{cc\alpha}(t),\ C_{cd\alpha}(t)$ และ $\mathcal{D}_{c\alpha}(t)$ หาได้จากสมการที่ (4.4), (4.5) และ (4.6) ตามลำดับ ดังนี้

$$C_{cc\alpha}(t) = C_c\left(e^{A_\alpha t} + \int_0^t e^{A_\alpha(t-\xi)} A_{cs}(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi\right) + e^{\alpha t} C_{cs}(t) \tag{4.4}$$

$$C_{cd\alpha}(t) = C_c \int_0^t e^{A_\alpha(t-\xi)} A_{cd}(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi + e^{\alpha t} C_{cd}(t) \tag{4.5}$$

และ

$$\mathcal{D}_{c\alpha}(t) = C_c \int_0^t e^{A_\alpha(t-\xi)} B_{cd}(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi + e^{\alpha t} D_{cd}(t) \tag{4.6}$$

กำหนดให้

$$\mathcal{W}_\alpha(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t C_c e^{A_\alpha\xi} B_c B_c^T e^{A_\alpha^T\xi} C_c^T d\xi; \qquad A_\alpha = A_c + \alpha I \tag{4.7}$$

เราสามารถคำนวณนอร์ม H_2 ได้โดยตรงจากนิยามของนอร์ม H_2 ในสมการที่ (4.1) จากผลเฉลยในสมการที่ (3.14) ดังนั้นจะได้นอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมดังนี้

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_s\|_{2,\alpha,\beta}^2 &= \operatorname{trace}\left\{\int_0^\tau \left(C_{c1\alpha}(t)\frac{X_{c\alpha}}{\tau}C_{c1\alpha}^T(t) + \mathcal{W}_\alpha(t)\right)dt\right\} \\ &+ \operatorname{trace}\left\{\int_0^\tau \left(C_{c1\alpha}(t) X_{d\alpha} C_{c1\alpha}^T(t) + \widetilde{\mathcal{D}}_c(t)\widetilde{\mathcal{D}}_c^T(t)\right)dt\right\} \\ &+ \operatorname{trace}\left\{C_{d2\beta}\frac{X_{c\beta}}{\tau}C_{d2\beta}^T\right\} + \operatorname{trace}\left\{C_{d2\beta} X_{d\beta} C_{d2\beta}^T + D_d D_d^T\right\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

โดย $X_{c\alpha}, X_{c\beta}$ และ $X_{d\alpha}, X_{d\beta}$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการลียาพูนอฟดังต่อไปนี้

$$\frac{X_{c\alpha}}{\tau} = \mathcal{A}_{d\alpha}\frac{X_{c\alpha}}{\tau}\mathcal{A}_{d\alpha}^T + \begin{pmatrix} \hat{W}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$X_{d\alpha} = \mathcal{A}_{d\alpha} X_{d\alpha} \mathcal{A}_{d\alpha}^T + \mathcal{B}_{d2\alpha}\mathcal{B}_{d2\alpha}^T \tag{4.10}$$

$$\frac{X_{c\beta}}{\tau} = \mathcal{A}_{d\beta}\frac{X_{c\beta}}{\tau}\mathcal{A}_{d\beta}^T + \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$X_{d\beta} = \mathcal{A}_{d\beta} X_{d\beta} \mathcal{A}_{d\beta}^T + \mathcal{B}_{d2}\mathcal{B}_{d2}^T \tag{4.12}$$

โดย $\mathcal{B}_{d2}$ และ $\hat{W}$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.36) และ (3.37) รวมทั้ง $\mathcal{A}_{d\beta} = \beta\mathcal{A}_d$,

$\mathcal{A}_{d\alpha} = e^{\alpha\tau}\mathcal{A}_{d}$, $\mathcal{B}_{d2\alpha} = e^{\alpha\tau}\mathcal{B}_{d2}$ และ $\hat{W}_{\alpha}$ มีลักษณะดังนี้

$$\hat{W}_{\alpha} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e^{A_\alpha \xi} B_c B_c^T e^{A_\alpha^T \xi} d\xi \tag{4.13}$$

กำหนดให้ $X_{s\alpha}$, $X_{s\beta}$ เป็นดังนี้

$$X_{s\alpha} := \frac{X_{c\alpha}}{\tau} + X_{d\alpha} \tag{4.14}$$

$$X_{s\beta} := \frac{X_{c\beta}}{\tau} + X_{d\beta} \tag{4.15}$$

จะได้ $X_{s\alpha}$, $X_{s\beta}$ เป็นผลเฉลยของสมการลียาพูนอฟดังนี้

$$X_{s\alpha} = \mathcal{A}_{d\alpha} X_{s\alpha} \mathcal{A}_{d\alpha}^T + \mathcal{B}_{d\alpha}\mathcal{B}_{d\alpha}^T; \quad \mathcal{B}_{d\alpha}\mathcal{B}_{d\alpha}^T = \begin{pmatrix} \hat{W}_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{d2\alpha}\mathcal{B}_{d2\alpha}^T \tag{4.16}$$

$$X_{s\beta} = \mathcal{A}_{d\beta} X_{s\beta} \mathcal{A}_{d\beta}^T + \mathcal{B}_{d\beta}\mathcal{B}_{d\beta}^T; \quad \mathcal{B}_{d\beta}\mathcal{B}_{d\beta}^T = \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{d2}\mathcal{B}_{d2}^T \tag{4.17}$$

เพื่อให้การพิจารณาง่ายขึ้น เราจะได้นอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมดังนี้

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_s\|_{2,\alpha,\beta}^2 &= \operatorname{trace}\left\{ \int_0^{\tau} \left(C_{c1\alpha}(t) X_{s\alpha} C_{c1\alpha}^T(t) + \widetilde{\mathcal{D}}_c(t)\widetilde{\mathcal{D}}_c^T(t) \right) dt \right\} + \operatorname{trace}\left\{ \int_0^{\tau} \mathcal{W}_{\alpha}(t)dt \right\} \\ &+ \operatorname{trace}\left\{ C_{d2\beta} X_{s\beta} C_{d2\beta}^T + D_d D_d^T \right\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

จากผลที่ได้ในสมการที่ (4.18) เราสามารถพิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูล โดยสร้างระบบในเวลาเต็มหน่วยสมมูล (equivalent discrete-time system) ที่รักษาค่าของนอร์ม H_2 ให้เท่าเดิม

ทฤษฎีที่ 4.1 พิจารณาระบบลูกผสม $\mathcal{T}_s$ ที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังในสมการที่ (3.29) และ (3.30) โดยนอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมที่ได้จากนิยามที่ 3.5 ที่สัมพันธ์กับนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่ได้จากนิยามที่ 4.1 จะได้ดังนี้

$$\|\mathcal{T}_s\|_{2,\alpha,\beta} = \|\mathcal{T}_d[z]\|_{2,\alpha,\beta} \tag{4.19}$$

โดย $\mathcal{T}_d[z]$ มีลักษณะดังนี้

$$\mathcal{T}_d[z]: \begin{cases} \bar{x}_d[k+1] = \overline{\mathcal{A}}_d \bar{x}_d[k] + \overline{\mathcal{B}}_d \bar{u}_d[k] \\ \bar{z}_d[k] = \overline{C}_d \bar{x}_d[k] + \overline{\mathcal{D}}_d \bar{u}_d[k] \end{cases} \tag{4.20}$$

โดย $\overline{\mathcal{A}}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{d\alpha} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{d\beta} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathcal{B}}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{d\alpha} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{d\beta} \end{pmatrix}$,

และ $\overline{C}_d = \begin{pmatrix} C_{d\alpha} & 0 \\ 0 & C_{d2\beta} \end{pmatrix}, \overline{\mathcal{D}}_d = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{D}}_{d\alpha} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & D_d \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \mathcal{D}_{d\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{D}_{d11\alpha} & \hat{D}_{d12\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ตัวแปรสถานะคือ $\bar{x}_d[k] = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_{d\alpha}^T[k] & \widetilde{x}_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$, สัญญาณเข้าคือ $\bar{u}_d[k] = \begin{pmatrix} u_{d\alpha}^T[k] & u_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$ และสัญญาณออกคือ $\bar{z}_d[k] = \begin{pmatrix} \widetilde{z}_{d\alpha}^T[k] & \widetilde{z}_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$ โดย $\mathcal{A}_d, \mathcal{A}_{d\beta}, \mathcal{B}_d, C_{d2\beta}$ หาได้จากสมการที่ (3.42) และ (4.2) ส่วนเมตริกซ์ $C_{d\alpha}$ และ $\hat{D}_{d11\alpha}$, $\hat{D}_{d12\alpha}$ จะพิจารณาดังต่อไปนี้คือ

- $\hat{B}_{d11\alpha} \in \mathcal{R}^{n_c \times n_c}$ ได้จากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้

$$\hat{B}_{d11\alpha} B_{d11\alpha}^T = \hat{W}_\alpha \tag{4.21}$$

- กำหนดให้

$$\widetilde{M}_\alpha := \int_0^\tau C_{c1\alpha}^T C_{c1\alpha}\, dt \tag{4.22}$$

โดยทำการแยกตัวประกอบ $\widetilde{M}_\alpha$ ได้ดังนี้

$$\widetilde{M}_\alpha := C_{d\alpha}^T C_{d\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{d11\alpha}^T \\ \hat{C}_{d12\alpha}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{d11\alpha} & \hat{C}_{d12\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

โดย $\hat{C}_{d11\alpha} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d)\times n_c}$ และ $\hat{C}_{d12\alpha} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d)\times n_d}$

- กำหนดให้ $\Delta_{1\alpha}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n_c \times n_c$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_{1\alpha}\Delta_{1\alpha}^T = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^t C_c e^{A_\alpha \xi} B_c B_c^T e^{A_\alpha^T \xi} C_c\, d\xi dt$$

จะได้ $\hat{D}_{d11\alpha} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d)\times n_c}$ ดังต่อไปนี้

$$\hat{D}_{d11\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta_{1\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\hat{D}_{d12\alpha} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d)\times m_d}$ เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\text{trace}\{\hat{D}_{d12\alpha}^T \widetilde{D}_{d12\alpha}\} = \text{trace}\{\int_0^\tau \widetilde{\mathcal{D}}_c^T(t)\widetilde{\mathcal{D}}_c(t)dt\}$$

- กำหนดให้ $\Delta_{2\alpha}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $m_d \times m_d$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_{2\alpha}^T \Delta_{2\alpha} = \text{trace}\{\int_0^\tau \widetilde{\mathcal{D}}_c^T(t)\widetilde{\mathcal{D}}_c(t)dt\}$$

จะได้ $\hat{D}_{d12\alpha} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d)\times m_d}$ ดังต่อไปนี้

$$\hat{D}_{d12\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta_{2\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\|\mathcal{T}_s\|_{2,\alpha,\beta} = \|\mathcal{T}_d[z]\|_{2,\alpha,\beta} = \text{trace}\{\overline{C}_d\overline{\mathcal{L}}_d\overline{C}_d^T + \overline{\mathcal{D}}_d\overline{\mathcal{D}}_d^T\} \tag{4.24}$$

โดย $\overline{\mathcal{L}}_d = \overline{\mathcal{A}}_d\overline{\mathcal{L}}_d\overline{\mathcal{A}}_d^T + \overline{\mathcal{B}}_d\overline{\mathcal{B}}_d^T$ ซึ่ง $\overline{\mathcal{L}}_d$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟ

ข้อสังเกต จากสมการที่ (4.16) และ(4.17) จะพบว่าโพลวงรอบปิด (closed-loop poles) ของเมตริกซ์ $\overline{\mathcal{A}}_d$ อยู่ ภายในวงกลมรัศมีขนาด $e^{-\alpha\tau}$ และ $\dfrac{1}{\beta}$ ตามลำดับ และถ้าต้องการให้โพลวงรอบปิดดังกล่าวอยู่ ภายในวงกลมขนาดเท่ากัน ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง α และ β ดังนี้ คือ $\alpha\tau = \ln\beta$ เป็นรัศมีของวงกลมขนาดใด ๆ

4.1.2 ทฤษฎีการสังเคราะห์

จากนิยามนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะที่แปรผันตามเวลา การสังเคราะห์มีข้อแตกต่างจากการวิเคราะห์ที่กล่าวไปแล้วข้างต้นตรงที่มีนอร์ม H_2 ของสัญญาณโดเมนเวลาต่อเนื่องเท่านั้น ทำให้ทฤษฎีการสังเคราะห์มีลักษณะคล้ายคลึงกับทฤษฎีการวิเคราะห์นอร์ม H_2 ในทฤษฎีที่ 4.1 ดังในทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 4.2 พิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูล Φ_s โดยสอดคล้องกับข้อกำหนดทั้ง 2 ข้อข้างต้น ซึ่งทำให้ตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้ระบบวงรอบปิด Φ_s มีเสถียรภาพ และสามารถให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุดกับระบบได้ก็ต่อเมื่อตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น (fictitious discrete-time plant) มีเสถียรภาพ ทั้งยังให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุดกับระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น $\Phi_d[z] := \sum_d\left(\widetilde{G}_{s\alpha}[z], K[z]\right)$ โดย $\widetilde{G}_{s\alpha}[z]$ มีลักษณะดังนี้

$$\widetilde{G}_{s\alpha}[z] : \begin{pmatrix} \widetilde{x}_d[k+1] \\ \widetilde{z}(k\tau) \\ \widetilde{y}(k\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{s\alpha} & B_{s1\alpha} & B_{s2\alpha}B_{d1} & B_{s2\alpha} \\ C_{s1\alpha} & D_{s11\alpha} & D_{s12\alpha}B_{d1} & D_{s12\alpha} \\ C_{s2} & 0 & D_{d21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_d[k] \\ w(k\tau) \\ w_d[k] \\ \widetilde{u}(k\tau) \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

โดย $A_{s\alpha}$, $B_{s1\alpha}$ และ C_{s2} สามารถหาได้จากสมการที่ (3.51) และ (3.54) แต่ใช้ $A_\alpha = A + \alpha I$ แทน A และ $B_{s2\alpha} = e^{\alpha\tau}B_{s2}$ ส่วนเมตริกซ์ $C_{s1\alpha}$, $D_{s11\alpha}$ และ $D_{s12\alpha}$ สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

- กำหนดให้

$$M_{s\alpha} := \int_0^\tau \begin{pmatrix} C_{1\alpha}^T(t) \\ C_{2\alpha}^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1\alpha}(t) & C_{2\alpha}(t) \end{pmatrix} dt \qquad (4.26)$$

โดย $C_{1\alpha}(t)$ และ $C_{2\alpha}(t)$ สามารถหาได้จากสมการที่ (4.26) และ(4.27) ดังต่อไปนี้

$$C_{1\alpha}(t) := C_1 e^{A_\alpha t} \qquad (4.27)$$

$$C_{2\alpha}(t) := C_1 \int_0^t e^{A_\alpha (t-\xi)} B_2 \mathcal{H}_\tau(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi + e^{\alpha t} D_{12} \mathcal{H}_\tau(t) \qquad (4.28)$$

และทำการแยกตัวประกอบ $M_{s\alpha}$ ให้มีลักษณะดังนี้

$$M_{s\alpha} := \begin{pmatrix} C_{s1\alpha}^T \\ D_{s12\alpha}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{s1\alpha} & D_{s12\alpha} \end{pmatrix} \qquad (4.29)$$

โดย $C_{s1\alpha} \in \mathcal{R}^{(n+m_2)\times n}$ และ $D_{s12\alpha} \in \mathcal{R}^{(n+m_2)\times m_2}$

- กำหนดให้ $\Delta_{1\alpha}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n\times n$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_{1\alpha}\Delta_{1\alpha}^T = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^t C_1 e^{A_\alpha \xi} B_1 B_1^T e^{A_\alpha^T \xi} C_1 d\xi dt$$

จะได้ $D_{s11\alpha} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ดังต่อไปนี้

$$D_{s11\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta_{1\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.30)$$

- ส่วนทฤษฎีการสังเคราะห์ของ $\widetilde{\mathcal{D}}_c(t)$ สามารถทำในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์นอร์ม H_2 โดย

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{c\alpha}(t) = C_{2\alpha}(t)\left(D_k D_{d21} + B_{d21}\right)$$

จากทฤษฎีที่ 4.2 เราสามารถสร้างกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สมมูลในสมการที่ (4.24) แทนกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องโดยค่านอร์ม H_2 ไว้เท่าเดิม ดังนั้นปริภูมิสถานะของระบบในเวลาเต็มหน่วยวงรอบปิด $\Phi_d[z]$ในรูปที่ 3.7 จะมีลักษณะดังนี้

$$\Phi_d[z]: \begin{cases} \widetilde{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d \widetilde{x}_d[k] + \mathcal{B}_d \widetilde{u}_d[k] \\ \widetilde{z}_{d\alpha}[k] = \widetilde{C}_{d\alpha}\widetilde{x}_d[k] + \widetilde{\mathcal{D}}_{d\alpha}\widetilde{u}_d[k] \end{cases}$$

โดย $\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} A_{s\alpha} + B_{s2\alpha} D_k C_2 & B_{s2\alpha} C_k \\ e^{\alpha\tau} B_k C_2 & e^{\alpha\tau} A_k \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} B_{s1\alpha} & B_{s2\alpha}\left(D_k D_{d21} + B_{d21}\right) \\ 0 & e^{\alpha\tau} B_d \end{pmatrix}$

$\widetilde{C}_{d\alpha} = \begin{pmatrix} C_{s1\alpha} + D_{s12\alpha} D_k C_2 & D_{s12\alpha} C_k \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{d\alpha} = \begin{pmatrix} D_{s11\alpha} & D_{s12\alpha}\left(D_k D_{d21} + B_{d21}\right) \end{pmatrix}$

และตัวแปรสถานะ$\widetilde{x}_d[k] = \begin{pmatrix} x^T(k\tau) & x_k^T[k] \end{pmatrix}^T$,สัญญาณเข้าคือ $\widetilde{u}_d[k] = \begin{pmatrix} w^T(k\tau) & w_d^T[k] \end{pmatrix}^T$

ดังนั้น

$$\|\Phi_d[z]\|_{2,\alpha,\beta} = \mathrm{trace}\{\widetilde{\mathcal{C}}_{d\alpha}\mathcal{L}_{d\alpha}\widetilde{\mathcal{C}}_{d\alpha}^T + \widetilde{\mathcal{D}}_{d\alpha}\widetilde{\mathcal{D}}_{d\alpha}^T\} \tag{4.31}$$

โดย $\mathcal{L}_{d\alpha} = \mathcal{A}_d\mathcal{L}_{d\alpha}\mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d\mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง $\mathcal{L}_{d\alpha}$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟ

เมื่อทฤษฎีการสังเคราะห์พิจารณาทั้งสัญญาณออกลูกผสมในรูปที่ 3.8 สามารถพิจารณาในทำนองเดียวกันกับในทฤษฎีที่ 4.2 โดยสร้างกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่มีค่านอร์ม H_2 สมมูลกับกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่อง จะได้ปริภูมิสถานะของระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วย $\Phi_d[z]$ ในรูปที่ 3.8 ดังนี้

$$\Phi_d[z] : \begin{cases} \bar{x}_d[k+1] = \overline{\mathcal{A}}_d\bar{x}_d[k] + \overline{\mathcal{B}}_d[k]\tilde{u}_d[k] \\ \bar{z}_d[k] = \overline{\mathcal{C}}_d\bar{x}_d[k] + \overline{\mathcal{D}}_d[k]\tilde{u}_d[k] \end{cases} \tag{4.32}$$

โดย

$$\overline{\mathcal{A}}_d = \begin{pmatrix} e^{\alpha\tau}\widehat{\mathcal{A}}_d & 0 \\ 0 & \beta\widehat{\mathcal{A}}_d \end{pmatrix}, \overline{\mathcal{B}}_d = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{B}}_{d\alpha} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{B}}_d \end{pmatrix}, \widehat{\mathcal{B}}_{d\alpha} = \begin{pmatrix} B_{s1\alpha} & e^{\alpha\tau}B_{s2}\widetilde{D}_{d12} \\ 0 & e^{\alpha\tau}\widetilde{B}_{d2} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathcal{C}}_d = \begin{pmatrix} C_{s1\alpha} + D_{s12\alpha}\widetilde{D}_{d11}C_{c2} & D_{s12\alpha}\widetilde{C}_{d1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\widetilde{D}_{d21}C_{c2} & \beta\widetilde{C}_{d2} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{D}}_d = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{d\alpha} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{D}_{d22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \widetilde{D}_{d\alpha} = \begin{pmatrix} D_{s11\alpha} & D_{s12\alpha}\widetilde{D}_{d12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

โดย $B_{s1\alpha}$, B_{s2}, $C_{s1\alpha}$, $D_{s12\alpha}$ หาได้จากทฤษฎีที่ 4.2

ตัวแปรสถานะคือ $\bar{x}_d[k] = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{d\alpha}^T[k] & \tilde{x}_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$, สัญญาณเข้าคือ $\bar{u}_d[k] = \begin{pmatrix} u_{d\alpha}^T[k] & u_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$ และสัญญาณออกคือ $\bar{z}_d[k] = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{d\alpha}^T[k] & \tilde{z}_{d\beta}^T[k] \end{pmatrix}^T$

ข้อสังเกต จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นพบว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมขนาดใด ๆ อยู่ที่จุด (0,0) เสมอ และถ้าต้องการเลื่อนวงกลมขนาดดังกล่าวให้มีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่งใด ๆ ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย โดยให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ ($-q$,0) และมีรัศมี r สามารถอ้างอิงได้จากบทความดังต่อไปนี้ เช่น Furuta และ Kim (1987) ที่ได้พิจารณาเฉพาะกฎการควบคุมสถานะป้อนกลับ (state feedback control law) ทั้งในกรณีของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยหรือ Haddad และ Bernstein (1992) ที่ได้ทำการออกแบบตัวควบคุมในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องสำหรับ การวางโพลในตำแหน่งใดนอกเหนือไปจากภายในวงกลม เป็นต้น

4.2 เมื่อมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

นิยามที่ 4.2

$$\left\|\begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix}\right\|_{2,\gamma} = \sqrt{\gamma^2 \|z_c(t)\|_2^2 + \|z_d[k]\|_2^2}, \quad \gamma > 0 \tag{4.33}$$

เป็นนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาระหว่างนอร์ม H_2 ของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อเนื่องและสัญญาณในเวลาเต็มหน่วย โดย γ เป็นค่าคงที่

4.2.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์

จากระบบลูกผสมในสมการที่ (3.29) และ(3.30) ตามลำดับ การคำนวณนอร์ม H_2 เริ่มจากการกำหนดให้ $C_{c1}(t),\ C_{d2}$ และ $\mathcal{D}_c(t)$ ในสมการที่ (3.31) และ (3.18) เป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} C_{c1\gamma}(t) \\ C_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma C_{cc}(t) & \gamma C_{cd}(t) \\ C_{ds} & C_d \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

โดย $C_{cc}(t),\ C_{cd}(t)$ ในสมการที่ (3.16) และ (3.17) ตามลำดับ

กำหนดให้ $\mathcal{W}_\gamma(t) = \gamma^2 \mathcal{W}(t)$ โดยหาได้จากสมการที่ (3.32) สามารถคำนวณได้โดยตรงจากนิยามของนอร์ม H_2 ในสมการที่ (3.28) จากผลเฉลยของสมการที่ (3.14) จะได้นอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมดังนี้

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_s\|_{2,\gamma}^2 &= \gamma^2 \operatorname{trace}\left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) \frac{X_c}{\tau} C_{c1}^T(t) + \mathcal{W}(t) \right) dt \right\} \\ &\quad + \gamma^2 \operatorname{trace}\left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) X_d C_{c1}^T(t) + \mathcal{D}_c(t) \mathcal{D}_c^T(t) \right) dt \right\} \\ &\quad + \operatorname{trace}\left\{ C_{d2} \frac{X_c}{\tau} C_{d2}^T \right\} + \operatorname{trace}\left\{ C_{d2} X_d C_{d2}^T + D_d D_d^T \right\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

และ $\dfrac{X_c}{\tau},\ X_d$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.34) และ(3.35) โดย $\hat{W}$ และ $\mathcal{B}_{d2}$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.36) และ (3.37) และกำหนดให้ X_s เป็นผลเฉลยของสมการลียาพูนอฟเหมือน ในสมการที่ (3.39)

เพื่อให้การพิจารณาง่ายขึ้น จะได้นอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมดังนี้

$$\|\mathcal{T}_s\|_{2,\gamma}^2 = \gamma^2 \text{trace}\left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) X_{s\gamma} C_{c1}^T(t) + \mathcal{D}_c(t)\mathcal{D}_c^T(t) \right) dt \right\} + \gamma^2 \text{trace}\left\{ \int_0^\tau \mathcal{W}(t) dt \right\}$$
$$+ \text{trace}\left\{ C_{d2} X_s C_{d2}^T + D_d D_d^T \right\} \quad (4.36)$$

จากผลที่ได้กล่าวมาแล้วเราสามารถพิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยสร้างระบบในเวลาเต็มหน่วยสมมูล (equivalent discrete-time system) ที่รักษาค่าของนอร์ม H_2 ให้เท่าเดิม

ทฤษฎีที่ 4.3 พิจารณาระบบลูกผสม $\mathcal{T}_s$ ที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังในสมการที่ (3.29) และ (3.30) นอร์ม H_2 ตามนิยามที่ 4.2 หาได้ดังนี้

$$\|\mathcal{T}_s\|_{2,\gamma} = \|\mathcal{T}_d[z]\|_{2,\gamma} \quad (4.37)$$

โดย $\mathcal{T}_d[z]$ มีลักษณะดังนี้

$$\mathcal{T}_d[z]: \begin{cases} \tilde{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d \tilde{x}_d[k] + \mathcal{B}_d u_d[k] \\ \tilde{z}_{d\gamma}[k] = \tilde{C}_{d\gamma} \tilde{x}_d[k] + \tilde{\mathcal{D}}_{d\gamma} u_d[k] \end{cases} \quad (4.38)$$

โดย $\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{d11} & \mathcal{A}_{d12} \\ A_{ds} & A_d \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} \hat{B}_{d11} & \mathcal{B}_{cd} \\ 0 & B_d \end{pmatrix}$, $\tilde{C}_{d\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma\hat{C}_{d11} & \gamma\hat{C}_{d12} \\ C_{ds} & C_d \end{pmatrix}$

และ $\tilde{\mathcal{D}}_{d\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma\hat{D}_{d11} & \gamma\hat{D}_{d12} \\ 0 & D_d \end{pmatrix}$

ตัวแปรสถานะคือ $\tilde{x}_d[k] = \begin{pmatrix} x_c^T(k\tau) & x_d^T[k] \end{pmatrix}^T$, สัญญาณเข้าคือ $u_d[k] = \begin{pmatrix} w_c^T(k\tau) & w_d^T[k] \end{pmatrix}^T$ และสัญญาณออกคือ $\tilde{z}_d[k] = \begin{pmatrix} z_c^T(k\tau) & z_d^T[k] \end{pmatrix}^T$ และ $\mathcal{A}_d$ และ $\mathcal{B}_{cd}$ หาได้จากสมการที่ (3.21) และ (3.37) ส่วนเมตริกซ์ $\hat{B}_{d11}$, $\hat{C}_{d11}$, $\hat{C}_{d12}$, $\hat{D}_{d11}$ และ $\hat{D}_{d12}$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.43), (3.44) และ (3.45)

ดังนั้น

$$\|\mathcal{T}_s\|_{2,\gamma} = \|\mathcal{T}_d[z]\|_{2,\gamma} = \text{trace}\left\{ \tilde{C}_{d\gamma} \mathcal{L}_{d\gamma} \tilde{C}_{d\gamma}^T + \tilde{\mathcal{D}}_{d\gamma} \tilde{\mathcal{D}}_{d\gamma}^T \right\} \quad (4.39)$$

โดย $\mathcal{L}_{d\gamma} = \mathcal{A}_d \mathcal{L}_{d\gamma} \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง $\mathcal{L}_{d\gamma}$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟ

4.2.2 ทฤษฎีการสังเคราะห์

จากนิยามนอร์ม H_2 ของสัญญาณลูกผสมที่มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีคุณลักษณะที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา การสังเคราะห์จะมีข้อแตกต่างจากการวิเคราะห์ที่กล่าวไปแล้วข้างต้นตรงที่จะมีนอร์ม H_2 ของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อเนื่องเท่านั้น โดยทฤษฎีการสังเคราะห์มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับทฤษฎีการวิเคราะห์นอร์ม H_2 ในทฤษฎีที่ 4.3 ดังในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 4.4 พิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูล Φ_s โดยสอดคล้องกับข้อกำหนดทั้ง 2 ข้อข้างต้น ซึ่งทำให้ตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้ระบบวงรอบปิด Φ_s มีเสถียรภาพ และสามารถให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุดกับระบบได้ก็ต่อเมื่อตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น (fictitious discrete-time plant) มีเสถียรภาพ ทั้งยังให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุดกับระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น $\Phi_d[z]:=\sum_d\left(\widetilde{G}_{s\gamma}[z],K[z]\right)$ โดย $\widetilde{G}_{s\gamma}[z]$ มีลักษณะดังนี้

$$\widetilde{G}_{s\gamma}[z]:\begin{pmatrix}\widetilde{x}_d[k+1]\\ \widetilde{z}(k\tau)\\ \widetilde{y}(k\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_s & B_{s1} & B_{s2}B_{d1} & B_{s2}\\ C_{s1\gamma} & D_{s11\gamma} & D_{s12\gamma}B_{d1} & D_{s12\gamma}\\ C_{s2} & 0 & D_{d21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{x}_d[k]\\ w(k\tau)\\ w_d[k]\\ u(k\tau)\end{pmatrix} \tag{4.40}$$

โดย A_s, B_{s1}, B_{s2} และ C_{s2} สามารถหาได้จากสมการที่ (3.51) และ(3.54) ส่วนเมตริกซ์ $C_{s1\gamma}$, $D_{s11\gamma}$ และ $D_{s12\gamma}$ สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

- กำหนดให้

$$M_{s\gamma}:=\int_0^\tau\begin{pmatrix}C_1^T(t)\\ C_2^T(t)\end{pmatrix}\gamma^2\left(C_1(t)\quad C_2(t)\right)dt \tag{4.41}$$

  โดย $C_1(t)$ และ $C_2(t)$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.56) และ (3.57) และทำการแยกตัวประกอบ $\widetilde{M}_{s\gamma}$ ให้มีลักษณะดังนี้

$$\widetilde{M}_{s\gamma}:=\begin{pmatrix}C_{s1\gamma}^T\\ D_{s12\gamma}^T\end{pmatrix}\left(C_{s1\gamma}\quad D_{s12\gamma}\right) \tag{4.42}$$

  โดย $C_{s1\gamma}\in\mathcal{R}^{(n+m_2)\times n}$ และ $D_{s12\gamma}\in\mathcal{R}^{(n+m_2)\times m_2}$

- กำหนดให้ $\Delta_{1\gamma}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n\times n$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_{1\gamma}\Delta_{1\gamma}^T=\frac{\gamma^2}{\tau}\int_0^\tau\int_0^t C_1e^{A\xi}B_1B_1^Te^{A^T\xi}C_1d\xi dt$$

จะได้ $D_{s11\gamma} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ดังต่อไปนี้

$$D_{s11\gamma} = \begin{pmatrix} \Delta_{1\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

- ส่วนการสังเคราะห์ของ $\widetilde{\mathcal{D}}_c(t)$ สามารถทำในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์นอร์ม H_2 คือ

$$\widetilde{\mathcal{D}}_c(t) = \gamma C_2(t)\left(D_k D_{d21} + B_{d21}\right)$$

จากทฤษฎีที่ 4.4 เราสามารถสร้างกระบวนในเวลาเต็มหน่วยที่สมมูลกับกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องโดยค่านอร์ม H_2 ไว้เท่าเดิม ดังนั้นปริภูมิสถานะของระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วย $\Phi_d[z]$ ในรูปที่ 3.7 จะมีลักษณะดังนี้

$$\Phi_d[z]:\begin{cases} \widetilde{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d \widetilde{x}_d[k] + \mathcal{B}_d \widetilde{u}_d[k] \\ \widetilde{z}_{d\gamma}[k] = \widetilde{C}_{d\gamma}\widetilde{x}_d[k] + \widetilde{\mathcal{D}}_{d\gamma}\widetilde{u}_d[k] \end{cases}$$

โดย $$\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} A_s + B_{s2}D_kC_2 & B_sC_k \\ B_kC_2 & A_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} B_{s1} & B_{s2}\left(D_kD_{d21} + B_{d21}\right) \\ 0 & B_d \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C}_{d\gamma} = \begin{pmatrix} C_{s1\gamma} + D_{s12\gamma}D_kC_2 & D_{s12\gamma}C_k \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{D}}_{d\gamma} = \begin{pmatrix} D_{s11\gamma} & D_{s12\gamma}\left(D_kD_{d21} + B_{d21}\right) \end{pmatrix}$$

และตัวแปรสถานะ $\widetilde{x}_d[k] = \begin{pmatrix} x^T(k\tau) & x_k^T[k] \end{pmatrix}^T$, สัญญาณเข้าคือ $\widetilde{u}_d[k] = \begin{pmatrix} w^T(k\tau) & w_d^T[k] \end{pmatrix}^T$ ดังนั้น

$$\left\|\Phi_d[z]\right\|_{2,\gamma} = \text{trace}\left\{\widetilde{C}_{d\gamma}\mathcal{L}_{d\gamma}\widetilde{C}_{d\gamma}^T + \widetilde{\mathcal{D}}_{d\gamma}\widetilde{\mathcal{D}}_{d\gamma}^T\right\} \tag{4.44}$$

โดย $\mathcal{L}_{d\gamma} = \mathcal{A}_d\mathcal{L}_{d\gamma}\mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d\mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง $\mathcal{L}_{d\gamma}$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟ

เมื่อทฤษฎีการสังเคราะห์พิจารณาทั้งสัญญาณออกลูกผสมในรูปที่ 3.8 สามารถพิจารณาในทำนองเดียวกันกับในทฤษฎีที่ 4.2 โดยสร้างกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่มีค่านอร์ม H_2 สมมูลกับกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่อง จะได้ปริภูมิสถานะของระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วย $\Phi_d[z]$ ในรูปที่ 3.8 ดังนี้

$$\Phi_d[z] : \begin{cases} \widehat{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d\widehat{x}_d[k] + \overline{\mathcal{B}}_d[k]\widetilde{u}_d[k] \\ \widehat{z}_{d\gamma}[k] = \widehat{C}_d\widehat{x}_d[k] + \mathcal{D}_d[k]\widetilde{u}_d[k] \end{cases} \tag{4.45}$$

โดย

$$\widehat{C}_d = \begin{pmatrix} C_{s1\gamma} + D_{s12\gamma}\widetilde{D}_{d11}C_{c2} & D_{s12\gamma}\widetilde{C}_{d1} \\ \widetilde{D}_{d21}C_{c2} & \widetilde{C}_{d2} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_d = \begin{pmatrix} D_{s11\gamma} & D_{s12\gamma}\widetilde{D}_{d12} \\ 0 & \widetilde{D}_{d22} \end{pmatrix}$$

และ B_{s1} , $\mathcal{A}_d$, B_{s2} หาได้จากสมการที่ (3.56)

4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องกับระบบชักตัวอย่างข้อมูล

พิจารณานอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสม เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ว่ามีความสัมพันธ์กับนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องอย่างไร ในการพิจารณาสามารถแบ่งเป็นประเภทของการพิจารณาได้ดังต่อไปนี้ เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์

- นอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมจะลู่เข้าสู่นอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง
- พารามิเตอร์ของทั้งกระบวนการและตัวควบคุมในเวลาเต็มหน่วยจะกลับคืนสู่พารามิเตอร์ในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

พิจารณาการเปลี่ยนสมการลียาพูนอฟในสมการที่ (3.46) ดังต่อไปนี้ ไปเป็น

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{A}_d\mathcal{L}_d\mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d\mathcal{B}_d^T \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_d\hat{\mathcal{L}}_d + \hat{\mathcal{L}}_d\hat{\mathcal{A}}_d^T + \tau\hat{\mathcal{A}}_d\hat{\mathcal{L}}_d\hat{\mathcal{A}}_d^T + \begin{pmatrix} B_{s1}B_{s1}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tau^2\hat{\mathcal{B}}_{d2}\hat{\mathcal{B}}_{d2}^T = 0 \tag{4.46}$$

โดยกำหนดให้

$$\hat{\mathcal{A}}_d = \frac{\mathcal{A}_d - I}{\tau}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{d2} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} B_{s2}\left(D_k D_{d21} + B_{d1}\right) \\ B_d \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{L}}_d = \mathcal{L}_d\tau \tag{4.47}$$

ดังนั้นเราสามารถทำการเปลี่ยนนอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมใหม่ได้ดังนี้

$$\left\|\Phi_d[z]\right\|_{2,n} = \text{trace}\left\{\frac{1}{\tau}\widetilde{C}_d\left(\mathcal{L}_d\tau\right)\widetilde{C}_d^T + \widetilde{\mathcal{D}}_d\widetilde{\mathcal{D}}_d^T\right\} \tag{4.48}$$

หรือ

$$\left\|\Phi_d[z]\right\|_{2,n} = \text{trace}\left\{\frac{1}{\tau}\widetilde{C}_d\widetilde{C}_d^T\hat{\mathcal{L}}_d + \widetilde{\mathcal{D}}_d\widetilde{\mathcal{D}}_d^T\right\} \tag{4.49}$$

เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ จะผลดังต่อไปนี้

- ผลของสัญญาณเข้ารบกวนในเวลาเต็มหน่วย $w_d[k]$ จะเข้าใกล้ศูนย์
- $\lim\limits_{\tau\to 0}\ \text{trace}\left(\widetilde{\mathcal{D}}_d\widetilde{\mathcal{D}}_d^T\right) \to 0$
- $\lim\limits_{\tau\to 0}\ \text{trace}\left(\dfrac{\mathcal{A}_d - I}{\tau}\right) \to \mathcal{A}_{dc}, \quad \lim\limits_{\tau\to 0}\ \tau\hat{\mathcal{B}}_{d2} \to 0$
- $\lim\limits_{\tau\to 0}\left(\dfrac{1}{\tau}\widetilde{C}_d\widetilde{C}_d^T\right) \to \widetilde{C}_{dc}\widetilde{C}_{dc}^T = \begin{pmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$
- $\lim\limits_{\tau\to 0}\left(B_{s1}B_{s1}^T\right) \to B_1B_1^T$
- $\lim\limits_{\tau\to 0}\left\|\Phi_d[z]\right\|_{2,n} \to \left\|\Phi_c(s)\right\|_2 = \text{trace}\left(\widetilde{C}_{dc}\hat{\mathcal{L}}_d\widetilde{C}_{dc}^T\right)$

และกำหนดให้ระบบวงรอบปิดในโดเมนเวลาต่อเนื่องมีลักษณะดังนี้

$$\Phi_c(s) : \begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \mathcal{A}_{dc}\widetilde{x}(t) + \mathcal{B}_{dc}\widetilde{u}(t) \\ \widetilde{z}(t) = \widetilde{C}_{dc}\widetilde{x}(t) + \widetilde{\mathcal{D}}_{dc}\widetilde{u}(t) \end{cases} \tag{4.50}$$

โดย $\quad \mathcal{A}_{dc} = \begin{pmatrix} A + B_2D_{kc}C_2 & B_2C_{kc} \\ B_{kc}C_2 & A_{kc} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{dc} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\widetilde{C}_{dc} = \begin{pmatrix} C_1 + D_{12}D_{kc}C_2 & D_{12}C_{kc} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{D}}_{dc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ตัวแปรสถานะคือ $\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x_d^T(t) \end{pmatrix}^T$, สัญญาณเข้าคือ $\widetilde{u}(t) = \begin{pmatrix} w^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix}^T$, สมการสถานะและสมการสัญญาณออกของตัวควบคุมเมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์มีลักษณะดังนี้

$$K(s) : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_{kc}x_d(t) + B_{kc}u(t) \\ z_d(t) = C_{kc}x_d(t) + D_{kc}\widetilde{u}(t) \end{cases} \tag{4.51}$$

ดังนั้น

$$\left\|\Phi_c(s)\right\|_2 = \text{trace}\left(\widetilde{C}_{dc}\hat{\mathcal{L}}_d\widetilde{C}_{dc}^T\right) \tag{4.52}$$

โดย $\quad \mathcal{A}_{dc}\hat{\mathcal{L}}_d + \hat{\mathcal{L}}_d\mathcal{A}_{dc}^T + \mathcal{B}_{dc}\mathcal{B}_{dc}^T = 0$ ซึ่ง $\hat{\mathcal{L}}_d$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟ

จะเห็นว่าการพิจารณาพารามิเตอร์ของทั้งกระบวนการและตัวควบคุมที่ได้กล่าวถึงข้างต้นนี้มีลักษณะที่แตกต่างไปจากพารามิเตอร์ที่ได้แสดงในทฤษฎีการสังเคราะห์นอร์ม H_2 ในบทที่ 3 โดยจะเห็นว่า พารามิเตอร์และนอร์ม H_2 ในสมการที่ (3.46) เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์จะได้ผลต่อไปนี้

- $\lim_{\tau \to 0} \operatorname{trace}\left(\widetilde{\mathcal{D}}_d \widetilde{\mathcal{D}}_d^T\right) \to 0$
- $\lim_{\tau \to 0} A_s \to I$
- $\lim_{\tau \to 0} \left(\widetilde{C}_d \widetilde{C}_d^T\right) \to 0$
- $\lim_{\tau \to 0} \left(B_{s1} B_{s1}^T\right) \to B_1 B_1^T$
- $\lim_{\tau \to 0} B_{s2} \to 0$
- $\lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}_d \to \infty$

แม้ว่านอร์ม H_2 ที่ได้จากการคำนวณในสมการที่ (3.46) เท่ากับนอร์ม H_2 ที่ได้จากการคำนวณในสมการที่ (4.49) เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ แต่การคำนวณในสมการที่ (4.49) จะให้ผลที่ดีกว่าคือ ลักษณะของพารามิเตอร์ทั้งกระบวนการและตัวควบคุมจะกลับคืนในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องซึ่งลักษณะดังกล่าวนี้ไม่สามารถนำกลับคืนมาได้ ถ้าใช้การคำนวณในสมการที่ (3.46)

ข้อสังเกต สมการลียาพูนอฟและพารามิเตอร์ในสมการที่ (4.46) และ(4.47) สามารถหาได้จากผลของการแปลงเดลต้า (Delta Transform) ซึ่งถูกเสนอ โดย Middleton และ Goodwin (1990) โดยสามารถพิจารณาทั้งระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยได้พร้อม ๆ กัน เช่น สมการลียาพูนอฟและพารามิเตอร์ในสมการที่ (4.46) และ (4.47) จะกลับคืนสู่ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องเมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นการพิจารณาระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้การแปลงเดลต้าควรจะให้ผลที่ดีกว่าการแปลง Z (Z-Transform) ในด้านของพารามิเตอร์ของทั้งกระบวนการที่ต้องการควบคุมและตัวควบคุมเชิงเลขที่ต้องการออกแบบ รวมทั้งสมการลียาพูนอฟที่สอดคล้องกับในโดเมนเวลาต่อเนื่องซึ่งไม่สามารถทำได้เมื่อใช้การแปลง Z

ในตอนท้ายของบทนี้จะพิจารณาระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้การแปลงเดลต้าซึ่งต่างจากเดิมที่พิจารณาเฉพาะการแปลง Z เท่านั้น และในตอนนี้จะกล่าวถึงแนวทางการศึกษาของระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลที่ได้วิจัยกันในปัจจุบัน โดยมีดังต่อไปนี้

ในการศึกษาระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลมีการศึกษาอยู่ 2 แนวทางด้วยกันคือ

1. พิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูลเมื่อประกอบด้วย สัญญาณเข้าทั้งในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วย แต่เมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ สัญญาณเข้าในเวลาเต็มหน่วยจะเป็นศูนย์ เนื่องจากทั้งความคลาดเคลื่อนในการควอน ไทซ์และที่เกิดการสะสมในการคำนวณเชิงเลขไม่มีผลต่อระบบ เมื่อระบบชักตัวอย่างข้อมูลกลับคืนสู่ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง จะเห็นได้จาก Khargonekar และ Sivashankar (1991) หรือ Hara et al. (1994) และวิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขสามารถทำได้เหมือนกับการออกแบบตัวควบคุมระบบในเวลาเต็มหน่วย

2. พิจารณาเมื่อมีเพียงสัญญาณเข้าในโดเมนเวลาต่อเนื่องเพียงอย่างเดียว ทำให้การพิจารณาระบบชักตัวอย่างกลายเป็นปัญหาเอกฐาน (Singular Problem) เสมอซึ่งก็คือเมตริกซ์ D_{21} เป็นศูนย์ โดยเห็นได้จาก Chen และ Francis (1991) หรือ Trentelman และ Stoorvogel (1995) และ Bamiah และ Pearson (1991) เป็นต้น ซึ่งทำให้การออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขมีลักษณะที่แตกต่างไปจากที่ได้กล่าวในบทที่ 2 เช่น การออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขที่มีอันดับของตัวควบคุมที่น้อยลงที่ได้เสนอโดย Hagiwara และ Araki (1996)

จากการพิจารณาในแนวทางที่หนึ่งจะสอดคล้องกับแนวทางที่สองเมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้เกิดปัญหาเอกฐาน (singular problem) ขึ้นเช่นกัน และเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องในการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขทั้งที่คาบการชักตัวอย่างเป็นศูนย์และมากกว่าศูนย์ จะพิจารณาเฉพาะเมื่อมีเพียงสัญญาณเข้าในโดเมนเวลาต่อเนื่องเพียงอย่างเดียว และการใช้ผลการแปลงเดลต้า (Delta Transform) กับนอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลและพัฒนาวิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขโดยอ้างอิงวิธีการของ Hagiwara และ Araki (1996) เพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาเอกฐานต่อไป

4.4 การพิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูลด้วยผลการแปลงเดลต้า

เริ่มจากการพิจารณาระบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned} \tag{4.53}$$

โดยตัวแปรสถานะมีมิติดังนี้ $x(t) \in \mathcal{R}^n$, สัญญาณควบคุมมีมิติดังนี้ $u(t) \in \mathcal{R}^m$ และสัญญาณออกมีมิติดังนี้ $y(t) \in \mathcal{R}^r$ โดยเมตริกซ์ A, B และ C เป็นเมตริกซ์คงที่

เมื่อพิจารณาระบบดังในสมการที่ (4.50) โดยใช้ตัวดำเนินการเดลต้า (Delta Operator) จะได้ผลดังต่อไปนี้และสำหรับรายละเอียดสามารถหาได้จาก Middleton และ Goodwin (1990)

$$\begin{aligned} \delta x[k] &= A_\delta x[k] + B_\delta u[k] \\ y[k] &= C\,x[k] \end{aligned} \tag{4.54}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} A_\delta &= \Omega A \\ B_\delta &= \Omega B \\ \Omega &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{At}\,dt \end{aligned} \tag{4.55}$$

และเมื่อใช้ตัวดำเนินการเดลต้า เราสามารถพิจารณาระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและในเวลาเต็มหน่วยได้พร้อม ๆ กันดังนี้

$$\begin{aligned} \rho x(t) &= A_\rho x(t) + B_\rho u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned} \tag{4.56}$$

โดยที่

$$A_\rho = \begin{cases} A & ;\tau = 0 \\ A_\delta & ;\tau > 0 \end{cases} \tag{4.57}$$

$$B_\rho = \begin{cases} B & ;\tau = 0 \\ B_\delta & ;\tau > 0 \end{cases} \tag{4.58}$$

$$\rho x = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & ;\tau = 0 \\ \delta x & ;\tau > 0 \end{cases} \tag{4.59}$$

การพิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยมีกระบวนการและตัวควบคุมเชิงเลขในโดเมนเดลต้า (Delta domain) ดังในสมการที่ (3.47) และ (4.56) ตามลำดับที่สามารถพิจารณาทั้งระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและระบบเวลาเต็มหน่วยมีดังนี้

$$K(\gamma):\begin{cases}\rho x_k(t) = A_k x_k(t) + B_k e_k(t)\\ v_k(t) = C_k x_k(t) + D_k e_k(t)\end{cases} \tag{4.60}$$

รวมทั้งสัญญาณค่าเข้าควบคุม $u(t)$ และสัญญาณเข้าของตัวควบคุมเชิงเลข $e_k(t)$ กำหนดให้ดังนี้

$$u(t) = H(t)v_k(t) \tag{4.61}$$

$$e_k(t) = S_\tau y(t) \tag{4.62}$$

โดยที่ $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$ (พิจารณาเฉพาะสัญญาณเข้าในโดเมนเวลาต่อเนื่องเท่านั้น)

ข้อกำหนดบางประการ เพื่อที่จะสามารถหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงรอบปิดของระบบลูกผสมมีเสถียรภาพ

- (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ (stablilizable) และ (A, C_2) สามารถตรวจวัดได้ (detectable)
- การเลือกช่วงการชักตัวอย่าง τ ทำให้ ($A_\rho, B_{\rho 2}$) สามารถทำให้เสถียรได้และ ($A_\rho, C_{\rho 2}$) สามารถตรวจวัดได้ โดย

$$A_\rho := \frac{1}{\tau}(e^{A\tau} - I), B_{\rho 2} := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} B_2 \mathcal{H}_\tau(\xi) d\xi,\ C_{\rho 2} := C_2 \tag{4.63}$$

เราสามารถพิจารณาทฤษฎีการสังเคราะห์นอร์ม H_2 สำหรับระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้ตัวปฏิบัติการเดลต้าในทำนองเดียวกับการทฤษฎีการสังเคราะห์นอร์ม H_2 ในบทที่ 3 ดังในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 4.5 พิจารณาระบบชักตัวอย่างข้อมูล Φ_s โดยสอดคล้องกับข้อกำหนดทั้ง 2 ข้อข้างต้นซึ่งทำให้ตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้ระบบวงรอบปิด Φ_s มีเสถียรภาพและสามารถให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะสมที่สุดกับระบบได้ก็ต่อเมื่อตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น (fictitious discrete-time plant) มีเสถียร

ภาพทั้งยังให้นอร์ม H_2 ที่เหมาะสมกับระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น $\Phi_\rho(\gamma) := \sum_\rho\left(\tilde{G}_\rho(\gamma), K(\gamma)\right)$ โดย $\tilde{G}_\rho(\gamma)$ มีลักษณะดังนี้

$$\tilde{G}_\rho(\gamma) : \begin{pmatrix} \rho\tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\rho & B_{\rho 1} & B_{\rho 2} \\ C_{\rho 1} & D_{\rho 11} & D_{\rho 12} \\ C_{\rho 2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

โดย $A_\rho, B_{\rho 2}$ และ $C_{\rho 2}$ สามารถหาได้จากสมการที่ (4.53) ส่วนเมตริกซ์ $B_{\rho 1}$, $C_{\rho 1}$, $D_{\rho 11}$ และ $D_{\rho 12}$ สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

- $B_{\rho 1} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ได้จากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้

$$B_{\rho 1}B_{\rho 1}^T = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{A\xi}B_1B_1^Te^{A^T\xi}d\xi \tag{4.65}$$

- กำหนดให้

$$M_\rho := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \begin{pmatrix} C_1^T(t) \\ C_2^T(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{pmatrix}dt \tag{4.66}$$

โดย $C_1(t)$ และ $C_2(t)$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.56) และ (3.57) โดยทำการแยกตัวประกอบ M_ρ ให้มีลักษณะดังนี้

$$M_\rho := \begin{pmatrix} C_{\rho 1}^T \\ D_{\rho 12}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{\rho 1} & D_{\rho 12} \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

โดย $C_{\rho 1} \in \mathcal{R}^{(n+m_2)\times n}$ และ $D_{\rho 12} \in \mathcal{R}^{(n+m_2)\times m_2}$

- กำหนดให้ Δ_1 เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n \times n$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_1\Delta_1^T = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_0^t C_1e^{A\xi}B_1B_1^Te^{A^T\xi}C_1d\xi dt$$

จะได้ $D_{\rho 11} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ดังต่อไปนี้

$$D_{\rho 11} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

จากทฤษฎีที่ 4.5 เราสามารถสร้างกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยโดยใช้โดเมนเดลต้า (delta domain) ที่สมมูลกับกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่ค่านอร์ม H_2 ยังเท่าเดิมและปริภูมิสถานะของระบบในเวลาเต็มหน่วยวงรอบปิด $\Phi_\rho(\gamma)$ มีลักษณะดังนี้

$$\Phi_\rho(\gamma): \begin{cases} \rho\tilde{x}_d(t) = \mathcal{A}_d\tilde{x}_d(t) + \mathcal{B}_dw(t) \\ \tilde{z}_d(t) = \tilde{\mathcal{C}}_d\tilde{x}_d(t) + \tilde{\mathcal{D}}_dw(t) \end{cases}$$

โดย $$\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} A_\rho + B_{\rho 2} D_k C_2 & B_{\rho 2} C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} B_{\rho 1} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\widetilde{C}_d = \begin{pmatrix} C_{\rho 1} + D_{\rho 12} D_k C_2 & D_{\rho 12} C_k \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{D}}_d = D_{\rho 11}$$

และตัวแปรสถานะคือ $\widetilde{x}_d(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x_k^T(t) \end{pmatrix}^T$

ดังนั้นจะได้

$$\left\| \Phi_\rho(\gamma) \right\|_2 = \mathrm{trace}\{ \widetilde{C}_d \mathcal{L}_d \widetilde{C}_d^T + \widetilde{\mathcal{D}}_d \widetilde{\mathcal{D}}_d^T \} \tag{4.69}$$

โดย $\mathcal{A}_d \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_d \mathcal{A}_d^T + \tau \mathcal{A}_d \mathcal{L}_d \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T = 0$ ซึ่ง $\mathcal{L}_d$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาพูนอฟที่ใช้ตัวดำเนินการเดลต้า

การออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขในโดเมนเดลต้าที่จะกล่าวถึงนี้มีลักษณะของอันดับ (order) น้อยกว่าอันดับของกระบวนการที่ต้องการควบคุมโดยต้องสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ และ ($A_\rho, B_{\rho 2}$) สามารถทำให้เสถียรได้
2. เมตริกซ์ $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ มีค่าลำดับชั้นของคอลัมน์เต็ม (full columm rank)
3. (C_2, A) สามารถตรวจวัดได้ และ ($C_{\rho 2}, A_\rho$) สามารถตรวจวัดได้
4. เมตริกซ์ $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$ มีค่าลำดับชั้นของแถวเต็ม (full row rank)

การออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขในโดเมนเดลต้าเริ่มจากการสมมุติให้ $C_2 = C_{\rho 2} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$ และสามารถแบ่งส่วน (partition) ของเมตริกซ์ $A_\rho, B_{\rho 2}$ และ $B_1 B_1^T$ ได้ดังต่อไปนี้

$$A_\rho = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{\rho 2} = \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{\rho 1} B_{\rho 1}^T = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

จะได้ตัวควบคุมเชิงเลขในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่เหมาะสม $K(\gamma)$ ที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \rho x_k(t) &= \widetilde{A} x_k(t) + \widetilde{B} u(t) - K y(t), \quad x_k(0) = 0 \\ v_k(t) &= F J x_k(t) - F L y(t) \end{aligned} \tag{4.71}$$

โดย

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= A_{11} + N A_{21}, \quad \widetilde{B} = B_{21} + N B_{22}, \\ K &= \widetilde{A} N - A_{12} - N A_{22} \\ J &= \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} N \\ -I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.72}$$

และจะได้ตัวแปรสถานะที่ได้จากการประมาณที่ใช้ในการป้อนกลับดังนี้

$$u(t) = F v_k(t) \tag{4.73}$$

โดยที่ F และ N หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F &= -\left(\tau B_{\rho 2}^{T} P B_{\rho 2} + D_{\rho 12}^{T} D_{\rho 12}\right)^{-1}\left(B_{\rho 2}^{T} P\left(I + \tau A_{\rho}\right) + D_{\rho 12}^{T} C_{\rho 1}\right) \\ N &= -\left(W_{12} + \left(I + \tau A_{11}\right) Z A_{21}^{T}\right)^{-1}\left(W_{22} + \tau A_{21} Z A_{21}^{T}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.74}$$

และ P และ Z สามารถหาได้จากผลเฉลยของสมการพีชคณิตริคคาติ (Algebraic Riccati equation) ซึ่งอยู่ภายใต้ตัวดำเนินการ $\mathrm{Ric}(\,)$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Ric}\left(\begin{pmatrix} I & \tau B_{\rho 2}\left(D_{\rho 12}^{T} D_{\rho 12}\right)^{-1} B_{\rho 2}^{T} \\ 0 & I + A_{\rho} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{\rho} & B_{\rho 2}\left(D_{\rho 12}^{T} D_{\rho 12}\right)^{-1} B_{\rho 2}^{T} \\ -C_{\rho 1}^{T} C_{\rho 1} & -A_{\rho}^{T} \end{pmatrix}\right) \\ Z &= \mathrm{Ric}\left(\begin{pmatrix} I & \tau A_{21}^{T}\left(W_{22}\right)^{-1} A_{21} \\ 0 & I + A_{11} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{11}^{T} & A_{21}^{T}\left(W_{22}\right)^{-1} A_{21} \\ -W_{11} & -A_{11} \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{4.75}$$

ข้อสังเกต จะพบว่าตัวควบคุมที่ต้องการออกแบบในสมการที่ (4.61) จะกลับสู่ตัวควบคุมในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องเมื่อคาบการชักตัวอย่างเข้าใกล้ศูนย์ ขณะที่กระบวนการที่ผ่านการแปลงสู่ในโดเมนเดลต้าก็กลับคืนสู่ในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องเช่นกัน และนอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลสามารถกลับคืนสู่นอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องด้วย และในตอนท้ายของบทที่ 5 ได้แสดงตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขด้วยการแปลงเดลต้าเพื่อให้มีความเข้าใจในการแปลงเดลต้ามากขึ้น