

## บทที่ 2

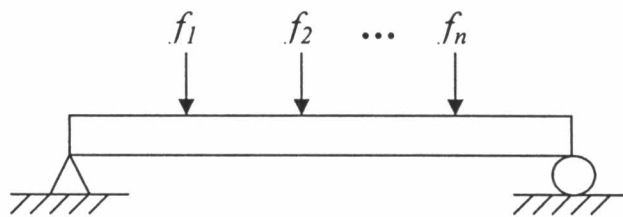
### หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

แรงที่ยานพาหนะกระทำต่อสะพานเป็นข้อมูลที่สำคัญสำหรับการออกแบบสะพาน เพราะจะนำมาใช้ในการพิจารณาน้ำหนักจร (live load) และปัจจัยการกระแทก (impact factor) ที่ใช้ในมาตรฐานการออกแบบสะพาน การวัดแรงดังกล่าวโดยตรงด้วยการใช้เครื่องมือที่ติดตั้งไว้กับรถจะเสียค่าใช้จ่ายสูงส่วนการบังคับให้รถวิ่งเข้าด่านชั่งน้ำหนักก็ไม่สะดวกและมีความเอนเอียง (bias) ในการเก็บข้อมูล ในขณะที่ผลที่ได้จากการคำนวณจากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ก็มีความผิดพลาดเนื่องจากแบบจำลองที่คลาดเคลื่อน ดังนั้นระบบการชั่งน้ำหนักรถในขณะที่รถวิ่งในสภาพปกติ ซึ่งเรียกว่าระบบ Weigh-In-Motion หรือ WIM จึงถูกนำมาใช้ วิธีต่าง ๆ ที่ได้พัฒนาขึ้นมาสำหรับระบบ WIM โดยทั่วไปจะวัดเฉพาะน้ำหนักรถทางสถิตเท่านั้น เทคนิคที่ใช้ในการหาแรงกระทำของรถจากปฏิกิริยาตอบสนองของการสั่นไหวของสะพานซึ่งมีลักษณะเป็นแรงเชิงพลศาสตร์นั้นจึงมีความจำเป็น โดยตัวแปรต่าง ๆ ของสะพานและของรถจะถูกนำมาคิดรวมด้วยสำหรับปฏิกิริยาตอบสนองที่ถูกวัด ซึ่งค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับวิธีนี้จะมีค่าน้อยกว่าการวัดโดยตรง

#### 2.1 การสั่นไหวของสะพานภายใต้แรงกระทำแบบเคลื่อนที่

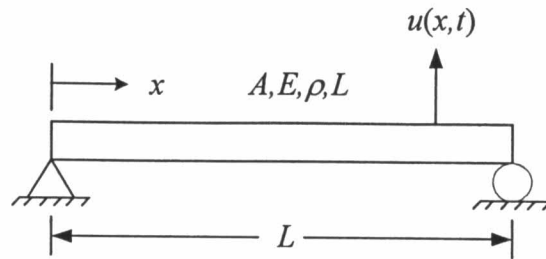
พิจารณาโครงสร้างสะพานรับแรงกระทำแบบจุด (Point load) เคลื่อนที่ผ่านดังแสดงในรูปที่ 2.1 ซึ่งการสั่นไหวของสะพานสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยหลายวิธีเช่น วิธีเชิงโหมด (Modal Method) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) และวิธีการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และทำการวิเคราะห์รูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปของสเปซสเตท (state-space representation) และทำการแก้ปัญหาด้วยการใช้ทรานซิชันเมตริกซ์ (transition matrix)

โดยลักษณะของแรงกระทำต่อสะพานนั้น จะทำการสมมติให้แรงกระทำจากเพลารถบรรทุกกระทำต่อสะพานเป็นแรงที่มีลักษณะแบบจุด (point load)  $f_i$  ตามจำนวนเพลารถ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



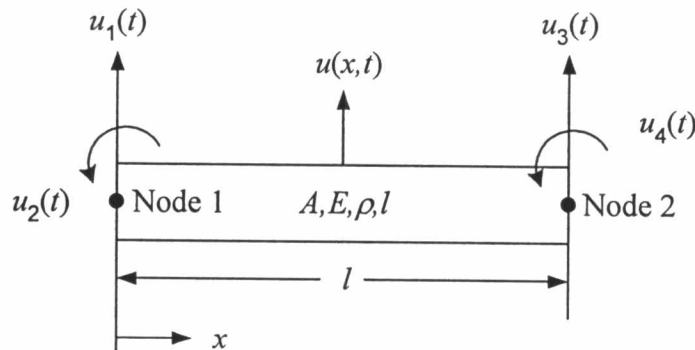
รูปที่ 2.1 ลักษณะโครงสร้างสะพานที่รับแรงกระทำแบบจุด

2.1.1 การจำลองสะพานด้วยชิ้นส่วนคาน



รูปที่ 2.2 แบบจำลองคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี

พิจารณาโดยใช้แบบจำลองคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี ดังรูปที่ 2.2 และใช้หลักการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการจำลองรูปแบบคาน ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.3 โดยที่  $A$  คือ พื้นที่หน้าตัดของคาน  $E$  คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของคาน  $\rho$  คือ มวลต่อหน่วยความยาวของคาน  $l$  คือ ความยาวของชิ้นส่วนคาน ซึ่งแต่ละชิ้นส่วนของคานจะประกอบด้วย 2 ข้อ (node) และแต่ละข้อของชิ้นส่วนคานจะมี 2 ระดับขั้นความอิสระคือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง และการเปลี่ยนตำแหน่งในการหมุน



รูปที่ 2.3 แบบจำลองชิ้นส่วนของคาน

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของชิ้นส่วนคานที่ระยะทาง  $x$  และเวลา  $t$  ใดๆ จะต้องสอดคล้องตามสมการ (2.1)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{2.1}$$

สำหรับในกรณี  $EI$  มีค่าคงที่ สมการ (2.1) จะกลายเป็น  $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0$  ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$u(x,t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \tag{2.2}$$

โดยที่  $c_i(t)$  คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต

สมการ (2.2) สามารถใช้ในการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวตั้งของชิ้นส่วนคานได้ ซึ่งมีเงื่อนไขที่ขอบ (boundary condition) ดังนี้

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1(t) & u(l,t) &= u_3(t) \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u_2(t) & \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= u_4(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เมื่อแทนลงในสมการ (2.2) จะสามารถหาค่าคงที่ของการอินทิเกรตได้ คือ

$$\begin{aligned} c_4(t) &= u_1(t) \\ c_3(t) &= u_2(t) \\ c_2(t) &= \frac{1}{l^2} [3(u_3 - u_1) - l(2u_2 + u_4)] \\ c_1(t) &= \frac{1}{l^3} [2(u_1 - u_3) - l(u_2 + u_4)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

แทนสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.2) และทำการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในเทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงขั้ว (nodal displacement) จะได้สมการการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคานที่ระยะ  $x$  และเวลา  $t$  ใดๆ ดังนี้

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[ 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right] u_1(t) + l \left[ \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] u_2(t) \\ &+ \left[ \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right] u_3(t) + l \left[ -\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] u_4(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า  $u_i(t)$  คือฟังก์ชันประมาณ (shape function) ของการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนคาน

เมตริกซ์มวล (mass matrix) ของชิ้นส่วนคานสามารถคำนวณได้จากการแทนสมการ (2.5) ลงไปในสมการของพลังงานจลน์

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.6)$$

และสมการ (2.51) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.7)$$

โดยที่  $\mathbf{M}$  คือ เมตริกซ์มวล (mass matrix) และเวกเตอร์  $\dot{\mathbf{u}}$  คือ อนุพันธ์ของเวกเตอร์  $\mathbf{u}(t)$  เทียบกับเวลาซึ่งเวกเตอร์  $\mathbf{u}(t)$  สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

หลังจากทำการอินทิเกรตและจัดรูปแบบเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ข้อ (nodal displacement) จะได้เมตริกซ์มวลสำหรับชิ้นส่วนคานดังนี้

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาเมตริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix) ได้จากการแทนสมการ (2.50) ลงในสมการพลังงานความเครียด (strain energy) ซึ่งกำหนดโดย

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2.10)$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.11)$$

โดยที่  $\mathbf{u}$  ได้กำหนดไว้ข้างต้น ดังนั้นเมตริกซ์สติเฟนของชิ้นส่วนคาน คือ

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

เมื่อเราได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติเฟนของแต่ละชิ้นส่วนคานแล้ว เราจะรวม (assembly) ชิ้นส่วนคานแต่ละชิ้นส่วนเข้าด้วยกันตามองศาความอิสระที่ตรงกัน ซึ่งจะได้เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์สติเฟนของระบบ

### 2.1.2 การหาเมตริกซ์ความหน่วง (damping matrix) ของระบบ

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

เมื่อเรานำ  $\mathbf{M}^{-1}$  คูณตลอดสมการ (2.13) จะได้

$$\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{โดยที่ } \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

$$\text{กำหนดให้ } \mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{q} \quad (2.15)$$

โดยที่  $\mathbf{V}$  คือ โไอเกนเวคเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์  $\bar{\mathbf{K}}$

แทนสมการ (2.15) ลงใน (2.14) และคูณตลอดด้วย  $\mathbf{V}^{-1}$  จะได้

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{V}\mathbf{q} = 0 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = 0 \quad (2.17)$$

โดยที่

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{V}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{V}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$\xi_i$  คือ สัดส่วนความหน่วง (damping ratio) ของโหมดที่  $i$

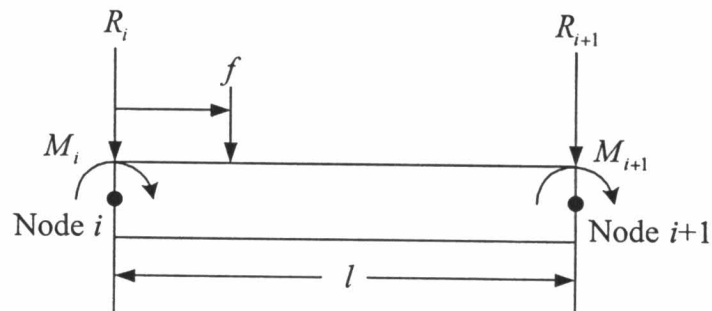
$\omega_i$  คือ ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโหมดที่  $i$

เมื่อเราทราบค่า  $\xi_i$  และ  $\omega_i$  แล้ว ก็จะสามารถหาเมตริกซ์  $\bar{\mathbf{C}}$  และ  $\mathbf{C}^*$  ได้ ดังนี้

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{V}\mathbf{C}^*\mathbf{V}^{-1} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{C}} \quad (2.21)$$

### 2.1.3 การหาแรงที่ข้อต่อจากแรงภายนอกที่มากกระทำ



รูปที่ 2.4 แสดงแรงที่ข้อต่อเนื่องจากแรงภายนอกที่มากกระทำ

เมื่อมีแรงภายนอก  $f$  มากระทำบนชิ้นส่วนคาน 2 มิติ ที่มีความยาวเท่ากับ  $l$  ระหว่างข้อที่  $i$  กับข้อที่  $i+1$  ที่ระยะ  $x$  จากปลายซ้าย แรงที่ข้อที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนคานสามารถแสดงได้ดังนี้

$$R_i = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_i = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) f$$

$$R_{i+1} = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) f$$

$$M_{i+1} = \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right) f \quad (2.22)$$

โดยที่  $R_i, R_{i+1}$  คือ แรงที่ข้อในแนวตั้ง ของข้อที่  $i$  และ  $i+1$  ของโครงสร้างตามลำดับ  
 $M_i, M_{i+1}$  คือ โมเมนต์ดัด ของข้อที่  $i$  และ  $i+1$  ของโครงสร้างตามลำดับ

แรงที่ข้อดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ได้ คือ

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}(x) \cdot f_i \quad (2.23)$$

โดยที่  $\mathbf{P}$  คือ เวกเตอร์ของแรงที่ข้อ (nodal force vector)  
 $\mathbf{Y}(x)$  คือ เวกเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ข้อ

สำหรับกรณีของแรงภายนอกหลายแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนคานเวกเตอร์ของแรงโกลบอล (global force vector) ที่เกิดขึ้นจากแรงที่  $i$  สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Y}(x_i) \cdot f_i \quad (2.24)$$

#### 2.1.4 การสร้างสมการการเคลื่อนที่

ไฟไนต์เอลิเมนต์ของระบบพลศาสตร์ที่มี  $n$  องศาของความอิสระ จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (2.25)$$

- โดยที่  $\mathbf{u}$  คือ เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลอง  
 $\dot{\mathbf{u}}$  คือ อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $\mathbf{u}$  เทียบกับเวลา  $t$   
 $\mathbf{M}$  คือ เมตริกซ์มวลของระบบ (system mass matrix)  
 $\mathbf{C}$  คือ เมตริกซ์ความหน่วงของระบบ (system damping matrix)  
 $\mathbf{K}$  คือ เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)  
 $\mathbf{P}$  คือ แรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและขนาดของแรงภายนอกที่มากกระทำดังแสดงในสมการ (2.24)

การใช้สมการสเตตสเปซ (state-space formulation) สมการ (2.25) จะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังแสดง

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (2.26)$$

โดยที่

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \quad (2.27)$$

- โดยที่  $\mathbf{X}$  คือ เวกเตอร์ของตัวแปร (state variables) ที่มีมิติเท่ากับ  $2n$  ซึ่งประกอบด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งที่ชั่วและความเร็วที่ชั่ว  
 $n_f$  คือ จำนวนของแรงภายนอกที่มากกระทำ  
 $\mathbf{f}$  คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่าที่มีมิติเท่ากับ  $n_f \times 1$

สมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่ต่อเนื่อง (discrete equation) โดยการใช้ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix) เข้ามาเกี่ยวข้อง จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \bar{\mathbf{G}}_{j+1}\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j \quad (2.28)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}h} \quad (2.29)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.30)$$

- โดยที่  $\mathbf{F}$  คือ เอกซ์โพเนนเชียลเมตริกซ์ (exponential matrix)  
 $\bar{\mathbf{G}}$  คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างแรงกับระบบ  
 $j+1$  หมายถึง การคำนวณในช่วงเวลาที่  $j+1$



$h$  คือ ผลต่างของเวลาในการคำนวณตัวแปร (variable state) ระหว่าง  $\mathbf{X}_j$  และ  $\mathbf{X}_{j+1}$

จากการแทนสมการ (2.27) และ (2.30) ลงไปในสมการ (2.28) จะได้

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_j + \mathbf{G}_{j+1}\mathbf{f}_j \quad (2.31)$$

โดยที่

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2n \times n_f} \quad (2.32)$$

### 2.1.5 วิธีการหาเมตริกซ์ $\mathbf{F}$

$$\mathbf{e}^{A_h} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{h^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots \quad (2.33)$$

และ

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (2.34)$$

โดยที่  $\mathbf{\Lambda}$  คือ เมตริกซ์ไอเกนแวลู (eigenvalue) ของเมตริกซ์  $\mathbf{A}$

$\mathbf{V}$  คือ เมตริกซ์ไอเกนเวกเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์  $\mathbf{A}$

แทนสมการ (2.34) ลงใน (2.33) จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{A_h} &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} + h\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^3}{3!}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{V}^{-1} + \dots \\ &= \mathbf{V}\left(\mathbf{I} + h\mathbf{\Lambda} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{\Lambda}^2 + \frac{h^3}{3!}\mathbf{\Lambda}^3 + \dots\right)\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}h}\mathbf{V}^{-1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.2 การวัดความเครียด

สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์ของคาน 2 มิติ ที่ยาว  $l$  โดยมีองศาอิสระ  $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$  ที่ปลายทั้งสองข้าง จะได้ว่าความเครียดที่หน้าตัดใด ๆ ระยะเวลา  $x$  จากปลายซ้ายของชิ้นส่วนคานสามารถเขียนให้อยู่ในรูปขององศาอิสระที่ปลายทั้งสองข้างได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \left( \frac{-y}{l^3} \right) [(12x - 6l)u_1 + l(6x - 4l)\theta_1 - (12x - 6l)u_2 + l(6x - 2l)\theta_2] \quad (2.36)$$

โดยที่  $y$  คือ ระยะจากแนวแกนสะเทินของคาน

### 2.3 การหาแรงขณะเคลื่อนที่จากผลการสั่นไหวของสะพาน

งานวิจัยต่างๆ ในปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับการหาน้ำหนักรถที่กำลังเคลื่อนที่ จะมีวิธีการหลักๆ ที่ใช้กันอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีโดเมนของเวลา (Time Domain Method) เป็นการจำลองรูปแบบโครงสร้างและแรง ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยที่แรงจะถูกจำลองให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นช่วง (step functions) ในช่วงเวลาเล็กๆ และจะทำการแก้สมการในโดเมนของเวลา

2. วิธีโดเมนของความถี่และเวลา (Frequency and Time Domain Method) จะทำฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (Fourier transforms) ในสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของพิกัดเชิงโหมดเช่นเดียวกัน ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของปฏิกิริยาตอบสนองและของแรงจะถูกเชื่อมโยงอยู่ในโดเมนของความถี่ (frequency domain) และแกนพิกัดเวลา (time histories) ของแรงจะสามารถหาได้โดยตรงโดยวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด (least-squares method)

3. วิธีเชิงโหมด (Modal Approach) เป็นการหาแรงในพิกัดเชิงโหมด การเปลี่ยนตำแหน่งที่วัดได้จะถูกเปลี่ยนเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด (modal displacement) โดยทำการสมมติฟังก์ชันประมาณ (shape function) ซึ่งความเร็วเชิงโหมด (modal velocities) และความเร่งเชิงโหมด (modal acceleration) สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงโหมด หลังจากนั้นจะหาแรงโดยทำการแก้สมการ (uncoupled equation) ใน พิกัดเชิงโหมด

ทั้ง 3 วิธีที่กล่าวถึงนี้ต้องทำการคำนวณเกี่ยวกับอินเวอร์สของเมตริกซ์ ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณนาน และเกิดสภาวะบกพร่อง (ill-conditioned) ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของแกนเวลา

ในงานวิจัยครั้งนี้จะทำการหาแรงที่กำลังเคลื่อนที่โดยการใช้วิธีการของไดนามิกโปรแกรมมิง (dynamic programming) ซึ่งสามารถหาแรงได้ในโดเมนของเวลาจากการใช้รีเคอร์ซีฟฟอร์มูลา (recursive formula) โดยมีสมมติฐานให้ระบบโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบอีลาสติกเชิงเส้น (linear elastic)

### 2.3.1 หลักการทั่วไป

จุดประสงค์ของปัญหานี้คือ การหาแรง  $\mathbf{f}$  ซึ่งทำให้สมการ (2.31) มีความใกล้เคียงกับข้อมูลที่วัดมาได้มากที่สุด แต่ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถที่จะวัดการเปลี่ยนตำแหน่งและความเร็วได้ทั้งหมด ซึ่งจะมีแค่บางตำแหน่งเท่านั้นที่เราสามารถวัดได้ ดังนั้นข้อมูลที่ได้จาก การวัดสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{d} = \mathbf{QX} \quad (2.37)$$

โดยที่  $\mathbf{d}$  คือ เวกเตอร์ของการวัด

$\mathbf{Q}$  คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือกเพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับตัวแปร (state variables)

โดยที่การหาค่าแรงจะมาจากการแก้ระบบสมการในรูปแบบนี้ เพียงแต่วิธีที่ใช้ในการหาแรงจะมีเงื่อนไขในแต่ละวิธีเป็นเช่นไร ซึ่งวิธีที่จะนำมาศึกษานี้โดยหลักแล้วประกอบด้วย 2 วิธีคือ วิธีการหาค่าตอบใช้การแก้ระบบสมการโดยตรง ได้แก่การใช้ซูโดอินเวอร์สเมตริกซ์ (pseudo-inverse matrix) และซิงกูลาร์แวลูดีคอมโพสิชัน (singular value decomposition) และอีกวิธีคือการใช้รูปแบบของรีเคอร์ซีฟฟอร์มูลา (recursive formula) โดยวิธีไดนามิกโปรแกรมมิง (dynamic programming)

### 2.3.2 การหาแรงโดยตรงจากการแก้ระบบสมการ

ปัญหาในการวิเคราะห์ระบบสมการในการหาแรงนั้น จากเดิมที่สามารถนำข้อมูลที่ได้จากการวัด มาแสดงให้อยู่ในรูปของสมการที่ 2.37

สามารถแปลงความเครียดที่ได้จากการวัดจากความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{I}} \quad (2.38)$$

เมื่อ  $\boldsymbol{\delta}$  คือระยะความลึกของแนวแกนสะเทินของหน้าตัดสะพาน

$\mathbf{I}$  คือโมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของหน้าตัดสะพาน

$\mathbf{E}$  คืออีลาสติคโมดูลัสของสะพาน

ดังนั้นจะสามารถเขียนโมเมนต์ในเทอมของความเครียดได้เป็น

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}\mathbf{I}}{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.39)$$

เมื่อแทนความเครียดที่ได้จากการวัดจริงด้วยเวกเตอร์  $Z$  จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$M = Z \left( \frac{EI}{\delta} \right) \quad (2.40)$$

จากสมการสเปซ (state-space formulation) ในสมการที่ 2.31 เมื่อกำหนดให้ค่าเริ่มต้น  $X$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ( $X_0 = 0$ ) จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของ  $X$  และแรงภายนอก  $f$  ได้ดังนี้

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ FG_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ F^2G_1 & FG_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & G_{n-1} & 0 \\ F^{n-1}G_1 & F^{n-2}G_2 & \cdots & FG_{n-1} & G_n \end{bmatrix}}_N \underbrace{\begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix}}_f \quad (2.41)$$

เขียนในรูปแบบของสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$X = Nf \quad (2.42)$$

เมื่อ  $N$  เป็นเมตริกซ์เชื่อมโยงระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งและความเร็วกับความเร่งภายนอก

จากความสัมพันธ์นี้ เราสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความเร่งภายนอกได้ดังนี้

$$M = \left[ \frac{EI}{\delta} (QN) \right] f \quad (2.43)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการในรูปแบบของสมการเส้นตรงได้เช่นกัน

$$M = Bf \quad (2.44)$$

โดยที่  $M$  คือ เวกเตอร์ของโมเมนต์จากการแปลงความเครียดที่ได้จากการวัด มีมิติ  $k \times 1$   
 $B$  คือ เมตริกซ์ที่เชื่อมโยงระหว่างโมเมนต์กับความเร่ง มีมิติ  $k \times n$

$$\text{เมื่อ} \quad B = \frac{EI}{\delta} (QN) \quad (2.45)$$

$\mathbf{f}$  คือ เวกเตอร์ของแรงที่จะทำการหา มีมิติ  $n \times 1$   
และ  $k \geq n$

เมื่อแรงที่ไม่ทราบค่า  $\mathbf{f}$  ได้รวมอยู่ในสมการ (2.31) การที่ข้อมูลจากแบบจำลองจะเหมือนกับข้อมูลจากการวัดจึงเป็นไปได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อมูลที่ได้จากการวัดจะมีสิ่งรบกวนรวมอยู่ด้วย ซึ่งวิธีการยกกำลังสองน้อยที่สุด (least squares) ที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน  $E$  ดังสมการ

$$E(\mathbf{f}) = [(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}), \mathbf{D}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})] \quad [\text{Zhu และ Law, 2002}] \quad (2.46)$$

มีค่าน้อยที่สุดก็ไม่พอเพียง เนื่องจากในการแก้ปัญหาจะเกิดสภาวะบกพร่อง ill-condition ที่บริเวณจุดเริ่มต้นและจุดปลายของตำแหน่งที่มีการเข้าออกของเพลลาซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด จากสาเหตุดังกล่าวนี้เราสามารถที่จะหลีกเลี่ยงได้โดยการเพิ่มเทอมความราบเรียบ (smoothing term) เข้าไปในสมการ (2.46) ดังแสดง

$$E(\mathbf{f}, \lambda) = [(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}), \mathbf{D}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})] + \lambda(\mathbf{S}\mathbf{f}, \mathbf{S}\mathbf{f}) \quad [\text{Zhu และ Law, 2002}] \quad (2.47)$$

เทอมที่สองคือ regularization parameter และวิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า Tikhonov method เมตริกซ์  $\mathbf{D}$  และเมตริกซ์  $\mathbf{S}$  เป็นเมตริกซ์โพสิทีฟดีฟิไนท์ที่มีความสมมาตร (symmetric positive-definite weighting matrices) ซึ่งให้ความยืดหยุ่นในการถ่วงน้ำหนักของการวัดและการถ่วงน้ำหนักของแรง เมตริกซ์  $\mathbf{D}$  และ เมตริกซ์  $\mathbf{S}$  โดยทั่วไปจะเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) โดยเทอมที่สองค่า  $\lambda$  จะมีผลของความราบเรียบของแรงที่หามาได้ซึ่งเมื่อค่า  $\lambda$  มีค่าน้อย จะทำให้คำตอบมีความใกล้เคียงกับข้อมูลมากแต่มีความแปรปรวนสูง และเมื่อค่า  $\lambda$  มีค่ามาก แรงที่หาได้จะมีความราบเรียบแต่จะไม่ใกล้เคียงกับข้อมูล ถ้า  $\lambda$  มีค่าเท่ากับศูนย์ การแก้ปัญหาก็จะกลายเป็นปัญหายกกำลังสองน้อยที่สุด (least squares) แบบธรรมดา ซึ่งเมื่อกระจายเทอมทางด้านขวามือของสมการที่ 2.47 จะได้

$$E(\mathbf{f}, \lambda) = [\mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M} - (\mathbf{f}, 2\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{M}) + (\mathbf{f}, \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{f})] + \lambda(\mathbf{f}, \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{f}) \quad (2.48)$$

จากวิธีการออปติไมเซชัน (optimization) เราสามารถหาค่าแรง  $\mathbf{f}$  ที่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุดได้ ด้วยการหาอนุพันธ์ของสมการข้างต้นเทียบกับ  $\mathbf{f}$  จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{f}, \lambda)}{\partial \mathbf{f}} &= -2\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{M} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{f} + 2\lambda \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{f} \\ 0 &= -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{M} + (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \lambda \mathbf{S}^T \mathbf{S}) \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.49)$$

ดังนั้นค่าแรง  $\mathbf{f}$  ที่เหมาะสมที่สุดและทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดจะหาได้จาก

$$\mathbf{f} = (B^T \mathbf{D} B + \lambda \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} B^T \mathbf{D} \mathbf{M} \quad (2.50)$$

### 2.3.2.1 การแก้สมการโดยใช้ชูดอินเวอร์สเมตริกซ์ (pseudo-inverse matrix, PI)

จากสมการที่ 2.50 ถ้าให้ เมตริกซ์ตัวนำหน้า  $\mathbf{D}$  และ  $\mathbf{S}$  เป็น เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) รูปแบบของสมการจะกลายเป็น

$$\mathbf{f} = (B^T B + \lambda)^{-1} B^T \mathbf{M} \quad [\text{Zhu และ Law, 2002}] \quad (2.51)$$

และถ้าให้ regularization parameter ( $\lambda$ ) มีค่าเท่ากับศูนย์ รูปแบบสมการก็จะอยู่ในรูปแบบของ Pseudo Inverse Matrix ( $B^+$ )

$$\mathbf{f} = B^+ \mathbf{M} = \left[ (B^T B)^{-1} B^T \right] \mathbf{M} \quad (2.52)$$

ซึ่งการหาค่า  $B^+$  จากสมการนี้มีขอบเขตในการนำไปใช้ คือเมตริกซ์  $B$  จะต้องเป็นแบบ full rank เท่านั้น มิฉะนั้นในการแก้ระบบสมการจะทำให้เกิดสภาวะบกพร่อง (ill-condition)

### 2.3.2.2 การแก้สมการด้วยวิธีซิงกูลาร์แวลูดีคอมโพสิชัน (Singular Value Decomposition, SVD)

$$\text{จากรูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น} \quad [A]_{k \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{b\}_{k \times 1} \quad \text{เมื่อ } k \geq n \quad (2.53)$$

เราสามารถแปลงเมตริกซ์  $A$  ด้วยวิธีซิงกูลาร์แวลูดีคอมโพสิชัน (singular value decomposition) ได้ในรูปแบบดังนี้

$$[A]_{k \times n} = [U]_{k \times k} [\Sigma]_{k \times n} [V]_{n \times n}^T \quad (2.54)$$

โดยที่  $U$  เป็นเมตริกซ์จัตุรัส มีมิติ  $k \times k$  และมีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ตั้งฉาก (orthogonal matrix) มีรูปแบบดังนี้

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nk} \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (2.55)$$

เขียนในรูปของเวกเตอร์ได้เป็น

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{Bmatrix}_{k \times k} \quad (2.56)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} u_1 &= [u_{11} \quad u_{12} \quad \cdots \quad u_{1k}]_{1 \times k} \\ u_2 &= [u_{21} \quad u_{22} \quad \cdots \quad u_{2k}]_{1 \times k} \\ u_k &= [u_{k1} \quad u_{k2} \quad \cdots \quad u_{kk}]_{1 \times k} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$V$  เป็นเมตริกซ์จัตุรัส มีมิติ  $n \times n$  และมีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ตั้งฉาก (orthogonal matrix) มีรูปแบบดังนี้

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.58)$$

เขียนในรูปของเวกเตอร์ได้เป็น

$$V = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}_{n \times n} \quad (2.59)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} v_1 &= [v_{11} \quad v_{12} \quad \cdots \quad v_{1n}]_{1 \times n} \\ v_2 &= [v_{21} \quad v_{22} \quad \cdots \quad v_{2n}]_{1 \times n} \\ v_n &= [v_{n1} \quad v_{n2} \quad \cdots \quad v_{nn}]_{1 \times n} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$\Sigma$  เป็นเมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix) มีมิติ  $k \times n$  มีรูปแบบดังนี้

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}_{k \times n} \quad (2.61)$$

โดยที่  $\sigma_i$  คือค่าซิงกูลาร์ (singular value) และมีคุณสมบัติคือ  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots, \sigma_n \geq 0$

ดังนั้นจากสมการที่ 2.44 สามารถแปลงเมตริกซ์  $B$  ให้อยู่ในรูปของซิงกูลาร์แวลูดีคอมโพสิชัน (singular value decomposition) ได้ดังนี้

$$\{\mathbf{M}\} = [U][\Sigma][V]^T \{\mathbf{f}\} \quad (2.62)$$

$$[U]^T \{\mathbf{M}\} = [\Sigma][V]^T \{\mathbf{f}\} \quad (2.63)$$

จากวิธีการยกกำลังสองน้อยสุด (least squares) และวิธีการเรกูลาร์ไรเซชัน (regularization) เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก  $\mathbf{D}$  และ  $\mathbf{S}$  เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) จะสามารถเขียนสมการเพื่อใช้ในการหาแรงได้ดังนี้

$$E(\lambda, \mathbf{f}) = [\Sigma V^T \mathbf{f} - U^T \mathbf{M}, \Sigma V^T \mathbf{f} - U^T \mathbf{M}] + \lambda (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \quad (2.64)$$

จากรูปแบบสมการข้างต้น จะสามารถเขียนสมการที่ 2.64 ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของผลรวมได้เป็น

$$E(\lambda, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n |\sigma_i (v_i^T \mathbf{f}) - (u_i^T \mathbf{M})|^2 + \sum_{i=n+1}^k |(u_i^T \mathbf{M})|^2 + \lambda \sum_{i=1}^n |(v_i^T \mathbf{f})|^2 \quad (2.65)$$

จากวิธีการออปติไมเซชัน (optimization) เราสามารถหาค่าแรง  $\mathbf{f}$  ที่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุดได้ด้วยขั้นตอนเช่นเดียวกันกับก่อนหน้านี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\lambda, \mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} &= 2 \sum_{i=1}^n |\sigma_i (v_i^T \mathbf{f}) - (u_i^T \mathbf{M})| \sigma_i v_i^T + 2\lambda \sum_{i=1}^n |(v_i^T \mathbf{f})| v_i^T \\ 0 &= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ |\sigma_i (v_i^T \mathbf{f}) - (u_i^T \mathbf{M})| \sigma_i + \lambda |(v_i^T \mathbf{f})| \right\} v_i^T \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \left\{ (\sigma_i^2 + \lambda) (v_i^T \mathbf{f}) - \sigma_i (u_i^T \mathbf{M}) \right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

ดังนั้นค่าแรง  $\mathbf{f}$  ที่เหมาะสมที่สุดและทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดจะหาได้สมการที่ 2.67 [Zhu และ Law, 2002]

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{(\sigma_i^2 + \lambda)} (u_i^T \mathbf{M}) v_i \quad (2.67)$$



### 2.3.3 การหาน้ำหนักด้วยการใช้รีเคอร์ซีฟฟอร์มูลา (recursive formula)

จากสมการที่ 2.37 เมื่อใช้รูปแบบของรีเคอร์ซีฟฟอร์มูลา เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความสัมพันธ์ย่อได้

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{Q}\mathbf{X}_j \quad (2.68)$$

โดยที่  $\mathbf{d}_j$  คือ เวกเตอร์ของการวัดมีมิติ  $m \times 1$

$\mathbf{Q}$  คือ เมตริกซ์ที่ถูกเลือกเพื่อเชื่อมโยงระหว่างการวัดกับตัวแปร (state variables) มีมิติ  $m \times 2n$

ข้อมูลจากการวัดจริงจะแทนได้ด้วยเวกเตอร์  $\mathbf{Z}_j$  ซึ่งมีมิติเดียวกับ  $\mathbf{d}_j$  โดยทั่วไปจำนวนของข้อมูลที่วัดได้  $m$  จะน้อยกว่าจำนวนของตัวแปร (หรือ  $n$  ระดับชั้นความอิสระของระบบ) มาก แต่จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนของแรงภายนอกที่มากระทำ  $n_j$  ในกรณีของ คาน 2 มิติ ที่มีจุดรองรับแบบธรรมดา ซึ่งถูกแบ่งเป็น  $L$  เอลิเมนต์จะได้  $n = 2(L+1) - 2$  ซึ่งได้รวมการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งและการเปลี่ยนตำแหน่งในการหมุนที่แต่ละข้อไว้แล้ว

เช่นเดียวกัน วิธีการยกกำลังสองน้อยที่สุด (least squares) สามารถนำมาใช้ในรูปแบบของรีเคอร์ซีฟฟอร์มูลาได้ในรูปของผลรวมดังนี้

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^N \left( (\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j) \right) \quad [\text{Law และ Fang, 2001}] \quad (2.69)$$

และเมื่อเพิ่ม regularization เทอมเข้าไปก็จะได้

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^N \left( (\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Q}\mathbf{X}_j) + (\mathbf{f}_j, \mathbf{E}\mathbf{f}_j) \right) \quad (2.70)$$

โดยให้  $\mathbf{E}$  ในเทอมหลังเป็นเทอมของเรกูลาร์ไรเซชัน (regularization) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\lambda(\mathbf{S})$  ในกรณีของซิงกูลาร์แวลูดีคอมโพสิชัน (singular value decomposition) ตามที่ได้อธิบายไปแล้ว

### 2.3.3.1 ไตนามิคโปรแกรมมิ่ง (Dynamic Programming)

เพื่อที่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อน  $E$  ของวิธียกกำลังสองน้อยที่สุด (least squares) มีค่าน้อยที่สุด วิธีการไดนามิคโปรแกรมมิ่ง (dynamic programming) และกฎการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของเบลล์แมน (Bellman's Principle of Optimality) [Bellman, 1967] ได้ถูกนำมาใช้หาค่า  $E$  ที่น้อยที่สุดที่ขั้นตอน  $n$  สำหรับค่าเริ่มต้น  $\mathbf{X}$  สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_j} E_n(\mathbf{X}, \mathbf{f}_j) \quad (2.71)$$

จากสมการ (2.40) โดยใช้กฎการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของเบลล์แมน (Bellman's Principle of Optimality) จะสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\mathbf{g}_{n-1}(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} \left( (\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{Q}\mathbf{X}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_{n-1} - \mathbf{Q}\mathbf{X}) + (\mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{E}\mathbf{f}_{n-1}) + \mathbf{g}_n(\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}_n\mathbf{f}_{n-1}) \right) \quad (2.72)$$

$\mathbf{f}_n$  และ  $\mathbf{g}_n$  คือ ค่าแรงที่เหมาะสม (optimal forcing term) และค่าต้นทุนที่เหมาะสม (optimal cost term) ตามลำดับ การแก้ปัญหาสามารถทำได้โดยการเริ่มต้นขั้นตอนที่  $n=N$  และทำย้อนกลับไปจนถึง  $n=1$  ที่จุดปลาย ค่าที่น้อยที่สุดสามารถหาได้จาก

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_N} \left[ (\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}), \mathbf{D}(\mathbf{Z}_N - \mathbf{Q}\mathbf{X}) + (\mathbf{f}_N, \mathbf{E}\mathbf{f}_N) \right] \quad (2.73)$$

เมื่อ  $\mathbf{f}_N = 0$  เราจะได้คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดดังสมการ (2.73) โดยการขยายสมการ (2.72)

$$\mathbf{g}_N(\mathbf{X}) = \mathbf{q}_N + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_N) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_N\mathbf{X}) \quad (2.74)$$

โดยที่

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{Z}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{S}_N = -2\mathbf{Q}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_N$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}_N^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_N \quad (2.75)$$

สมการ (2.75) คือค่าเริ่มต้นสำหรับการทำงานย้อนกลับที่  $n=N$  โดยการแทนสมการ (2.74) ด้วยขั้นตอนที่  $n$  และ  $n-1$  ลงไปในสมการ (2.72) และขยายเทอมทางด้านขวามือของสมการจะได้

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1}\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}_{n-1}} \left[ (\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n\mathbf{X} + \mathbf{U}_n), \mathbf{H}_n(\mathbf{f}_{n-1} + \mathbf{V}_n\mathbf{X} + \mathbf{U}_n) + \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \right]$$

โดยที่  $\mathbf{H}_n = \mathbf{E} + \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{G}_n$ ,  $2\mathbf{H}_n \mathbf{V}_n = 2\mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{V}_n = \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}$

$$2\mathbf{H}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n, \quad \mathbf{U}_n = (\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \mathbf{S}_n) / 2 \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{x}) = & (\mathbf{q}_n + \mathbf{Z}_{n-1}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1}) + \mathbf{X}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R}_n \mathbf{F}) \mathbf{X} + \mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{S}_n - 2\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1}) \\ & - \mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X} - \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n - 2\mathbf{X}^T \mathbf{V}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{U}_n \end{aligned}$$

การทำให้เทอมทางด้านขวามือของสมการ (2.76) มีค่าน้อยที่สุด จะนำไปสู่ค่าแรงที่เหมาะสม คือ

$$\mathbf{f}_{n-1} = -\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \left[ \mathbf{R}_n \mathbf{F} \mathbf{X}_{n-1} + \frac{\mathbf{S}_n}{2} \right] \quad (2.77)$$

และสมการ (2.76) จะกลายเป็น

$$\mathbf{q}_{n-1} + (\mathbf{X}, \mathbf{S}_{n-1}) + (\mathbf{X}, \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{X}) = \mathbf{r}_{n-1}(\mathbf{X}) \quad (2.78)$$

จากการกระจายเทอมในสมการ (2.78) และทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{R}_n \mathbf{F} \\ \mathbf{S}_{n-1} &= -2\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{n-1} + \mathbf{F}^T \left[ \mathbf{I} - \mathbf{R}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{G}_n^T \right] \mathbf{S}_n \end{aligned} \quad (2.79)$$

ความคลาดเคลื่อนของแรงที่หาได้สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$Error = \frac{\|\mathbf{f}_{identified} - \mathbf{f}_{true}\|}{\|\mathbf{f}_{true}\|} \times 100\% \quad (2.80)$$

โดยที่  $\|\bullet\|$  คือ นอร์ม (norm) ของเมตริกซ์

### 2.3.3.2 ขั้นตอนการคำนวณ

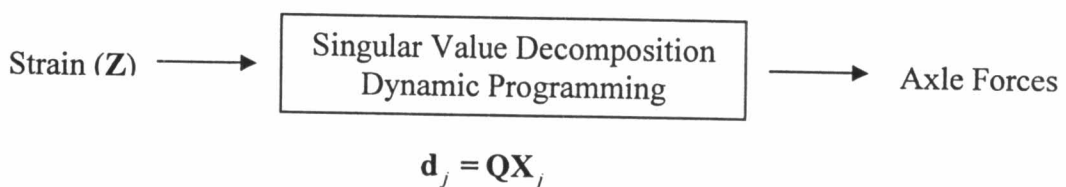
- i) เมตริกซ์  $\mathbf{Q}$  เมตริกซ์  $\mathbf{Z}$  และความเร็วของแรงสามารถหาได้จากการวัดจากภาคสนาม
- ii) คำนวณค่าเริ่มต้น  $\mathbf{q}_N$ ,  $\mathbf{R}_N$  และ  $\mathbf{S}_N$  จากสมการ (2.75) และคำนวณค่า  $\mathbf{H}_N$  จากสมการ (2.76)
- iii) คำนวณ  $\mathbf{S}_{n-1}$  และ  $\mathbf{R}_{n-1}$  จากสมการ (2.79) ตั้งแต่ค่า  $n = N$  จนถึง  $n = 1$
- iv) กำหนดค่าเริ่มต้น  $\mathbf{X}$  เท่ากับศูนย์ ( $\mathbf{X}_0 = 0$ ) แล้วคำนวณค่าปฏิกิริยาตอบสนอง  $\mathbf{X}_{j+1}$  จากสมการ (2.31) ตั้งแต่ค่า  $j = 0$  จนถึง  $j = N$  และหาแรง  $\mathbf{f}_{n-1}$  จากสมการ (2.77) ตั้งแต่ค่า  $n = 1$  จนถึง  $n = N$

## 2.4 การเพิ่มความถูกต้องในการหาแรงด้วยเทคนิคการคำนวณซ้ำ

เนื่องมาจากงานวิจัยในอดีตที่ผ่านมาได้มีการหาน้ำหนักขณะเคลื่อนที่ โดยที่วิธีไดนามิกโปรแกรมมิ่งนั้นยังมีความคลาดเคลื่อนในการคำนวณอยู่ ธวัช (2003) ได้เสนอเทคนิคการคำนวณซ้ำ (Iteration Technique) มาใช้ในการเพิ่มความถูกต้องแม่นยำในการหาน้ำหนักของวิธีไดนามิกโปรแกรมมิ่ง

เทคนิคการคำนวณซ้ำ คือ การนำเอาผลของการคำนวณที่ได้จากไดนามิกโปรแกรมมิ่งมาแยกสัญญาณความเครียดเนื่องจากผลทางพลศาสตร์ออกจากสัญญาณความเครียดที่ได้จากการวัด แล้วนำความเครียดทางพลศาสตร์นั้นมาคำนวณในไดนามิกโปรแกรมมิ่งอีกครั้ง แล้วนำไปบวกกับแรงทางสถิตที่ประมาณได้ เพื่อให้ค่าแรงที่หาได้ลู่อู่เข้าหาค่าแรงที่ถูกต้องมากขึ้นจากการคำนวณครั้งแรกของไดนามิกโปรแกรมมิ่ง ซึ่งมีหลักการดังนี้

- 2.4.1 จากสัญญาณความเครียดที่ได้จากการวัด  $\mathbf{Z}$  มาทำการคำนวณในโปรแกรมการหาน้ำหนัก จะได้ค่าแรง จากการคำนวณครั้งแรก  $\mathbf{f}^1$  และจากแรงที่หาได้ก็นำไปคำนวณย้อนกลับหาความเครียดที่ประมาณได้  $\mathbf{d}$  ซึ่งจะเก็บไว้เพื่อนำไปแยกผลทางพลศาสตร์ในขั้นตอนต่อไป



รูปที่ 2.5 ขั้นตอนการหาน้ำหนักเบื้องต้นก่อนการคำนวณซ้ำ

- 2.4.2 เพื่อที่จะทำการแยกผลทางพลศาสตร์ จากแรงที่หาได้จะนำไปทำการเฉลี่ยเพื่อหาค่าแรงทางสถิต  $\mathbf{f}'_s$  ซึ่งการเฉลี่ยเพื่อทำการหาแรงทางสถิตนี้จะทำการเฉลี่ยแยกเพลาสระต่อกันตามช่วงเวลาทีเพลานั้น ๆ วิ่งอยู่บนช่วงสะพาน และแรงรวมทั้งหมดทางสถิตของรถได้จากการซูเปอร์โพสิชันของแรงทางสถิตแต่ละเพลเข้าด้วยกัน



รูปที่ 2.6 ขั้นตอนการหาแรงทางสถิติจากการเฉลี่ยแรงทางพลศาสตร์ที่คำนวณได้

2.4.3 จากแรงทางสถิติที่ได้  $f_s^i$  จะนำไปคำนวณหาความเครียดเนื่องจากผลทางสถิติ  $d_s^i$  โดยมีขั้นตอนดังนี้

i) ทำการแปลงแรงที่หาได้ให้เป็นแรงที่ขั้วด้วยฟังก์ชันประมาณ (shape function)

$$P_s^i = Y f_s^i \quad (2.81)$$

โดยที่  $P_s$  คือ เวกเตอร์ของแรงทางสถิติที่ขั้ว (nodal force vector)  
 $Y$  คือ เวกเตอร์ที่แปลงแรงกระทำภายนอกสู่ระบบแรงที่ขั้ว  
 $f_s$  คือ แรงภายนอกที่ไม่ทราบค่ามีมิติเท่ากับ  $n_f \times 1$

ii) จากแรงที่ขั้ว สามารถหาการเปลี่ยนตำแหน่ง  $u_s^i$  ได้โดยนำไปคูณด้วยอินเวอร์สของสติฟเนสเมตริกซ์

$$u_s^i = K^{-1} P_s^i \quad (2.82)$$

โดยที่  $u_s$  คือ เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของแบบจำลองชิ้นส่วนคาน  
 $K$  คือ เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (system stiffness matrix)

iii) สามารถหาความเครียดทางสถิติ  $d_s^i$  ได้จากความสัมพันธ์ของความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$d_s^i = Q u_s^i \quad (2.83)$$

2.4.4 เมื่อได้ความเครียดทางสถิติแล้ว จะสามารถหาความเครียดทางพลศาสตร์  $d_d^i$  ได้จากการนำความเครียดทางสถิติไปลบออกจากความเครียดรวมที่ได้จากการประมาณ  $d^i$

$$d_d^i = d^i - d_s^i \quad (2.84)$$

2.4.5 จากความเครียดทางพลศาสตร์ที่ได้  $d_d^i$  จะนำไปหาแรงทางพลศาสตร์ในรอบใหม่  $f_d^{i+1}$  ด้วยโปรแกรมการหาน้ำหนักอีกครั้ง

2.4.6 จากแรงทางพลศาสตร์ที่ได้  $\mathbf{f}_d^{i+1}$  เมื่อนำไปรวมกับแรงทางสถิต  $\mathbf{f}_s^i$  จะได้เป็นแรงในรอบใหม่จากการคำนวณซ้ำ

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}_s^i + \mathbf{f}_d^{i+1} \quad (2.85)$$

2.4.7 ค่าความเครียดทางพลศาสตร์ที่ได้จากสมการ 2.84 เมื่อนำไปรวมกับความเครียดทางสถิตจากสมการ 2.83 ก็จะได้เป็นความเครียดรวมใหม่ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณซ้ำรอบถัดไป

$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}_s^i + \mathbf{d}_d^{i+1} \quad (2.86)$$

2.4.8 ทำการคำนวณซ้ำจนกระทั่งผลต่างของแรงที่ได้ในรอบล่าสุดกับรอบก่อนหน้า มีความแตกต่างกันน้อยมาก ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ได้กำหนดไว้ โดยในงานวิจัยของธวัชและงานวิจัยนี้กำหนดไว้ที่ไม่เกิน 1 เปอร์เซ็นต์จึงจะหยุดการคำนวณกล่าวคือ

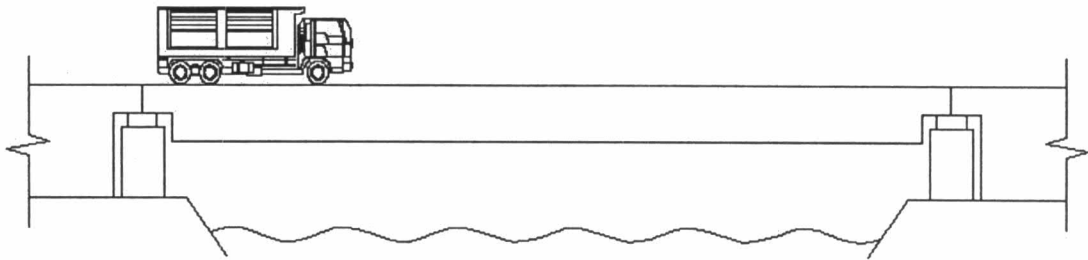
$$\frac{\|\mathbf{f}^{i+1} - \mathbf{f}^i\|}{\|\mathbf{f}^i\|} \times 100 \% \leq 1\% \quad (2.87)$$

## 2.5 การปรับปรุงการหาค่าหน้าหนักจากผลของสภาพเงื่อนไขบริเวณจุดรองรับของแบบจำลองสะพาน

แบบจำลองสะพานที่ใช้ในงานวิจัยที่ผ่านมา ได้ทำการจำลองเป็นแบบช่วงเดียวและมีสภาพจุดรองรับแบบธรรมดา (simple support) โดยมีลักษณะเป็นแบบข้อหมุน (hinge) ซึ่งโครงสร้างสะพานจริงนั้นบริเวณจุดรองรับจะไม่ได้มีลักษณะเป็นแบบข้อหมุนอย่างแท้จริง เนื่องจากการติดตั้งคาน (girder) อาจมีการยึดรั้งและสภาพพื้นผิวถนนซึ่งมีการลาดยางหรือเทผิวคอนกรีตเชื่อมต่อกับถนนหลัก ทำให้เกิดผลของความต่อเนื่องเกิดขึ้นเนื่องจากค่าสติฟเนสบริเวณจุดรองรับมีค่าเพิ่มขึ้น

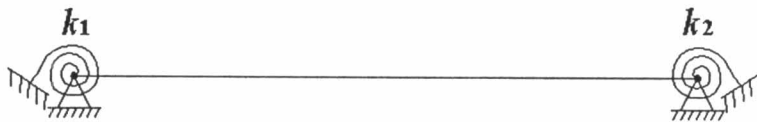
ดังนั้นการปรับปรุงแบบจำลองที่บริเวณจุดรองรับ จะสามารถเพิ่มความถูกต้องของการหาค่าหน้าหนักได้ เนื่องจากเราจะทราบถึงพฤติกรรมการแอ่นตัวและการสั่นไหวของสะพานอย่างถูกต้อง อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสะพานแบบต่อเนื่องได้อีกด้วย

### 2.5.1 แบบจำลองของสะพานแบบช่วงเดียว



รูปที่ 2.7 ลักษณะสะพานแบบช่วงเดียว

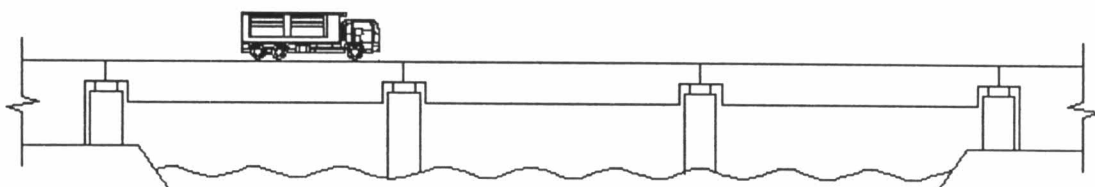
ลักษณะเงื่อนไขบริเวณจุดรองรับของสะพานแบบช่วงเดียวนั้น สติฟเนสของจุดรองรับจะมีค่าระหว่าง สติฟเนสของจุดรองรับแบบข้อหมุน (hinge support) กับสติฟเนสของจุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) และค่าสติฟเนสที่ปลายสะพานทั้งสองข้างอาจมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นเราจะจำลองสะพานด้วยแบบจำลองของคาน ที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง (rotational spring) ซึ่งมีค่าสติฟเนสของการหมุน (rotational stiffness) ที่ปลาย ด้านซ้ายและขวาเท่ากับ  $k_1$  และ  $k_2$  ตามลำดับ ซึ่งแทนที่ค่าสติฟเนสที่ปลายของสะพาน ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แบบจำลองคานสำหรับสะพานช่วงเดียว

จากแบบจำลองคานในรูปที่ 2.8 เมื่อทำการปรับเทียบ (calibrate) เพื่อหาค่า  $k_1$  และ  $k_2$  ได้แล้ว ก็จะสามารถวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานตามทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์และนำไปใช้หาน้ำหนักบรรทุกได้ตามปกติ โดยหลักการในการปรับเทียบจะได้อธิบายในบทที่ 5

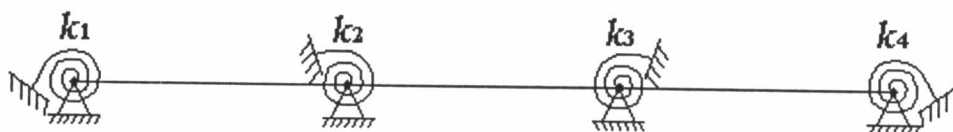
### 2.5.2 แบบจำลองของสะพานแบบหลายช่วง



รูปที่ 2.9 ลักษณะสะพานแบบหลายช่วง

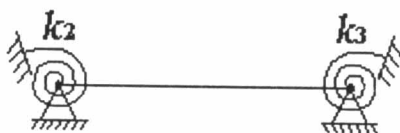
สะพานแบบหลายช่วงซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 2.9 โดยก่อสร้างขึ้นจากคานช่วงเดียวหลายส่วนมาเรียง ต่อเนื่องกัน พฤติกรรมการแอ่นตัวและการสั่นไหวของโครงสร้างสะพานลักษณะนี้จะไม่เหมือนกับสะพานหลาย

ช่วงซึ่งเป็นแบบคานต่อเนื่อง และที่บริเวณจุดเชื่อมต่อระหว่างช่วงของสะพานจะมีพฤติกรรมที่ไม่เป็นแบบจุดรองรับแบบข้อหมุน (hinge support) แต่จะมีค่าสติฟเนสจากการยึดรั้งในทางปฏิบัติจากการก่อสร้างเช่นเดียวกับสะพานแบบช่วงเดียวดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังนั้นเราสามารถจำลองโครงสร้างสะพานแบบหลายช่วงนี้ให้เป็นแบบจำลองคานได้ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แบบจำลองคานสำหรับสะพานหลายช่วง

จากแบบจำลองคานในรูปที่ 2.10 สำหรับการวิเคราะห์เพื่อหาน้ำหนักจรด เราสามารถเลือกใช้แบบจำลองคานเพียงช่วงเดียวได้ ดังรูปที่ 2.11 แต่ในการปรับเทียบ (calibrate) เพื่อหาค่าสติฟเนสที่ปลายชิ้นส่วนคานแต่ละข้าง จะต้องทำการคำนึงผลของรถที่วิ่งเข้าช่วงสะพานที่เชื่อมต่อกับสะพานที่เราเลือกใช้ในการพิจารณาด้วย



รูปที่ 2.11 ตัวอย่างชิ้นส่วนคานที่เลือกใช้ในการวิเคราะห์เพื่อหาน้ำหนักจรด

### 2.5.3 สติฟเนสเมตริกซ์ของแบบจำลองสะพานที่ทำการปรับแก้สภาพจุดรองรับ

จากการสร้างแบบจำลองสะพานด้วยชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง ซึ่งมีค่าสติฟเนสที่ปลายทั้งสองข้าง การวิเคราะห์ชิ้นส่วนคานนี้จะทำการปรับแก้สติฟเนสเมตริกซ์  $[K]$  ของโครงสร้างที่จะนำไปแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่

จากสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานของออยเลอร์-เบอร์นูลลี ดังสมการที่ 2.88

$$K^e = \frac{E_e I_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

ในการคิดผลของจุดรองรับแบบข้อหมุนสปริง เราจะให้ชิ้นส่วนสปริงเป็นเอลิเมนต์ที่รับแรงกระทำที่ข้อด้วยแรงกระทำแบบโมเมนต์ดัดเท่า่นั้น ซึ่งจะมีค่าสติฟเนสที่ปลายเท่ากับ  $k_1$  หรือ  $k_2$  ดังนั้นหากชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับข้างหนึ่งเป็นข้อหมุนสปริงดังรูปที่ 2.12 จะได้สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานชิ้นนี้ดังนี้





รูปที่ 2.12 ชิ้นส่วนคานที่มีจุดรองรับข้างหนึ่งเป็นข้อหมุนสปริง

ชิ้นส่วนคานด้านซ้าย

$$K^1 = \frac{E_1 I_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & \left(4l_1^2 + \frac{k_1 l_1^3}{E_1 I_1}\right) & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

ชิ้นส่วนคานด้านขวา

$$K^2 = \frac{E_2 I_2}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & \left(4l_2^2 + \frac{k_2 l_2^3}{E_2 I_2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$



รูปที่ 2.13 รูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองสะพาน

จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หากเราจำลองสะพานด้วยการแบ่งชิ้นส่วนคานออกเป็นจำนวน  $n$  เอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.13 มีคุณสมบัติของหน้าตัดและวัสดุ คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น ( $E$ ) และค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของสะพาน ( $I$ ) เช่นเดียวกัน และแบ่งความยาวช่วงแต่ละเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน ( $l$ ) โดยให้ชิ้นส่วนปลายด้านซ้ายสุดและขวาสุดเป็นชิ้นส่วนที่ 1 และชิ้นส่วนที่  $n$  ตามลำดับ จะได้สติเฟนสมเมตริกซ์ของชิ้นส่วนแรกและชิ้นส่วนสุดท้ายดังนี้

เอลิเมนต์แรก

$$K^1 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & \left(4l^2 + \frac{k_1 l^3}{EI}\right) & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.91)$$

เอลิเมนต์สุดท้าย

$$\mathbf{K}^n = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & \left(4l^2 + \frac{k_2 l^3}{EI}\right) \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.92)$$

ดังนั้นเราจะสามารถสร้างสติฟเนสเมตริกซ์รวมของโครงสร้างสะพานได้จากการรวม (assembly) สติฟเนสเมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน โดยที่เอลิเมนต์แรกจะมีสติฟเนสเมตริกซ์ดังสมการที่ 2.91 เอลิเมนต์สุดท้ายดังสมการที่ 2.92 และเอลิเมนต์ที่เหลือในชวงกลางก็ใช้สติฟเนสเมตริกซ์ของออยเลอร์-เบอร์นูลลีตามปกติ และนำสติฟเนสเมตริกซ์ทุก ๆ เอลิเมนต์มารวมกันตามหลักสติฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness) ก็จะได้สติฟเนสเมตริกซ์รวม โดยที่สติฟเนสเมตริกซ์รวมของทุก ๆ  $n$  เอลิเมนต์ที่ได้ จะเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ  $(2n+2) \times (2n+2)$  ดังนี้

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix}_{(2n+2) \times (2n+2)} \quad (2.93)$$

โดยที่สติฟเนสเมตริกซ์รวมที่ได้ ก็จะนำไปแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่ในสมการที่ 2.25 และนำไปสู่ขั้นตอนการหาน้ำหนักตามปกติ