



ทฤษฎีการวิเคราะห์

2.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างของการวิจัยนี้ ได้นำเอาหลักการวิเคราะห์โดยวิธีของการเปลี่ยนตำแหน่งแบบการรวมสติเฟเนสโดยตรงซึ่งนิยมและเหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับคอมพิวเตอร์ และเป็นการพิจารณาการวิเคราะห์อันดับแรก ส่วนสมการสมดุลที่ใช้สำหรับการพิจารณาการเกิดจุดหมุนพลาสติก ได้มาจากความสัมพันธ์พื้นฐานทั่ว ๆ ไปซึ่งจะกล่าวถึงในรายละเอียดต่อไป

2.2 สมมติฐาน

2.2.1 ความสัมพันธ์ ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุ เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกโดยสมบูรณ์ (Elastic - Perfectly Plastic) คือไม่พิจารณาผลของความเครียดแข็งที่เพิ่มขึ้น (Strain Hardening) และผลของหน่วยแรงคงค้าง (Residual Stresses)

2.2.2 เป็นการศึกษาวิเคราะห์โครงเหล็กข้อแฉ่งในระนาบโดยที่ข้อต่อต่าง ๆ มีความแข็งแรงเพียงพอเพื่อรับการกระจายของแรง (Redistribution of Forces) ให้เป็นไปตามสัดส่วนของความแข็งแรงของทุกชิ้นส่วนที่จุดข้อต่อนั้น

2.2.3 แรงภายนอกที่กระทำต่อโครงเหล็กข้อแฉ่ง เป็นแรงสถิตย์ทั้งแบบเป็นจุด และแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ แล้วเพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนจนโครงข้อแฉ่งเกิดการวิบัติ

2.2.4 คำนึงถึงผลกระทบซึ่งกันและกัน ของแรงในแนวแกน แรงตัด แรงเฉือน ทั้งในรูปแบบของกำลัง และเสถียรภาพ

2.2.5 กำหนดให้ชิ้นส่วนขององค์อาคารตรง ความยาววัดตามแนวแกนศูนย์ของหน้าตัด ขณะที่โครงสร้างเกิดการเสียรูป ถือว่าความยาวของชิ้นส่วนไม่เปลี่ยนแปลง อันเป็นการพิจารณาแบบ Small Deformation Analysis of Elastic - Plastic

2.2.6 ขณะที่เพิ่มแรงกระทำมากขึ้นจนเกิดจุดหมุนพลาสติก ส่วนอื่นขององค์อาคารถือว่าเป็นพฤติกรรมเป็นแบบอิลาสติกอยู่

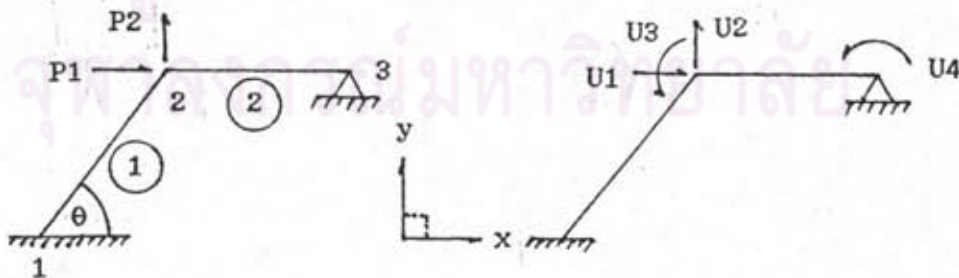
2.2.7 มีการป้องกันการเกิดการโค้งงอเฉพาะที่ (Local Buckling) การโค้งงอรวมด้านข้าง (Global Buckling) การบิดด้านข้าง (Twisting) ขององค์อาคาร

2.2.8 พิจารณาว่า ไม่มีการย้อนกลับ (Irreversible) ของจุดหมุนพลาสติก และถือว่าเป็นแนวแกนของชิ้นส่วนที่มีจุดหมุนพลาสติกคงที่ เมื่อเพิ่มแรงกระทำภายนอกจนโครงสร้างวิบัติ

2.3 การวิเคราะห์โครงสร้าง

การวิเคราะห์โครงสร้าง ได้นำวิธีการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Method) แบบรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้และเหมาะสมที่จะนำมาใช้ประยุกต์รวมกับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้เป็นอย่างดี สำหรับใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนตัวซึ่งมีราคาถูกลงและมีใช้แพร่หลายอยู่ทั่วไปในปัจจุบัน ดังต่อไปนี้

ก.) ความสัมพันธ์ของแรงภายนอกและการเปลี่ยนตำแหน่ง Ghali, A., and Neville (8) ในระบบรวมของโครงสร้าง (Global Coordinates) จะขอยกตัวอย่างของโครงสร้างตามรูปที่ 2.1 และรูปที่ 2.2 เพื่อใช้อธิบายได้ดังนี้



รูปที่ 2.1 แรงภายนอก (ในระบบรวม)

รูปที่ 2.2 ทิศทางการเปลี่ยนตำแหน่ง (ในระบบรวม)

จากรูปที่ 2.1 และรูปที่ 2.2 จะได้ความสัมพันธ์ของแรงภายนอกและการเปลี่ยนตำแหน่งคือ

$$\{P\} = [K]\{U\} \dots\dots\dots (2.1)$$

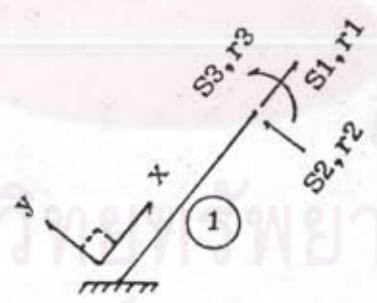
โดยที่

{P} คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกกระทำที่จุดข้อต่อ ค่าของแรงนี้จะมีค่าก็ได้ขึ้นอยู่กับแรงภายนอกจริงที่กระทำ สำหรับกรณีของโครงสร้างรูปที่ 2.1 จะมีค่าเป็น P1 , P2 เป็นต้น

[K] คือ Stiffness Matrix รวมของทุกชิ้นส่วนในโครงสร้าง (ซึ่งจะได้กล่าวถึงวิธีการหาค่าโดยละเอียดต่อไป)

{U} คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อ ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งจะมีจำนวนเท่ากับค่าความเป็นอิสระของโครงสร้าง ตามรูปที่ 2.2 จะมีทั้งหมด 4 ค่า คือ U1 , U2 , U3 , U4 เป็นต้น

ข.) การหาค่าของแรงภายในของแต่ละชิ้นส่วนในระบบเฉพาะที่ (Local Coordinates) เมื่อนำเอาชิ้นส่วนที่ 1 ของโครงสร้างรูปที่ 2.1 มาเขียนใหม่ตามรูปที่ 2.3 ได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 แรงภายในชิ้นส่วนและการเปลี่ยนตำแหน่ง (ในระบบเฉพาะที่)

จากรูปที่ 2.3 จะได้ความสัมพันธ์ของแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่ง คือ

$$\{S\}^m = [k_m]\{r\}^m \dots\dots\dots (2.2)$$

และ

$$\{r\}^m = [a_m]\{U\}^m \dots\dots\dots (2.3)$$

โดยที่

$\{S\}^m$ คือ เวกเตอร์ของแรงภายในของชิ้นส่วนใด ๆ เช่นกรณีของชิ้นส่วนย่อยที่ $m = 1$ ของรูปที่ 2.3 จะได้ค่าของแรงภายในเป็น S_1, S_2, S_3

$[k_m]$ คือ Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนย่อยที่ต้องการทราบค่าของแรงภายใน

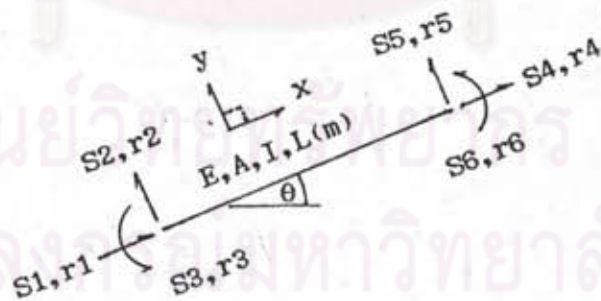
$\{r\}^m$ คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณาในระบบเฉพาะที่

$[a_m]$ คือ เมตริกซ์แปลงระบบที่สัมพันธ์กัน จากในระบบรวมไปเป็นในระบบเฉพาะที่ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของมุม θ

$\{U\}^m$ คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อต่อในระบบรวมที่สัมพันธ์กับชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณา เช่นกรณีของชิ้นส่วนย่อยที่ $m = 1$ ของรูปที่ 2.3 จะได้ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งที่สัมพันธ์กันตามรูปที่ 2.2 คือ U_1, U_2, U_3 เป็นต้น (โดยไม่รวม U_4)

$\{F_o\}^m$ คือ เวกเตอร์ของแรงยึดแน่น (Fixed End Force) ของชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณา

ค.) แสดงการหาค่าของ Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนย่อยใด ๆ ในระบบเฉพาะที่ จากสมการที่ (2.2) และตามรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ความสัมพันธ์ของแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อย

สามารถที่จะเขียนสมการ Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งคำนึงถึงทั้งผลของแรงในแนวแกน แรงเฉือน แรงดัด ที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่ง ได้ดังนี้

$$[k_m] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & 0 & -6/L^2 & 3/L \\ 3/L & 2+\alpha & 0 & -3/L & 1-\alpha \end{bmatrix} & \dots & \dots \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \begin{bmatrix} -6/L^2 & -3/L & 0 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & 1-\alpha & 0 & -3/L & 2+\alpha \end{bmatrix} & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots (2.4)$$

โดยที่

$$\alpha = 6EI/L^2 GA_p \dots (2.5)$$

L = ความยาวของชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณา (เมตร)

E = โมดูลัสยืดหยุ่น (2.10×10^7 ตัน/เมตร²)

I = ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด (เมตร⁴)

G = โมดูลัสเฉือน

$$= E/2(1+\nu) \quad (0.8 \times 10^7 \text{ ตัน/เมตร}^2)$$

เมื่อ ν = ค่าอัตราส่วนบีบของ (Poisson's Ratio)

$$= 0.3$$

A = พื้นที่หน้าตัดรวม (เมตร²)

A_p = พื้นที่ลดลงที่ใช้สำหรับคำนวณความเค้นเฉือน

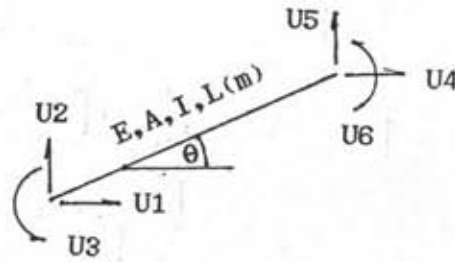
$$= A/\beta \quad (\text{เมตร}^2)$$

β = ตัวประกอบรูปร่าง

ในกรณีของเหล็ก WF

$$\text{ค่าของ } \beta = 1.14 \text{ เพราะฉะนั้น } A_p = A/1.14 = 0.877A$$

ง.) แสดงการหาค่าของ Stiffness Matrix ของแต่ละชิ้นส่วนในระบบรวมของโครงสร้าง ตามรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบรวมของชิ้นส่วนย่อย

ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนย่อยในระบบรวม ได้ดังนี้

$$[K]^m = [a_m]^T [k_m] [a_m] \dots\dots\dots (2.6)$$

โดยที่

$[K]^m$ คือ Stiffness Matrix ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยในระบบรวม

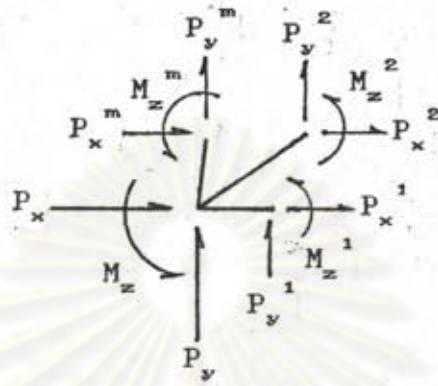
$[k_m]$ คือ Stiffness Matrix ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยในระบบเฉพาะที่ตามสมการที่ 2.4 ดังกล่าวแล้วข้างต้น

$[a_m]$ คือ เมตริกซ์แปลงระบบ (Transformation Matrix) ของชิ้นส่วนย่อยจากระบบรวมไปเป็นระบบเฉพาะที่ ดังนี้

$$[a_m] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.7)$$

θ คือ มุมที่กระทำของชิ้นส่วนย่อยในระบบเฉพาะที่ที่มีต่อระบบรวมเมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา

จ.) แสดงการหาค่าของ Stiffness Matrix รวมของโครงสร้างทั้งหมดในระบบรวม หรือเป็นการทำ Assembly Stiffness Matrix ของโครงสร้าง ตามรูปที่ 2.6 ได้ดังนี้



รูปที่ 2.6 นิยามของข้อต่อใดข้อต่อหนึ่งที่เป็นจุดร่วมกันของปลายชิ้นส่วน

นิยามที่สภาวะสมดุลย์ของข้อต่อที่ N จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$P_x = \sum_{m=1}^n P_x^m \dots\dots\dots (2.8)$$

$$P_y = \sum_{m=1}^n P_y^m \dots\dots\dots (2.9)$$

$$M_z = \sum_{m=1}^n M_z^m \dots\dots\dots (2.10)$$

เขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\begin{aligned} \{P\} &= \sum_{m=1}^n \{P\}^m \\ &= \sum_{m=1}^n [K]^m \{U\} \dots\dots\dots (2.11) \end{aligned}$$

เมื่อนำสมการที่ (2.11) ไปเปรียบเทียบกับสมการที่ (2.1) จะได้ว่า

$$[K] = \sum_{m=1}^n [K]^m \dots\dots\dots (2.12)$$

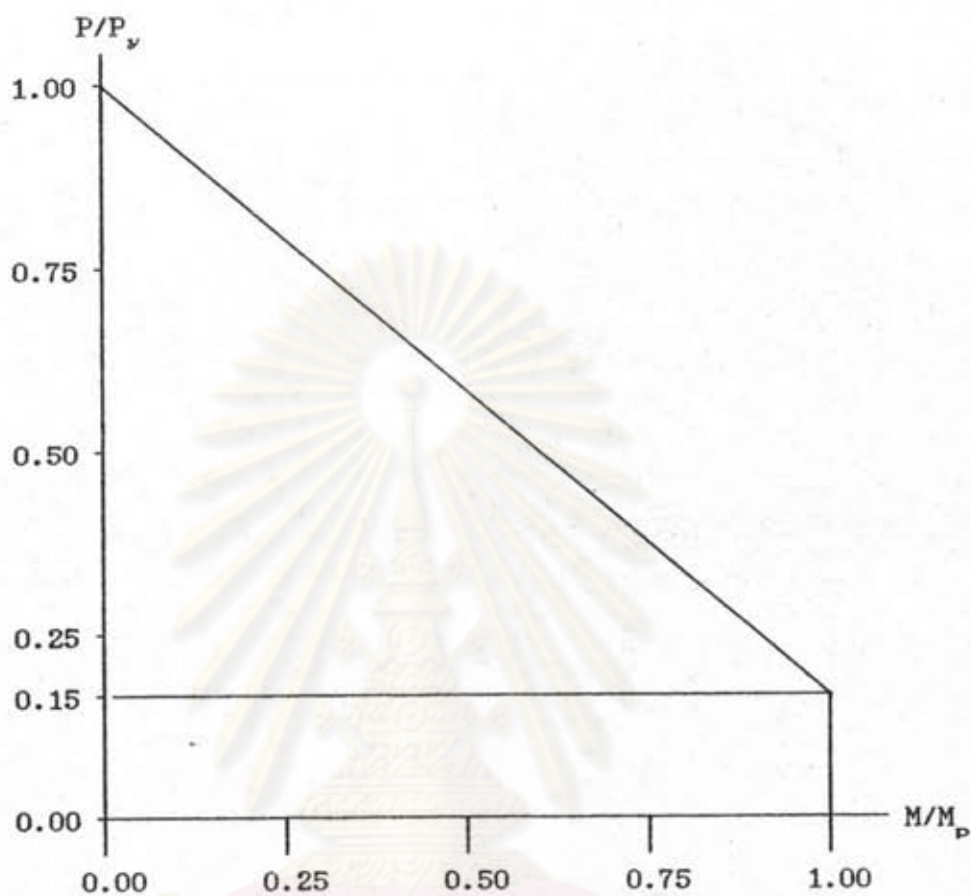
เมื่อ $[K]$ คือ การ Assembler ทุกชิ้นส่วนของ Stiffness Matrix รวมทั้งโครงสร้าง ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่งจริงภายนอกของทุกจุดข้อต่อในระบบรวมของโครงสร้าง

$[K]^m$ คือ Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนย่อยในระบบรวมซึ่งหาได้จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.6)

2.4 หลักการและวิธีทางอีลาสติก-พลาสติก

ความสัมพันธ์และสมการสมดลย์ที่ใช้

เป็นการนำเอาหลักการพื้นฐานทาง พลาสติก ของ AISC (1) ที่ได้กำหนดสมการสมดลย์ที่ใช้ในการออกแบบโดยวิธีพลาสติก ซึ่งสามารถที่จะนำมาเขียนเป็นความสัมพันธ์ในทอมไร้มิติ ระหว่างแรงในแนวแกนกับแรงดัดได้ตามกราฟรูปที่ 2.7 ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำหรับการเกิดจุดหมุนพลาสติก สำหรับหน้าตัด WF ได้ดังนี้



รูปที่ 2.7 กราฟเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติก

จากกราฟรูปที่ 2.7 นำมาเขียนเป็นความสัมพันธ์ของแรงโมเมนต์แกนและแรงตัดในทอม
ไรมิต โดยไม่คำนึงถึงผลของแรงเฉือนที่มีผลต่อการเกิดจุดหมุนพลาสติก (เพราะมีผลน้อยมาก
จึงไม่นำมาพิจารณาซึ่งสามารถตัดทิ้งไปได้) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{P}{P_v} + 0.85 \frac{M}{M_p} = 1.0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_v} > 0.15 \quad \dots \dots \dots (2.13)$$

$$\frac{M}{M_p} = 1.0 \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_v} \leq 0.15 \quad \dots \dots \dots (2.14)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 P &= \text{แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน} \\
 M &= \text{แรงดัดที่จุดใด ๆ ของชิ้นส่วนที่พิจารณา} \\
 P_y &= \text{แรงในแนวแกนเพียงอย่างเดียวที่ทำให้ชิ้นส่วนคลาก} \\
 &= F_y \cdot A \\
 F_y &= \text{กำลังคลากของวัสดุ} \\
 A &= \text{พื้นที่หน้าตัดรวมของชิ้นส่วน} \\
 M_p &= \text{พลาสติกโมเมนต์} \\
 &= F_y \cdot Z \\
 Z &= \text{พลาสติกโมดูลัสของหน้าตัด}
 \end{aligned}$$

จากหลักการของ Wang (2) นั้นในช่วงของการวิเคราะห์หาแรงภายในของชิ้นส่วน ไม่ได้คำนึงถึงผลกระทบของแรงในแนวแกนที่มีต่อเสถียรภาพของโครงสร้าง คือผลของ $P - \Delta$ ซึ่งในการวิจัยนี้จะพิจารณาถึงหลักการดังกล่าวด้วยดังนี้

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{(1 - P/P_{cr}) M_p} = 1.0 \quad \dots \dots \dots (2.15)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 P_{cr} &= \text{น้ำหนัก โด่งของชิ้นส่วน เป็นสัดส่วนกับความขรุขระเมื่อ ไม่มีแรงดัดกระทำร่วม} \\
 &= 1.7 F_n \cdot A \\
 F_n &= \text{หน่วยแรงที่ยอมให้ของวัสดุ} \\
 &= 12\pi^2 E / 23C^2 \quad \text{เมื่อ } C \geq C_c \\
 &= F_y \{1 - C^2 / 2C_c^2\} / F.S. \quad \text{เมื่อ } C < C_c \\
 F.S. &= 5/3 + 3C / (8C_c) - (C/C_c)^3 / 8 \\
 C_c &= (2\pi^2 E / F_y)^{1/2} \\
 C &= \text{อัตราส่วนความขรุขระ} \\
 &= kL/r
 \end{aligned}$$

- L = ความยาววัดตามแนวแกนของชิ้นส่วน
 P_0 = แรงของออยเลอร์ตามแนวแกน
 $= \pi^2 EA / (kL/r)^2$
 k = สัมประสิทธิ์ของความยาวประสิทธิผลขึ้นอยู่กับสภาพรองรับที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วน
 r = รัศมีจายเรชั่น
 C_m = สัมประสิทธิ์ตัวลดค่าของแรงคัตสำหรับ โครงข้อแข็งที่ไม่มีค้ำยัน
 $= 0.85$

อนึ่งค่าของ $1/(1-P/P_0)$ ในสมการที่ (2.15) เรียกว่าตัวคูณประกอบขยาย (Amplification Factor) เพื่อเพิ่มค่าของแรงคัตเนื่องจากผลของแรงโมเมนต์แกนกับค่าการโก่งตัว ซึ่งเป็นค่าที่ทำให้การพิจารณาเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติก แบบวิธีการวิเคราะห์ห้อนดับแรก ใกล้เคียงกับวิธีการวิเคราะห์ห้อนดับที่สอง

2.5 การคำนวณหาค่าตัวประกอบแรงภายนอก

การคำนวณหาค่าตัวประกอบแรงภายนอก จะเริ่มต้นจากการวิเคราะห์โครงเหล็กข้อแข็งซึ่งมีแรงภายนอกเบื้องต้นกระทำก่อน $\lambda(0) = 1.0$ (Unit Load) โดยวิธีทางอีลาสติกแล้วจากนั้นเราจะหาตัวประกอบแรงภายนอกที่น้อยที่สุด หรือ $\lambda(1)$ ซึ่งจะได้ค่าตัวประกอบแรงภายนอกสะสมเป็น $\lambda_c = \lambda(0) + \lambda(1)$ จากนั้นถ้านำไปคูณกับแรงภายนอกเริ่มต้นเดิม จะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกจุดแรกขึ้น ในกรณีที่แรงกระทำระหว่างชิ้นส่วน ค่าที่น้อยที่สุดอาจจะมีที่ปลายหรือจุดใดจุดหนึ่งระหว่างชิ้นส่วนก็ได้หลังจากนั้นก็กำหนดให้จุด ๆ นั้นเป็นจุดหมุนพลาสติกซึ่งจะไม่สามารถรับแรงเพิ่มขึ้นได้จากเดิม แต่ในรอบที่สองจะถือว่าจุดหมุนพลาสติกรับแรงเป็นศูนย์ในการวิเคราะห์เชิงอีลาสติก ต่อไปก็จะหาค่าตัวประกอบแรงภายนอกอีกตัวที่น้อยที่สุด $\lambda(2)$ ซึ่งเป็นค่าที่เมื่อนำไปรวมกับตัวประกอบแรงภายนอกสะสมเดิม $\lambda_c = \lambda(0) + \lambda(1) + \lambda(2)$ จากนั้นเมื่อนำไปคูณกับแรงภายนอกเดิมอีกจะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกจุดที่สองขึ้นในโครงเหล็กข้อแข็ง แล้วจะกระทำซ้ำเพื่อหาจุดหมุนพลาสติกอื่น ๆ จนกว่าโครงเหล็กข้อแข็งจะเกิดการวิบัติหรือมีการเสียรูปมากซึ่งได้อธิบายตามผังขั้นตอนในภาคผนวก ข.

จากสมการที่ (2.13), (2.14) เราสามารถจะคำนวณหาตัวประกอบแรงภายนอก จากความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกของแต่ละจุดใดๆ ในแต่ละชั้นส่วน แล้ว นำมาเขียนความสัมพันธ์เพื่อแสดงการหาค่าตัวประกอบแรงภายนอกในวงรอบที่พิจารณา ได้ดังนี้

$$\frac{|\lambda_j P_j + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i|}{P_v} + 0.85 \frac{|\lambda_j M_j + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i M_i|}{M_p} = 1.0 \dots (2.16)$$

เมื่อ $\frac{|\lambda_j P_j + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i|}{P_v} > 0.15$

$$\frac{|\lambda_j M_j + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i M_i|}{M_p} = 1.0 \dots (2.17)$$

เมื่อ $\frac{|\lambda_j P_j + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i|}{P_v} \leq 0.15$

จากสมการที่ (2.15) เราสามารถที่จะคำนวณหาตัวประกอบแรงภายนอกจากความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของแรงโมเมนต์และการโก่งตัวที่มีผลต่อค่าของแรงตัด ในแต่ละชั้นส่วนที่รับแรงอัด ได้ดังนี้

$$\frac{|\lambda_j P_j + \sum_{i=0}^{j-1} P_i|}{P_{cr}} + C_m \frac{|\lambda_j M_j + \sum_{i=0}^{j-1} M_i|}{P_u} = 1.0 \dots \dots \dots (2.18)$$

$$[1 - |(\lambda_j P_j + \sum_{i=0}^{j-1} P_i)/P_u|]$$

โดยที่ j = ตัวชี้บอกรอบของการพิจารณาการเกิดจุดหมุนพลาสติก
 λ_j = ค่าตัวประกอบแรงภายนอกที่ต้องการทราบค่า เพื่อทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกที่ j ซึ่งค่าที่น้อยที่สุดของแต่ละชั้นส่วน จะได้จากสมการ (2.16) , (2.17) หรือ สมการ (2.18) สมการใดสมการหนึ่ง

ส่วนค่า λ_j ที่น้อยที่สุดของโครงเหล็กข้อแฉ่งหาได้โดยเอา λ_j ของทุกชั้นส่วนมาเปรียบเทียบหาค่าที่น้อยที่สุดอีกทีหนึ่งจุดที่ให้ค่า λ_j น้อยที่สุดจะถือว่าจุดนั้นเกิดจุดหมุนพลาสติก (หลักการแก้สมการที่เป็นค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ดูได้จากภาคผนวก ค.)

P_j = ค่าของแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นจริง ในการวิเคราะห์ที่ก่อให้เกิดจุดหมุนพลาสติกที่ j ชั้นในแต่ละชั้นส่วนย่อย ซึ่งถือว่าคงที่ตลอดความยาวของชั้นส่วนนั้น

M_j = ค่าของแรงดัดที่เกิดขึ้นจริงในการวิเคราะห์ที่ก่อให้เกิดจุดหมุนพลาสติกจุดที่ j ชั้นในแต่ละชั้นส่วน และนำค่าที่สูงที่สุดมาพิจารณาโดยค่าแรงดัดที่สูงที่สุดอาจจะเกิดที่ตำแหน่งใด ๆ ของชั้นส่วนก็ได้

$\sum_{i=0}^{j-1} P_i$ = ค่าของแรงในแนวแกนรวมสะสมของทุกรอบ ก่อนที่จะเกิดจุดหมุนพลาสติกจุดที่ j

3-1

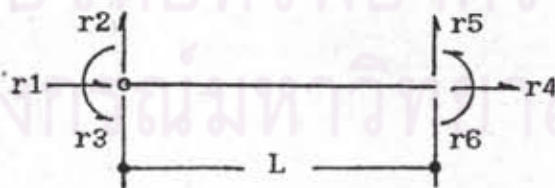
$\sum_{i=0} M_i =$ ค่าของแรงตัดที่เกิดขึ้นรวมสะสมของทุกรอบ ก่อนที่จะเกิดจุดหมุนพลาสติกจุดที่ j

จะพบว่าในแต่ละรอบของการเกิดจุดหมุนพลาสติกนั้น จะพิจารณาที่ปลายของแต่ละชิ้นส่วน และที่จุดระหว่างปลายทั้งสองข้างที่มีค่าแรงตัดสูงสุด เพราะว่าค่าของแรงในแนวแกนถือว่าคงที่ตลอด แล้วเปรียบเทียบค่าตัวประกอบแรงภายนอกของทุกชิ้นส่วนในโครงเหล็กข้อแฉ่งว่า ชิ้นส่วนย่อยอะไรให้ค่าตัวประกอบแรงภายนอกต่ำที่สุดของรอบที่พิจารณา

2.6 การเปลี่ยนแปลงของสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้น

เนื่องจากขณะที่เราทำการวิเคราะห์โครงเหล็กข้อแฉ่งหากการเกิดจุดหมุนพลาสติกในรอบต่อไปนั้นจะพบว่าการเกิดจุดหมุนพลาสติกทำให้ความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้นๆ เปลี่ยนไปนั้นย่อมหมายความว่าผลกระทบต่อการรับแรงต่าง ๆ ทั้งหมดของโครงเหล็กข้อแฉ่งไปด้วย จึงจำเป็นที่เราจะต้องพิจารณาเปลี่ยนแปลงค่าเมตริกซ์ความแข็งของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้น ให้สอดคล้องกับความเป็นจริงในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้น ๆ

2.6.1 เมตริกซ์ความแข็งของชิ้นส่วน ที่มีจุดข้อต่อทางซ้ายมือเป็นจุดหมุนพลาสติก (Left Plastic Hinge) และด้านขวามือยังสามารถรับการกระจายของแรงตัดได้ตามรูปที่ 2.8

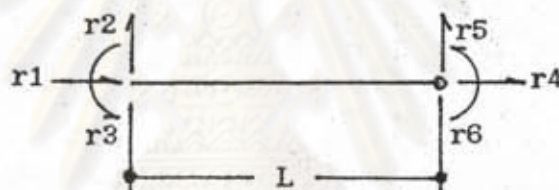


รูปที่ 2.8 ชิ้นส่วนที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดที่ข้อต่อทางซ้ายมือ

เมื่อพิจารณาผลของแรงในแนวแกน แรงตัด และแรงเฉือน ที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่ง ฉะนั้น สมการที่ (2.4) สามารถนำมาเขียนได้ใหม่ดังสมการ (2.19) คือ

$$[k_m] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & \frac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L^2 & 0 & 0 & -(3+6\alpha)/L^2 & (3+6\alpha)/L \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & \frac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \begin{bmatrix} -(3+6\alpha)/L^2 & 0 & 0 & (3+6\alpha)/L^2 & -(3+6\alpha)/L \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L & 0 & 0 & -(3+6\alpha)/L & (3+6\alpha) \end{bmatrix} & & & \end{bmatrix} \dots (2.19)$$

2.6.2 เมตริกซ์ความแข็งของชิ้นส่วน ที่มีจุดข้อต่อทางขวามือเป็นจุดหมุนพลาสติก (Right Plastic Hinge) และด้านซ้ายมือยังสามารถรับการกระจายของแรงคัตได้ตามรูปที่ 2.9

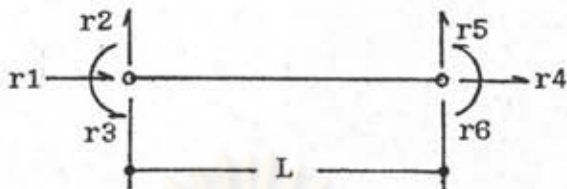


รูปที่ 2.9 ชิ้นส่วนที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดที่ข้อต่อทางขวามือ

เมื่อพิจารณาผลของแรงในแนวแกน แรงคัต และแรงเฉือน ที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่ง ฉะนั้นสมการที่ (2.4) สามารถนำมาเขียนได้ใหม่ดังสมการ (2.20) คือ

$$[k_m] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & \frac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L^2 & (3+6\alpha)/L & 0 & -(3+6\alpha)/L^2 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} (3+6\alpha)/L & (3+6\alpha) & 0 & -(3+6\alpha)/L & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & \frac{2EI/L}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} & \begin{bmatrix} -(3+6\alpha)/L^2 & -(3+6\alpha)/L & 0 & (3+6\alpha)/L^2 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ 0 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{bmatrix} \dots (2.20)$$

2.6.3 เมตริกซ์ความแข็งของชิ้นส่วนที่มีจุดข้อต่อทางขวามือและซ้ายมือ เป็นจุดหมุนพลาสติก (Both Plastic Hinge) ตามรูปที่ 2.10

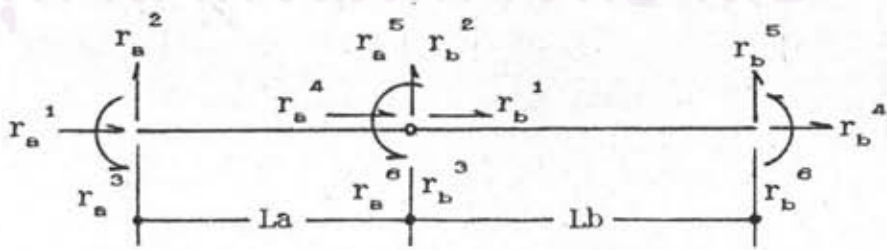


รูปที่ 2.10 ชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกที่จุดข้อต่อทั้งทางซ้ายมือและทางขวามือ

ฉะนั้นสมการที่ (2.4) สามารถนำมาเขียนได้ใหม่ดังสมการที่ (2.21) คือ

$$[k_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.21)$$

2.6.4 เมตริกซ์ความแข็งของชิ้นส่วนที่มีจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) อยู่ภายใน แต่ที่จุดข้อต่อทางซ้ายมือและขวามือยังสามารถรับการกระจายของแรงตัดได้ เมื่อพิจารณาผลของแรงโมเมนต์แกน แรงตัด และแรงเฉือน ที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่งด้วยจะทำได้โดยแบ่งให้ชิ้นส่วนย่อยนั้นเป็น 2 ส่วน ตามรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกอยู่ภายใน

โดยกำหนดให้ส่วนแรกมีความยาว = L_a ส่วนที่สองมีความยาว = L_b และสามารถที่จะกำหนดสภาพเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลายของชิ้นส่วนทั้งสองได้ 2 วิธี คือ วิธีแรก กำหนดให้ชิ้นส่วนที่ยาว = L_b มีจุดหมุนพลาสติกอยู่ทางซ้ายมือ และใช้ค่าสลิปเนสเมตริกซ์จากสมการที่ (2.19) ไปใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ สำหรับชิ้นส่วนที่ยาว = L_a จะได้จากการนำสมการที่ (2.4) มาเขียนได้ใหม่ตามสมการที่ (2.22) สำหรับวิธีที่สอง กำหนดให้ชิ้นส่วนที่ยาว = L_a มีจุดหมุนพลาสติกอยู่ทางขวามือ แล้วใช้ค่าสลิปเนสเมตริกซ์จากสมการที่ (2.20) ไปใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ ส่วนชิ้นส่วนที่ยาว = L_b จะได้จากสมการที่ (2.22) เช่นกัน ซึ่งแสดงสมการที่ (2.22) ได้ดังนี้

$$[k_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 6/L^2 & 3/L & 0 & -6/L^2 & 3/L \\ 3/L & 2+\alpha & 0 & -3/L & 1-\alpha \end{bmatrix} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} -6/L^2 & -3/L & 0 & 6/L^2 & -3/L \\ 3/L & 1-\alpha & 0 & -3/L & 2+\alpha \end{bmatrix} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.22)$$

2.7 พิจารณาความสัมพันธ์ของความยาวประสิทธิผล (k)

ในการพิจารณาใช้ค่าสัมพันธ์ของความยาวประสิทธิผล เพื่อหาค่าอัตราส่วนความขลุ่ย (Slenderness Ratio) และแรงของออยเลอร์ตามแนวแกน เพื่อนำไปใช้ในสมการที่ (2.18) นั้น ในกรณีที่เราจะพิจารณาว่าทั้งคานและเสาที่เป็นชิ้นส่วนแบบรับแรงอัดในแนวแกน (Compression Member) และเป็นโครงสร้างแบบขอมให้มีการเคลื่อนที่ตามแนวราบได้ (Sidesway Permitted) ซึ่งถือว่าการค้ำยันป้องกันการโก่งตัวด้านข้างอย่างเพียงพอ โดยใช้ค่าความยาวประสิทธิผล $k = 1$ ในกรณีที่ข้อต่อของชิ้นส่วนยึดกันแน่น และใช้ค่าความยาวประสิทธิผล $k = 2$ ในกรณีที่ปลายหนึ่งของข้อต่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้น และคิดเป็นกรณีพิเศษ ในกรณีที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นทั้งสองปลายของชิ้นส่วน ซึ่งจริง ๆ แล้วค่าของความยาวประสิทธิผลจะมีค่าสูงมากไปจนถึงอนันต์ ถ้าการเคลื่อนที่อิสระในแนวราบเกิดได้เต็มที่ แต่ในกรณีของโครงเหล็กข้อแฉ่งที่พิจารณานั้น จะมีการยึดรั้งของแต่ละชิ้นส่วนของโครงเหล็กข้อแฉ่งในแต่ละข้อต่อที่ยังไม่เกิดจุดหมุน

พลาสติก นั่นคือไม่ได้เกิดการเคลื่อนที่อิสระในแนวราบได้เต็มที่ ฉะนั้นในกรณีนี้ เราจะพิจารณาใช้ค่าความยาวประสิทธิผล $k = 10$ ซึ่งจะถือว่าสูงมากพอและสมเหตุสมผลตามที่กล่าวแล้วข้างต้น

อนึ่งการหาค่าความยาวประสิทธิผลเฉพาะกรณีของคานที่เป็นแรงอัดตามที่กล่าวข้างต้น แม้จะไม่ถูกต้องมากนัก แต่ค่าของความยาวประสิทธิผลเองก็มีความสำคัญไม่มากต่อการหาค่าตัวประกอบแรงภายนอกตามสมการที่ (2.18) เพราะค่าตัวประกอบแรงภายนอกที่น้อยที่สุดที่คานตัวใดตัวหนึ่งจะมีโอกาสเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้น โดยหลักจริง ๆ ของคานแล้วส่วนใหญ่ตัวประกอบแรงภายนอกจะได้จากสมการที่ (2.16) และ (2.17) เกือบทุกค่าซึ่งเป็นเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกอื่นเนื่องมาจากผลของแรงดัดเป็นส่วนใหญ่

2.8 การตรวจสอบความมีเสถียรภาพของโครงสร้าง

เมื่อโครงเหล็กข้อแฉ่งรับแรงเพิ่มขึ้น จะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกเพิ่มมากขึ้น แล้วจะทำให้โครงสร้างเกิดการวิบัติ โดยสามารถตรวจสอบได้ดังนี้

1. ค่าของเมตริกซ์สตีเฟนสรวมของโครงสร้างมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากการเกิดจุดหมุนพลาสติกมีค่ามากพอ หรือเป็น Singular Matrix { Determinant $|K| = 0$ }

ในกรณีของการวิเคราะห์โครงสร้างที่มี Stiffness Matrix เป็นแบบสมมาตรแล้ว จะได้ว่าค่าของเทอมใดเทอมหนึ่งในแนวทแยงเป็นศูนย์

2. ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่ามาก ตามสมมติฐานของความสัมพันธ์ของหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุที่เป็นอีลาสติกและพลาสติก โดยสมบูรณ์ นั่นคือหลังจากเกิดจุดหมุนพลาสติกแล้ว โครงสร้างจะไม่สามารถรับแรงเพิ่มขึ้น ในขณะที่การเปลี่ยนตำแหน่งเพิ่มค่ามากขึ้นได้อย่างไม่จำกัด

2.9 คุณลักษณะพิเศษของวิธีการทางอีลาสติก-พลาสติก

ในการวิเคราะห์โครงเหล็กข้อแฉ่งใด ๆ จะพบว่า ถ้ามีการเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นตามสมการที่ (2.13) นั้น ไม่ว่าจะเกิดที่ส่วนใดของชิ้นส่วนก็ตาม การวิเคราะห์ในรอบต่อ ๆ ไปตามความเป็นจริงแล้วชิ้นส่วนนั้นไม่สามารถจะเพิ่มแรงในแนวแกนได้อีกแล้ว เพราะจะทำให้สมการที่

- (2.13) มีค่ามากกว่าหนึ่งและไม่เป็นจริง ส่วนในกรณีที่เกิดจุดหมุนพลาสติกตามสมการที่ (2.14) นั้นค่าของ P/P_y ไม่มากกว่า 0.15 ซึ่งในกรณีที่ชิ้นส่วนสามารถเพิ่มแรงโมเมนต์แกนได้อีกแต่จะต้องไม่เกิน 0.15 อันเป็นเงื่อนไขของสมการที่ (2.14) คือ $M/M_p = 1.0$ เมื่อ $P/P_y \leq 0.15$ และในงานวิจัยนี้เราจะทำให้แรงโมเมนต์แกนของชิ้นส่วนย่อยที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นคงที่ตลอดการวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กข้อแฉ่งเพื่อหาจุดหมุนพลาสติกในรอบต่อ ๆ ไป

ในกรณีที่มีการเกิดจุดหมุนพลาสติก 2 จุดขึ้นไปในชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งนั้น เราสามารถที่จะถือเสมือนว่าในรอบต่อ ๆ ไปของการวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กข้อแฉ่งนั้นไม่มีชิ้นส่วนนี้ด้วยเลยเพราะว่าจากสมการ (2.21) คือกรณีที่เกิดจุดหมุนพลาสติก 2 จุด จะมีค่าของแรงโมเมนต์ต่าง ๆ เป็นศูนย์ทั้งหมดซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่า หลักการของอิลาสติก-พลาสติก ที่กล่าวข้างต้นเราไม่สามารถจะเพิ่มแรงอีกต่อไปได้ หลังจากเกิดจุดหมุนพลาสติก 2 จุดในชิ้นส่วนเดียวกันซึ่งจะเป็นค่าที่ถูกต้องตามเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติก

จากคุณลักษณะที่กล่าวมานั้นจะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์หาค่าของน้ำหนักบรรทุกสูงสุดในแต่ละขั้นตอนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกอยู่ในขั้นที่ยอมรับได้ ประกอบกับมีการนำเอาผลของแรงโมเมนต์แกนที่มีผลต่อเสถียรภาพของโครงสร้าง และค่านึงถึงผลของ $P-\Delta$ ตามสมการที่ (2.15) จะพบว่าค่าที่ได้จะเป็นไปตามทฤษฎีขอบเขตล่าง (Lower Bound Theorem) ของวิชีพลาสติกทั่วไปอีกด้วย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย