

โปรแกรมหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อสร้างแถบความเชื่อมั่น
แบบเชิงเส้นเป็นช่วงสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ

นายธีรุตม์ สุขสกุลวัฒน์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2554

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR) are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

PROGRAM FOR FINDING OPTIMAL INDEPENDENCE POINTS FOR
PIECEWISE LINEAR CONFIDENCE BAND CONSTRUCTION FOR
MULTIPLE LINEAR REGRESSION MODELS

Mr. Teerut Suksakulwat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Statistics

Department of Statistics

Faculty of Commerce and Accountancy

Chulalongkorn University

Academic Year 2011

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

โปรแกรมหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อสร้างแถบความ
เชื่อมันแบบเชิงเส้นเป็นช่วงสำหรับตัวแบบการถดถอย
เชิงเส้นพหุ

โดย

นายธีรุตม์ สุขสกุลวัฒน์

สาขาวิชา

สถิติ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับ
นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบริหารธุรกิจ

..... คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี
(รองศาสตราจารย์ ดร. พสุ เดชะรินทร์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร. อรุณี กำลัง)

ธีรุตม์ สุขสกุลวัฒน์ : โปรแกรมหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อสร้างแถบความเชื่อมั่นแบบเชิงเส้นเป็นช่วงสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ. (PROGRAM FOR FINDING OPTIMAL INDEPENDENCE POINTS FOR PIECEWISE LINEAR CONFIDENCE BAND CONSTRUCTION FOR MULTIPLE LINEAR REGRESSION MODELS) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ. ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์, 77 หน้า.

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อนำไปสร้างแถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุเมื่อมีจำนวนตัวแปรอิสระ 2 ตัว ในกรณีดังกล่าวจุดอิสระใดๆ จะเป็นฟังก์ชันของจุดที่มีระยะห่างเท่ากันบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ซึ่งจุดเหล่านี้สามารถแทนด้วยมุมระหว่างเวกเตอร์ของจุดใดๆ บนเส้นรอบวงกลมดังกล่าวกับแกนแนวนอนได้ โดยเกณฑ์การตัดสินใจคือเลือกใช้มุมที่ทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด ด้วยเกณฑ์ดังกล่าวแถบความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นจะมีอัตราประโยชน์เทียบกับข้อมูลสูงที่สุด

ภาควิชา.....สถิติ..... ลายมือชื่อนิสิต.....
 สาขาวิชา.....สถิติ..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....
 ปีการศึกษา.....2554.....

5281825326 : MAJOR STATISTICS

KEYWORDS : MULTIPLE LINEAR REGRESSION / CONFIDENCE BANDS / CONVEX ANALYSIS

TEERUT SUKSAKULWAT : PROGRAM FOR FINDING OPTIMAL INDEPENDENCE POINTS FOR PIECEWISE LINEAR CONFIDENCE BAND CONSTRUCTION FOR MULTIPLE LINEAR REGRESSION MODELS.
ADVISOR : ASST. PROF. SEKSAN KIATSUPAIBUL, Ph.D., 77 pp.

The objective of this research is to compute an optimal set of independence points for confidence band construction for multiple linear regression models of two independent variables. In this case, any set of independence points can be written as a function of a set of equidistant points on the circumference of the unit circle with center at the origin. These points can be represented by the angle between the vector of any single point on a unit circle and the horizontal axis. The decision criterion is to choose the angle that maximizes the number of data covered by the convex hull formed by the independence points. In this way, the utilization of the constructed confidence band is optimized with respect to the data set.

Department :~~Statistics~~..... Student's Signature

Field of Study :~~Statistics~~..... Advisor's Signature

Academic Year :2011.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนสำคัญในการศึกษาระดับมหาบัณฑิต ผู้วิจัยต้องอาศัยความรู้ ประสบการณ์ ตลอดจนความอดทนเพื่อให้สำเร็จเป็นรูปเล่ม อย่างไรก็ตามความสำเร็จครั้งนี้จะเกิดขึ้นไม่ได้ หากปราศจากการสนับสนุนและความช่วยเหลือจากคณะบุคคลดังต่อไปนี้ จึงขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

กราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์ อาจารย์ที่ปรึกษา วิทยานิพนธ์ที่คอยดูแลช่วยเหลือให้คำปรึกษา ชี้แนะ และตรวจสอบแก้ไข จนบรรลุวัตถุประสงค์ ตามที่ตั้งไว้ ตลอดระยะเวลาที่ทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

กราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล คุรงค์วัฒนา ประธานกรรมการสอบ วิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา และ อาจารย์ ดร.อรุณี กำลัง กรรมการ ผู้ตรวจสอบวิทยานิพนธ์ที่คอยให้คำชี้แนะที่เป็นประโยชน์ยิ่งต่อผู้วิจัย

กราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านในภาควิชาสถิติที่คอยประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ เพื่อให้สามารถนำไปใช้ในการดำเนินชีวิตต่อไปในอนาคต

กราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และญาติพี่น้องทุกคน ในความรักความอบอุ่นที่มีให้ ตลอดเวลาในยามที่อดอยและการสนับสนุนอย่างดีมาโดยตลอด

และที่ขาดไม่ได้คือ ขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ภาควิชาสถิติทุกคนที่คอยให้กำลังใจและ คำแนะนำตลอดมา ทำให้ผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์จนสำเร็จลุล่วงออกมาได้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฌ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	2
1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น.....	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย.....	4
2.1 การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น.....	4
2.1.1 ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น.....	4
2.1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์.....	5
2.1.3 ช่วงความเชื่อมั่นและการพยากรณ์.....	6
2.2 แลบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย.....	7
2.2.1 แนวคิดการหาแลบความเชื่อมั่น.....	7
2.2.2 แลบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก.....	7
2.2.2.1 แลบแบบสองด้าน.....	7
2.2.2.2 แลบแบบด้านเดียว.....	11
2.2.3 แลบความเชื่อมั่นสามส่วน.....	13
2.2.3.1 แลบแบบสองด้าน.....	13
2.2.3.2 แลบแบบด้านเดียว.....	15
2.2.4 แลบความเชื่อมั่นสองส่วน.....	17
2.2.4.1 แลบแบบสองด้าน.....	17
2.2.4.2 แลบแบบด้านเดียว.....	19

	หน้า
2.3 แถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ.....	20
2.3.1 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไป.....	20
2.3.1.1 แถบแบบสองด้าน.....	20
2.3.1.2 แถบแบบด้านเดียว.....	22
2.3.2 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ.....	24
2.3.2.1 การเลือกจุดอิสระ.....	24
2.3.2.2 แถบแบบสองด้าน.....	25
2.3.2.3 แถบแบบด้านเดียว.....	25
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	29
3.1 แผนการศึกษาวิจัย.....	29
3.2 ขั้นตอนในการศึกษาวิจัย.....	30
บทที่ 4 ผลการวิจัย.....	32
4.1 ข้อจำกัดในการใช้งานโปรแกรม.....	32
4.2 ผลการศึกษาการคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด.....	33
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	50
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	50
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	51
รายการอ้างอิง.....	52
ภาคผนวก.....	53
ภาคผนวก ก การติดตั้งโปรแกรม R และ Packages ส่วนเสริม.....	54
ภาคผนวก ข โปรแกรมสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด แบบสองด้านกรณีมีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ด้วยโปรแกรม R.....	57
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	77

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 การประมาณตัวแบบการถดถอยจากข้อมูลในตารางที่ 2.2.....	8
2.2 ข้อมูลของ Kleinbaum <i>et al.</i>	9
2.3 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน.....	11
2.4 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบด้านเดียว.....	12
2.5 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้าน.....	15
2.6 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบด้านเดียว.....	16
2.7 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน.....	18
2.8 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบด้านเดียว.....	20
2.9 ข้อมูลทารกแรกเกิดของ Liu.....	21
2.10 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปแบบสองด้าน.....	22
2.11 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปแบบด้านเดียว.....	23
2.12 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น.....	27
2.13 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน.....	28
4.1 ข้อมูลการจำลองตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ กรณี $n = 50$	34
4.2 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณี $n = 50$	37
4.3 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณี $n = 50$	37
4.4 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณี $n = 50$	38
4.5 ข้อมูลการจำลองตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ กรณี $n = 100$	40
4.6 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณี $n = 100$	41
4.7 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณี $n = 100$	43
4.8 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณี $n = 100$	43
4.9 ข้อมูล Rubber	45
4.10 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณีข้อมูลจากการนำเข้า...	48
4.11 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	48
4.12 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า...	49

สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน.....	8
2.2 จุดข้อมูลและเส้นการพยากรณ์จากข้อมูลในตารางที่ 2.2.....	10
2.3 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $(18, 70)$ และ $(-\infty, \infty)$	10
2.4 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง $(18, 70)$ และ $(-\infty, \infty)$	12
2.5 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้าน.....	13
2.6 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้านของ Gafarian.....	14
2.7 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน.....	14
2.8 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างบนแบบด้านเดียวและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก ข้างบนแบบด้านเดียว.....	16
2.9 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน.....	17
2.10 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกและแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน.....	18
2.11 แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนแบบด้านเดียวและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก ข้างบนแบบด้านเดียว.....	19
2.12 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านบนปริภูมิ η^2 ของตัวแปรอิสระ.....	21
2.13 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างแบบด้านเดียวบนปริภูมิ η^2 ของตัวแปรอิสระ.	23
2.14 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ.....	26
2.15 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับระนาบของแถบความเชื่อมั่น ทั้ง 7 ระนาบ.....	27
3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน e_1, e_2 และ e_3	29
3.2 ผังงานขั้นตอนการวิจัย.....	31
4.1 แผงควบคุม กรณี $n = 50$	33
4.2 มุมที่สามารถนำมาสร้างจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณี $n = 50$	34
4.3 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณี $n = 50$	35
4.4 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 50$	36
4.5 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับระนาบของแถบความเชื่อมั่น ทั้ง 7 ระนาบ กรณี $n = 50$	36
4.6 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé และแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 50$	38

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
4.7 แผงควบคุม กรณี $n = 100$	39
4.8 มุมที่สามารถนำมาสร้างจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณี $n = 100$	39
4.9 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณี $n = 100$	41
4.10 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 100$	42
4.11 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับระนาบของแถบความเชื่อมั่น ทั้ง 7 ระนาบ กรณี $n = 100$	42
4.12 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé และแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 100$	44
4.13 แผงควบคุม กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	44
4.14 มุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	45
4.15 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า....	46
4.16 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	47
4.17 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับระนาบของแถบความเชื่อมั่น ทั้ง 7 ระนาบ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	47
4.18 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé และแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า.....	49
ก1 การติดตั้งโปรแกรม R.....	54
ก2 หน้าต่างโปรแกรม R.....	55
ก3 ตัวอย่างการติดตั้ง Packages ส่วนเสริม.....	56
ก4 ตัวอย่างการให้ Packages ส่วนเสริมทำงาน.....	56

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการวิเคราะห์ทางสถิติเกี่ยวกับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งที่ต้องการทราบคือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระ ซึ่งมักนำเสนอออกมาเป็นสมการทางคณิตศาสตร์หรือตัวแบบการถดถอยเพื่อนำมาพยากรณ์ค่าของตัวแปรตามในกรณีที่ทราบค่าของตัวแปรอิสระ แต่อย่างไรก็ตามตัวแบบการถดถอยที่ใช้พยากรณ์นี้ยังไม่ใช่ตัวแบบการถดถอยที่แท้จริงสำหรับข้อมูล ทำให้ในบางครั้งเราสนใจอยากทราบว่าตัวแบบที่แท้จริงซึ่งไม่ทราบค่า มีการวางตัวหรือมีพิสัยอยู่ที่ใด วิธีที่สามารถใช้หาพิสัยดังกล่าวได้ก็คือ การสร้างแถบความเชื่อมั่น (Confidence bands) ซึ่งเป็นเครื่องมือใช้บอกพิสัยที่เป็นไปได้ของตัวแบบที่แท้จริง และนำเสนอผลลัพธ์การวิเคราะห์ห่อออกมาในเชิงกราฟิก โดยแรกเริ่มการศึกษาเกี่ยวกับแถบความเชื่อมั่นจะศึกษาเพื่อใช้สำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งมีอยู่ 3 ประเภท ที่ได้รับการยอมรับมากที่สุดคือ แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Working และ Hotelling (1929) แถบความเชื่อมั่นสามส่วนของ Gafarian (1964) และแถบความเชื่อมั่นสองส่วนของ Graybill และ Bowden (1967) ต่อมาได้ขยายแนวคิดเพื่อนำไปใช้กับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ โดยแถบความเชื่อมั่นที่เป็นที่รู้จักกันมากที่สุดคือ แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé (1953) ซึ่งพัฒนามาจากแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Working และ Hotelling แต่เนื่องจากแถบความเชื่อมั่นดังกล่าวมีลักษณะเป็นส่วนโค้ง ทำให้เกิดความซับซ้อนในการประยุกต์ใช้งาน เป็นสาเหตุให้มีผู้คิดค้นวิธีใหม่ขึ้นมาคือ การสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระของ Hayter, Kiatsupaibul, Liu และ Wynn (2010) ซึ่งพัฒนามาจากแถบความเชื่อมั่นสามส่วนของ Gafarian โดยแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระจะมีลักษณะของพื้นผิวเป็นเชิงเส้นเป็นช่วง (Piecewise Linear) ทำให้ง่ายและยืดหยุ่นต่อการประยุกต์ใช้งานมากกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé กระบวนการที่สำคัญของการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระคือ การเลือกใช้จุดอิสระซึ่งไม่ได้มีเพียงแบบเดียว ก่อให้เกิดลักษณะทางกายภาพของแถบความเชื่อมั่นที่แตกต่างกัน ในงานวิจัยนี้จึงต้องการคำนวณหาจุดอิสระที่

เหมาะสมที่สุดเพื่อนำไปสร้างแถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุเมื่อมีจำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 2 ตัว ($k = 2$) อันเป็นขั้นมูลฐานที่สุดสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ โดยเกณฑ์การตัดสินใจคือ เลือกใช้จุดอิสระที่ทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด เพื่อประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติได้สูงที่สุด

ในงานวิจัยนี้ได้เชื่อมโยงพื้นฐานในเรื่องการประมาณ เพื่อนำไปสู่การสร้างแถบความเชื่อมั่นประเภทต่างๆ สำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายและตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างและชุดคำสั่งของโปรแกรม R เพื่อใช้เปรียบเทียบแถบความเชื่อมั่นประเภทต่างๆ ในเชิงกราฟิกไว้ด้วย

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลกระทบของมุมที่หมุนไปของจุดที่มีระยะห่างเท่ากันที่มีต่อการคลุมจุดข้อมูลภายในบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ
2. เพื่อหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดในการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระโดยใช้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์
3. เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ในเชิงกราฟิกของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระกับแถบความเชื่อมั่นของ Scheffé

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. จำนวนตัวแปรอิสระที่นำมาศึกษาในที่นี้คือ 2 ตัวแปร ($k = 2$)
2. ขนาดตัวอย่าง (n) ในการจำลองข้อมูลจากตัวแบบ คือ 50, 100 และข้อมูลจากการนำเข้า
3. ในการจำลองข้อมูล ตัวแปรอิสระ x_1, x_2 และความคลาดเคลื่อน e มีการแจกแจงปกติ $N(0, 100)$, $N(0, 100)$ และ $N(0, 49)$ ตามลำดับ โดยตัวแปรอิสระ x_1, x_2 ต้องไม่มีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์และสัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแบบ คือ $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

สัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือ

- ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่และเข้ม เช่น **X** หมายถึง เมทริกซ์
- ตัวอักษรพิมพ์เล็กและเข้ม เช่น **x** หมายถึง เวกเตอร์
- ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่และไม่เข้ม เช่น *X* หมายถึง ค่าในเมทริกซ์
- ตัวอักษรพิมพ์เล็กและไม่เข้ม เช่น *x* หมายถึง ตัวแปร

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อเป็นแนวทางในการตัดสินใจว่าควรเลือกใช้มุมใดในการหมุนจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน เพื่อสร้างจุดอิสระที่เหมาะสมภายใต้สถานการณ์ต่างๆ
2. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเปรียบเทียบหรือพัฒนาวิธีการสร้างแถบความเชื่อมั่นในกรณีที่มีจำนวนตัวแปรอิสระมากขึ้น
3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเปรียบเทียบเกณฑ์ทางสถิติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องต่อไป

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วน คือ 2.1 การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น 2.2 แถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และ 2.3 แถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ

2.1 การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น

2.1.1 ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น (Linear regression models)

การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นคือเครื่องมือที่ใช้ประเมินถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ซึ่งจะแยกออกเป็น 2 ลักษณะ คือ ตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x_1, \dots, x_k โดยสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ได้เป็น

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + e \quad (2.1)$$

เมื่อ β_0, \dots, β_k เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าจริง เรียกว่าสัมประสิทธิ์การถดถอย (Regression coefficients) และ e คือความคลาดเคลื่อนจากการสังเกตที่สมมติว่ามีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และมีความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2 > 0$

ในกรณีสุ่มตัวอย่างขนาดเท่ากับ n มาทำการศึกษา สมการ (2.1) จะเป็น

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \dots + \beta_k x_{kj} + e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

เมื่อ x_{ij} หมายถึง ตัวแปรอิสระตัวที่ i ของข้อมูลค่าสังเกตที่ j เมื่อ $i = 1, \dots, k$ และ $j = 1, 2, \dots, n$ ในทำนองเดียวกัน y_j หมายถึง ตัวแปรตามของข้อมูลค่าสังเกตที่ j ในกรณีทั่วไปสามารถเขียนสมการการถดถอยดังกล่าวในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (2.2)$$

เมื่อ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, $\mathbf{X} = (\mathbf{1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ โดย $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})'$ และ $\mathbf{1}$ คือเวกเตอร์แนวตั้ง (Column vector) ขนาดเท่ากับ n ที่ทุกสมาชิกมีค่าเป็น 1 และ \mathbf{X} คือเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระหรือ Design matrix เมื่อเวกเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอยและเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนคือ

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$ และ $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)'$ ตามลำดับ ในงานวิจัยนี้จะสมมติให้ \mathbf{X} มีค่าลำดับชั้นของสมมติเพิ่มเติมรูปเสมอเพื่อความสะดวกในการประมาณค่าพารามิเตอร์

2.1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter estimation)

สมการ (2.2) คือ รูปแบบทั่วไปของตัวแบบเชิงเส้น และสามารถอธิบายแนวโน้มของเวกเตอร์ตัวแปรตาม \mathbf{y} ด้วยเวกเตอร์การประมาณ $\hat{\mathbf{y}}$ จากสมการ $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ได้ เมื่อ $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)'$ เป็นตัวประมาณของ $\boldsymbol{\beta}$ และ $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)'$ โดยเรียก $\hat{y}_j = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1j} + \dots + \hat{\beta}_k x_{kj}$ เมื่อ $j = 1, 2, \dots, n$ ว่าค่าพยากรณ์ (Predicted value) และเรียก $\hat{e}_j = y_j - \hat{y}_j$ ว่าส่วนตกค้าง (Residual) โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเชิงเส้นในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีกำลังสองของส่วนตกค้างน้อยที่สุด (Least square residual method) กล่าวคือเป็นการหาค่าประมาณที่ทำให้ $\sum_{j=1}^n \hat{e}_j^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2$ มีค่าต่ำที่สุด ดังนี้

$$\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = f(\boldsymbol{\beta}) \quad (2.3)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)'$ และเวกเตอร์การประมาณอยู่ในรูป $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ โดยวิธีนี้เราต้องเลือกค่า $\boldsymbol{\beta}$ ที่ทำให้ $f(\boldsymbol{\beta})$ มีค่าน้อยที่สุด จากการใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ร่วมกับสมการ (2.3) จะได้

$$\left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(-\mathbf{X}) + (-\mathbf{X})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2(\mathbf{X})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \stackrel{set}{=} 0$$

กล่าวคือ

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการปกติ (Normal equation) สำหรับค่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

เนื่องจากเมทริกซ์ \mathbf{X} มีค่าลำดับชั้นของสมมติเพิ่มเติมรูป ทำให้สามารถหาค่า $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ได้ ดังนั้นจากสมการปกติ เวกเตอร์การประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยจึงเป็น

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.4)$$

จาก $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ และ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ของสมการ (2.4) ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ \mathbf{y} กับ $\hat{\mathbf{y}}$ คือ

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

เรียก $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ ว่า Hat matrix เพราะเมทริกซ์นี้ทำหน้าที่เปลี่ยนเวกเตอร์ \mathbf{y} ไปสู่ $\hat{\mathbf{y}}$ และความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ \mathbf{y} กับ $\hat{\mathbf{e}}$ คือ

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{y}$$

ส่วนการประมาณค่าความแปรปรวน σ^2 สามารถคำนวณได้จาก

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SSE}}{n-k-1} = \frac{\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}}}{n-k-1} = \frac{(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})}{n-k-1}$$

2.1.3 ช่วงความเชื่อมั่นและการพยากรณ์ (Confidence and prediction intervals)

ช่วงความเชื่อมั่นอาจพิจารณาเป็นการประมาณค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามตามตัวแบบ (2.1) ซึ่งกำหนดโดยเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_k)'$ โดยค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามในที่นี้คือ $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ และสามารถประมาณได้ด้วย $\mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ เนื่องจาก

$$\mathbf{x}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x})$$

เพราะว่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ และ $\hat{\sigma}$ เป็นอิสระต่อกัน ทำให้

$$\frac{\mathbf{x}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim t_{n-k-1}$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ คือ

$$P\left(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1} \hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}\right) = 1-\alpha$$

เมื่อ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1}$ คือ ตัวสถิติทดสอบที่มีการแจกแจง t ซึ่งมีพื้นที่ทางด้านซ้ายมือเท่ากับ $1-\frac{\alpha}{2}$ ด้วย

องศาความเป็นอิสระ $n-k-1$

ในบางครั้งเราอาจสนใจพยากรณ์ค่าของตัวแปรตามในอนาคต y_f ซึ่งกำหนดโดยเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_k)'$ เมื่อ $y_f = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + e_f$ และ e_f คือความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับ y_f ตามตัวแบบ (2.1) เนื่องจาก

$$y_f - \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = e_f - \mathbf{x}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim N(0, \sigma^2 + \sigma^2 \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x})$$

เพราะว่า $e_f \sim N(0, \sigma^2)$ และ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ เป็นอิสระต่อกัน ทำให้

$$\frac{y_f - \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim t_{n-k-1}$$

ดังนั้นช่วงการพยากรณ์ $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ y_f คือ

$$P\left(y_f \in \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1} \hat{\sigma}\sqrt{1 + \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}\right) = 1-\alpha$$

2.2 แถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

(Confidence bands for simple linear regression model)

2.2.1 แนวคิดการหาแถบความเชื่อมั่น

สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งในการอนุมานการวิเคราะห์การถดถอย คือการประเมินถึงตัวแบบที่แท้จริง $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ ที่ไม่ทราบค่า ว่ามีพิสัยอยู่ที่ใด วิธีที่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับพิสัยดังกล่าว คือการสร้างแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง (Simultaneous confidence bands) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้บอกถึงพิสัยที่เป็นไปได้ของตัวแบบที่แท้จริง $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ กล่าวคือ หากมีตัวแบบการถดถอยอื่นใด $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}^*$ วางตัวอยู่ภายในแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง จะถือว่าตัวแบบนั้นมีโอกาสเป็นตัวแบบที่แท้จริง ในทางกลับกันหากตัวแบบ $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}^*$ ไม่สามารถวางตัวอยู่ภายในแถบความเชื่อมั่นได้อย่างสมบูรณ์ จะถือว่าตัวแบบนั้นไม่มีโอกาสเป็นตัวแบบที่แท้จริง

ในตอนนี้จะพิจารณาถึงตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งมีตัวแปรอิสระ x_i ในตัวแบบเพียงตัวเดียวเท่านั้น โดยจะแทนตัวแปรอิสระ x_i ด้วย x และให้ $n-k-1 = n-2$ แทนด้วย ν โดยกำหนดให้ $v(c, d) = \text{Var}(c\hat{\beta}_0 + d\hat{\beta}_1) / \sigma^2$

2.2.2 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic confidence bands)

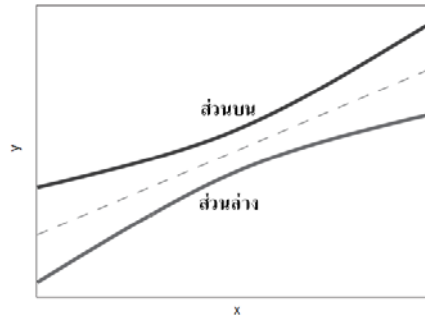
2.2.2.1 แถบแบบสองด้าน (Two-sided band)

แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านบนช่วง $x \in (a, b)$ มีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \pm c\hat{\sigma}\sqrt{v(1, x)} \quad \forall x \in (a, b)$$

เมื่อ c คือค่าคงที่วิกฤตที่ต้องเลือกเพื่อให้ระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ $1-\alpha$ โดย Working และ Hotelling (1929) ได้นำเสนอแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกในกรณีเฉพาะ $(a, b) = (-\infty, \infty)$ และเรียกกรณีเฉพาะนี้ว่าแถบความเชื่อมั่นแบบ Working & Hotelling

รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.1 โดยศูนย์กลางของแถบความเชื่อมั่นที่ x คือ $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ ขณะที่ความกว้างของแถบความเชื่อมั่นเป็น $2c\hat{\sigma}\sqrt{v(1, x)}$ โดยความกว้างจะน้อยที่สุดที่ $x = \bar{x}$ และจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นเมื่อ x อยู่ห่างจาก \bar{x} ออกไปทางด้านใดด้านหนึ่ง



ภาพที่ 2.1 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c ต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1 - \alpha = 1 - \frac{\phi}{\pi} \left(1 + \frac{c^2}{\gamma}\right)^{-\gamma/2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{(\pi - \phi)/2} \left(1 + \frac{c^2}{\gamma \sin^2(\theta + \phi/2)}\right)^{-\gamma/2} d\theta \quad (2.5)$$

เมื่อมุม ϕ สามารถคำนวณได้จาก

$$\cos \phi = (1, a)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} / \sqrt{v(1, a) v(1, b)} \quad (2.6)$$

เมื่อ $\cos \phi$ คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation coefficient) ระหว่าง $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 a$ และ $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 b$

สำหรับกรณีเฉพาะ $(a, b) = (-\infty, \infty)$ ค่าคงที่วิกฤตจะเป็น $c = \sqrt{2 f_{1-\alpha, 2, \gamma}}$ เมื่อ $f_{1-\alpha, 2, \gamma}$ คือตัวสถิติทดสอบที่มีการแจกแจง F ซึ่งมีพื้นที่ทางด้านซ้ายมือเท่ากับ $1 - \alpha$ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 2 และ γ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.1 การศึกษาการถดถอยระหว่างความดันโลหิตสูงสุด (y) (หน่วย: mm Hg) ที่มีต่ออายุ (x) (หน่วย: ปี) ของกลุ่มผู้ชายจำนวน 40 คน มีข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.1 การประมาณตัวแบบการถดถอยจากข้อมูลในตารางที่ 2.2

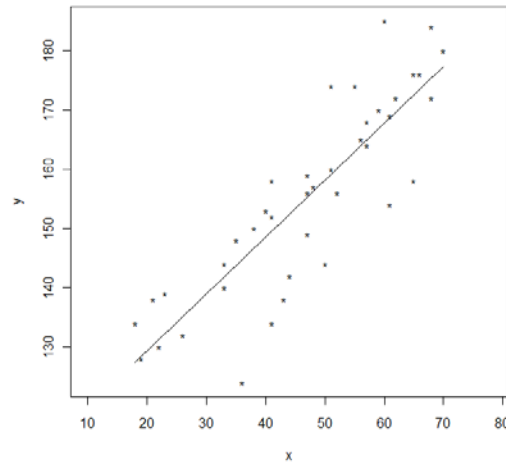
```
> x<- c(41, 60, 41, 47, 66, 47, 68, 43, 68, 57, 65, 57, 61, 36, 44, 50, 47, 19, 22, 21,
+      38, 52, 41, 18, 51, 55, 65, 33, 23, 70, 56, 62, 51, 48, 59, 40, 35, 33, 26, 61)
> y<- c(158, 185, 152, 159, 176, 156, 184, 138, 172, 168, 176, 164, 154, 124, 142,
+      144, 149, 128, 130, 138, 150, 156, 134, 134, 174, 174, 158, 144, 139, 180,
+      165, 172, 160, 157, 170, 153, 148, 140, 132, 169)
> mean.x<- mean(x); min.x<- min(x); max.x<- max(x)
> range.x<- cbind(mean.x, min.x, max.x); range.x
      mean.x min.x max.x
[1,] 46.925  18    70
> fit.model<- lm(y ~ x); summary(fit.model)$coef
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 110.0385285  4.48923170  24.51166 6.847009e-25
x            0.9613526  0.09130237  10.52933 7.984950e-13
```

ตารางที่ 2.2 ข้อมูลของ Kleinbaum *et al.* (1998, หน้า 192)

คนที่	อายุ (ปี)	ความดันโลหิต (mm Hg)	คนที่	อายุ (ปี)	ความดันโลหิต (mm Hg)
i	x	y	i	x	y
1	41	158	21	38	150
2	60	185	22	52	156
3	41	152	23	41	134
4	47	159	24	18	134
5	66	176	25	51	174
6	47	156	26	55	174
7	68	184	27	65	158
8	43	138	28	33	144
9	68	172	29	23	139
10	57	168	30	70	180
11	65	176	31	56	165
12	57	164	32	62	172
13	61	154	33	51	160
14	36	124	34	48	157
15	44	142	35	59	170
16	50	144	36	40	153
17	47	149	37	35	148
18	19	128	38	33	140
19	22	130	39	26	132
20	21	138	40	61	169

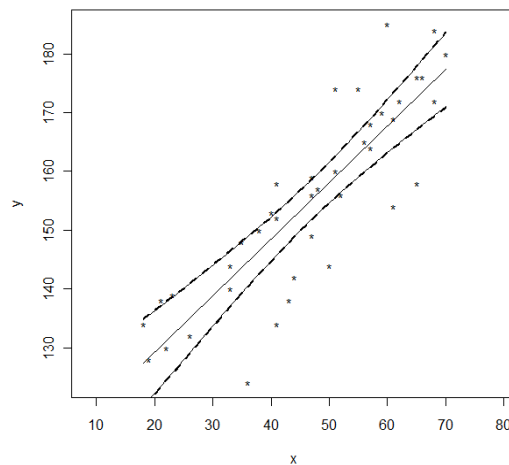
จากผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 2.1 เส้นการพยากรณ์ คือ $\hat{y} = 110.039 + 0.961x$ ดังภาพที่ 2.2 โดยอายุเฉลี่ย คือ $\bar{x} = 46.925$ อายุน้อยที่สุดเท่ากับ 18 และอายุมากที่สุดเท่ากับ 70

ในตัวอย่างนี้จะใช้แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน เพื่อบอกพิสัยที่เป็นไปได้ของเส้นการถดถอยที่แท้จริง ทำให้ต้องสร้างแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $x \in (18, 70) = (a, b)$ เมื่อมุม ϕ กำหนดได้จากสมการ (2.6) จะได้ $\phi = 2.105$ ดังนั้นสำหรับ $\alpha = 0.05$ ค่าคงที่วิกฤต c ของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านบนช่วง $(18, 70)$ จากสมการ (2.5) คือ $c = 2.514$



ภาพที่ 2.2 จุดข้อมูลและเส้นการพยากรณ์จากข้อมูลในตารางที่ 2.2

แต่สำหรับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $x \in (-\infty, \infty)$ ค่าคงที่วิกฤต คือ $c = \sqrt{2f_{0.95, 2, 38}} = 2.547$ โดยแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนช่วง $(18, 70)$ และ $(-\infty, \infty)$ สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $(18, 70)$ และ $(-\infty, \infty)$

จากภาพที่ 2.3 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $(18, 70)$ และ $(-\infty, \infty)$ คือ เส้นโค้งและเส้นประตามลำดับ ที่เกือบทับกันสนิท และหากพิจารณาในแง่ความกว้าง แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$ จะกว้างมากกว่าแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องบนช่วง $(18, 70)$ โดยภาพที่ 2.3 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน

```

> x<- c(41,60,41,47,66,47,68,43,68,57,65,57,61,36,44,50,47,19,22,21,
+      38,52,41,18,51,55,65,33,23,70,56,62,51,48,59,40,35,33,26,61)
> y<- c(158,185,152,159,176,156,184,138,172,168,176,164,154,124,142,
+      144,149,128,130,138,150,156,134,134,174,174,158,144,139,180,
+      165,172,160,157,170,153,148,140,132,169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Simultaneous two.sided conf.band over (18,70)
> SM.crit<- 2.514
> SM.band<- cbind(FV$fit-SM.crit*FV$se.fit, FV$fit+SM.crit*FV$se.fit)
> lines(cbind(new, SM.band[,1]), lty="solid")
> lines(cbind(new, SM.band[,2]), lty="solid")
>
> # Simultaneous two.sided conf.band over (-Inf,Inf)
> SMM.crit<- 2.547
> SMM.band<- cbind(FV$fit-SMM.crit*FV$se.fit, FV$fit+SMM.crit*FV$se.fit)
> lines(cbind(new, SMM.band[,1]), lty="dashed", lwd=2)
> lines(cbind(new, SMM.band[,2]), lty="dashed", lwd=2)

```

□

2.2.2.2 แถบแบบด้านเดียว (One-sided band)

แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่าง (Lower) แบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x > \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - c\hat{\sigma}\sqrt{v(1,x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

ขณะที่แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบน (Upper) แบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x < \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + c\hat{\sigma}\sqrt{v(1,x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

เมื่อค่าคงที่วิกฤต c ที่ทำให้ระดับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนมีค่าเท่ากับ $1-\alpha$ จะเหมือนกับค่าคงที่วิกฤตที่ทำให้ระดับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างมีค่าเท่ากับ $1-\alpha$ ด้วย

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c สำหรับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบด้านเดียวต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

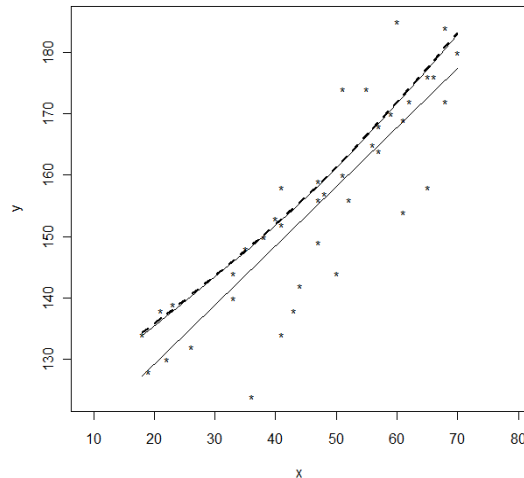
$$1-\alpha = \frac{\pi-\phi}{2\pi} + \frac{1}{2}F_{1,\gamma}(c^2) + \frac{\phi}{2\pi}F_{2,\gamma}\left(\frac{c^2}{2}\right) \quad (2.7)$$

เมื่อ $F_{n,\gamma}$ คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F ด้วยองศาความเป็นอิสระ n และ γ ตามลำดับ

สำหรับกรณีเฉพาะ $(a,b) = (-\infty, \infty)$ ค่าคงที่วิกฤต c ต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1-\alpha = \frac{1}{2}F_{1,\gamma}(c^2) + \frac{1}{2}F_{2,\gamma}\left(\frac{c^2}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.1 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียว 95% บนช่วง (18, 70) จากตัวอย่างที่ 2.1 ทราบว่า $\phi = 2.105$ ดังนั้นค่าคงที่วิกฤต c ของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง (18, 70) จากสมการ (2.7) คือ $c = 2.213$ ส่วนแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง $(-\infty, \infty)$ ค่าคงที่วิกฤต คือ $c = 2.350$ แถบความเชื่อมั่นดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง (18, 70) และ $(-\infty, \infty)$

จากภาพที่ 2.4 แถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง $(-\infty, \infty)$ จะเป็นเส้นประที่อยู่สูงกว่าแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องข้างบนด้านเดียวบนช่วง (18, 70) ที่เป็นเส้นโค้ง โดยภาพที่ 2.4 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบด้านเดียว

```
> x<- c(41,60,41,47,66,47,68,43,68,57,65,57,61,36,44,50,47,19,22,21,
+      38,52,41,18,51,55,65,33,23,70,56,62,51,48,59,40,35,33,26,61)
> y<- c(158,185,152,159,176,156,184,138,172,168,176,164,154,124,142,
+      144,149,128,130,138,150,156,134,134,174,174,158,144,139,180,
+      165,172,160,157,170,153,148,140,132,169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Simultaneous upper conf.band over (18,70)
> SM.crit<- 2.213; SM.band<- FV$fit+SM.crit*FV$se.fit
> lines(cbind(new, SM.band), lty="solid")
>
> # Simultaneous upper conf.band over (-Inf,Inf)
> SMM.crit<- 2.35; SMM.band<- FV$fit+SMM.crit*FV$se.fit
> lines(cbind(new, SMM.band), lty="dashed", lwd=2)
```

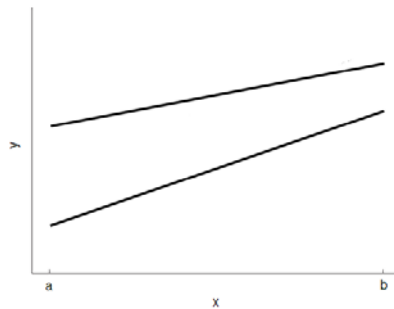
2.2.3 แถบความเชื่อมั่นสามส่วน (Three-segment confidence bands)

2.2.3.1 แถบแบบสองด้าน (Two-sided band)

แถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้านมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \pm \hat{\sigma} H_3(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

โดย $H_3(x) = \frac{1}{b-a} \left((x-a)c_1\sqrt{v(1,b)} + (b-x)c_2\sqrt{v(1,a)} \right)$, $x \in (a, b)$ เมื่อ c_1 และ c_2 คือค่าคงที่วิกฤตที่ต้องเลือกเพื่อให้ระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ $1-\alpha$ รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสามส่วนสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.5 โดยส่วนบนและส่วนล่างมีลักษณะเป็นส่วนของเส้นตรงบนช่วง $x \in (a, b)$ ขณะที่ความกว้างของแถบความเชื่อมั่นจะเป็น $2c_2\sqrt{v(1,a)}$ ที่ $x = a$ และ $2c_1\sqrt{v(1,b)}$ ที่ $x = b$



ภาพที่ 2.5 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้าน

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c_1, c_2 สำหรับแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้านต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

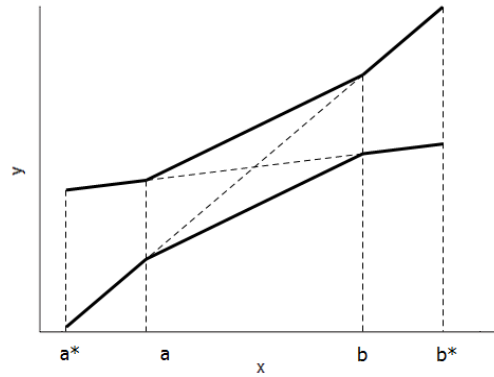
$$1-\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-(\pi-\eta)}^{\xi} F_{R_T} \left(\frac{c_1}{\cos \theta} \right) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\xi-\phi}^{\eta-\phi} F_{R_T} \left(\frac{c_2}{\cos \theta} \right) d\theta \quad (2.8)$$

$$\text{เมื่อ } \xi = \arcsin \left(\frac{c_2 - c_1 \cos \phi}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2 - 2c_2c_1 \cos \phi}} \right), \quad \eta = \arcsin \left(\frac{-c_1 \sin \phi}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2 + 2c_2c_1 \cos \phi}} \right) \text{ และ}$$

$$F_{R_T}(x) = 1 - (1+x^2/\gamma)^{-\gamma/2}, \quad x > 0$$

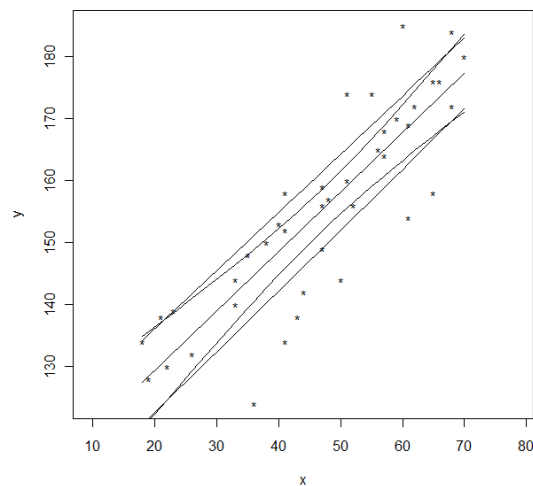
โดย Gafarian (1964) ได้นำเสนอในกรณีเฉพาะ $c_2\sqrt{v(1,a)} = c_1\sqrt{v(1,b)}$ ทำให้แถบความเชื่อมั่นสามส่วนกลายเป็นแถบความเชื่อมั่นที่มีความกว้างคงที่บนช่วง $x \in (a, b)$ และทำการขยายช่วงออกไปสู่ (a^*, b^*) โดยการลากส่วนของเส้นตรงผ่านขอบเขตล่างที่ $x = a$ กับขอบเขต

บนที่ $x = b$ และขอบเขตบนที่ $x = a$ กับขอบเขตล่างที่ $x = b$ ดังภาพที่ 2.6 จึงเป็นที่มาของชื่อแถบความเชื่อมั่นสามส่วน



ภาพที่ 2.6 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้านของ Gafarian

ตัวอย่างที่ 2.3 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.1 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้าน 95% บนช่วง $x \in (18, 70)$ เพื่อเปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน ในการคำนวณค่าคงที่วิกฤต c_1, c_2 จะกำหนดให้ $c_1 = c_2$ เพื่อให้ค่าที่สอดคล้องกับสมการ (2.8) มีเพียงชุดเดียว คือ $c_1 = c_2 = 2.296$ โดยสามารถแสดงแถบความเชื่อมั่นสามส่วนและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านได้ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน

จากภาพที่ 2.7 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนมีแนวโน้มน้อยกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก สำหรับ x ที่อยู่ใกล้จุดปลายที่ $x = a$ และ $x = b$ แต่จะกว้างกว่าสำหรับ x ที่อยู่ใกล้ศูนย์กลางของช่วง $[a, b]$ โดยภาพที่ 2.7 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบสองด้าน

```
> x<- c(41, 60, 41, 47, 66, 47, 68, 43, 68, 57, 65, 57, 61, 36, 44, 50, 47, 19, 22, 21,
+      38, 52, 41, 18, 51, 55, 65, 33, 23, 70, 56, 62, 51, 48, 59, 40, 35, 33, 26, 61)
> y<- c(158, 185, 152, 159, 176, 156, 184, 138, 172, 168, 176, 164, 154, 124, 142,
+      144, 149, 128, 130, 138, 150, 156, 134, 134, 174, 174, 158, 144, 139, 180,
+      165, 172, 160, 157, 170, 153, 148, 140, 132, 169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Hyperbolic two.sided conf.band over (18,70)
> HB.crit<- 2.514
> HB.band<- cbind(FV$fit-HB.crit*FV$se.fit, FV$fit+HB.crit*FV$se.fit)
> lines(cbind(new, HB.band[,1]), lty="solid")
> lines(cbind(new, HB.band[,2]), lty="solid")
>
> # Three-segment two.sided conf.band over (18,70)
> c1<- c2<- 2.296; a<- 18; b<- 70
> new.ab<- data.frame(x=c(a, b)); FV.ab<- predict(fit.model, new.ab, se.fit=TRUE)
> sig.H<- function(x){(1/(b-a))*((x-a)*c1*FV.ab$se.fit[2]+(b-x)*c2*FV.ab$se.fit[1])}
> ThS.band<- cbind(FV$fit-sig.H(new), FV$fit+sig.H(new))
> lines(cbind(new, ThS.band[,1]), lty="solid")
> lines(cbind(new, ThS.band[,2]), lty="solid")
```

□

2.2.3.2 แถบแบบด้านเดียว (One-sided band)

แถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างล่างแบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x > \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - \hat{\sigma} H_3(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

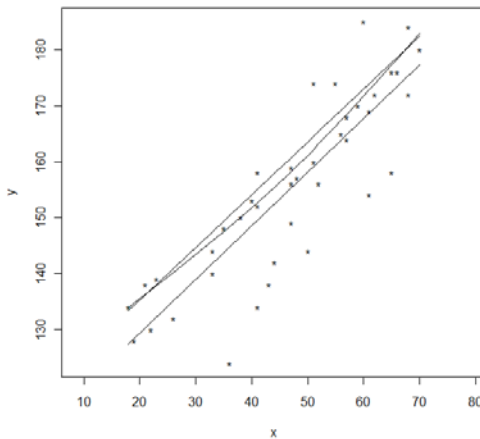
ขณะที่แถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างบนแบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x < \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} H_3(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c_1, c_2 สำหรับแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบด้านเดียวต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1 - \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi - \phi}^{\pi/2} F_{R_r} \left(\frac{c_2}{\cos \theta} \right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\xi} F_{R_r} \left(\frac{c_1}{\cos \theta} \right) d\theta + \frac{\pi - \phi}{2\pi} \quad (2.9)$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.1 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างบนแบบด้านเดียว 95% บนช่วง $x \in (18, 70)$ เพื่อเปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียว โดยการกำหนดให้ $c_1 = c_2$ จากสมการ (2.9) จะได้ $c_1 = c_2 = 2.0243$ แถบความเชื่อมั่นสามส่วนและไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียวสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างบนแบบด้านเดียวและ
และแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียว

จากภาพที่ 2.8 แถบความเชื่อมั่นสามส่วนข้างบนแบบด้านเดียวอยู่ใกล้กับเส้นการพยากรณ์มากกว่า แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียวสำหรับ x ที่อยู่ใกล้จุดปลายที่ $x = a$ และ $x = b$ โดยภาพที่ 2.8 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.6

ตารางที่ 2.6 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสามส่วนแบบด้านเดียว

```
> x<- c(41,60,41,47,66,47,68,43,68,57,65,57,61,36,44,50,47,19,22,21,
+      38,52,41,18,51,55,65,33,23,70,56,62,51,48,59,40,35,33,26,61)
> y<- c(158,185,152,159,176,156,184,138,172,168,176,164,154,124,142,
+      144,149,128,130,138,150,156,134,134,174,174,158,144,139,180,
+      165,172,160,157,170,153,148,140,132,169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Hyperbolic upper conf.band over (18,70)
> HB.up.crit<- 2.213; HB.up.band<- FV$fit+HB.up.crit*FV$se.fit
> lines(cbind(new, HB.up.band), lty="solid")
>
> # Three-segment upper conf.band over (18,70)
> cc1<- cc2<- 2.0243; a<- 18; b<- 70
> new.ab<- data.frame(x=c(a, b)); FV.ab<- predict(fit.model, new.ab, se.fit=TRUE)
> sig.H.up<- function(x){(1/(b-a))*((x-a)*cc1*FV.ab$se.fit[2]+(b-x)*cc2*FV.ab$se.fit[1])}
> ThS.up.band<- FV$fit+sig.H.up(new)
> lines(cbind(new, ThS.up.band), lty="solid")
```

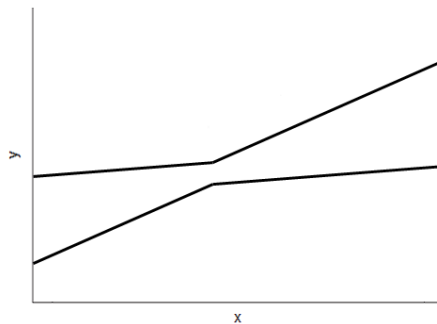
2.2.4 แถบความเชื่อมั่นสองส่วน (Two-segment confidence bands)

2.2.4.1 แถบแบบสองด้าน (Two-sided band)

แถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้านมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \pm \hat{\sigma} H_2(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

โดย $H_2(x) = c_1 \sqrt{v(1, \bar{x})} + c_2 |x - \bar{x}| \sqrt{v(0, 1)}$, $x \in (-\infty, \infty)$ เมื่อ c_1 และ c_2 คือค่าคงที่วิกฤตที่ต้องเลือกเพื่อให้ระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ $1 - \alpha$ รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสองส่วนสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.9 ส่วนบนและส่วนล่างมีลักษณะเป็นส่วนของเส้นตรงสองเส้นต่อกัน และแถบความเชื่อมั่นแคบที่สุดที่ $x = \bar{x}$ โดย Graybill และ Bowden (1967) ได้นำเสนอในกรณีเฉพาะ $c_1 = c_2$ สำหรับสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนนี้



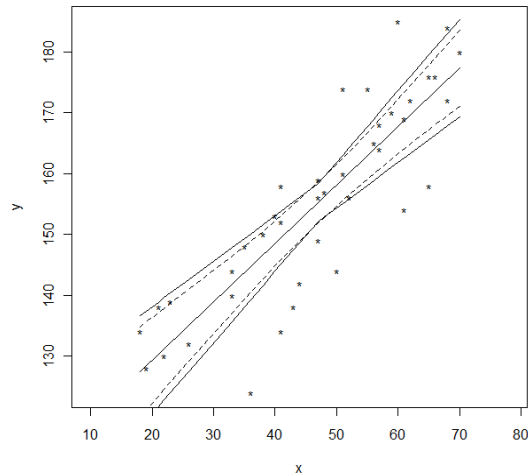
ภาพที่ 2.9 รูปร่างของแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c_1, c_2 สำหรับแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้านต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1 - \alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-(\pi - \eta^*)}^{\xi^*} F_{R_T} \left(\frac{c_1}{\cos \theta} \right) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\xi^* - \pi/2}^{\eta^* - \pi/2} F_{R_T} \left(\frac{c_2}{\cos \theta} \right) d\theta \quad (2.10)$$

เมื่อ $\xi^* = \arcsin \left(c_2 / \sqrt{c_2^2 + c_1^2} \right)$ และ $\eta^* = \arccos \left(-c_1 / \sqrt{c_2^2 + c_1^2} \right)$

ตัวอย่างที่ 2.5 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.1 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน 95% เพื่อเปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน โดยการกำหนดให้ $c_1 = c_2$ จากสมการ (2.10) จะได้ $c_1 = c_2 = 2.326$ แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านและแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้านสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.10



ภาพที่ 2.10 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกและแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน

จากภาพที่ 2.10 แถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้านมีความแคบมากกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน (เส้นประ) ที่ $x = \bar{x}$ โดยภาพที่ 2.10 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.7

ตารางที่ 2.7 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบสองด้าน

```
> x<- c(41,60,41,47,66,47,68,43,68,57,65,57,61,36,44,50,47,19,22,21,
+      38,52,41,18,51,55,65,33,23,70,56,62,51,48,59,40,35,33,26,61)
> y<- c(158,185,152,159,176,156,184,138,172,168,176,164,154,124,142,
+      144,149,128,130,138,150,156,134,134,174,174,158,144,139,180,
+      165,172,160,157,170,153,148,140,132,169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Hyperbolic two.sided conf.band over (18,70)
> SM.crit<- 2.514; SM.band<- cbind(FV$fit-SM.crit*FV$se.fit, FV$fit+SM.crit*FV$se.fit)
> lines(cbind(new, SM.band[,1]), lty="dashed")
> lines(cbind(new, SM.band[,2]), lty="dashed")
>
> # Two-segment two.sided conf.band
> c1<- c2<- 2.326; mean.x<- mean(x); sigmahat<- summary(fit.model)$sigma
> new.xbar<- data.frame(x=mean.x); FV.xbar<- predict(fit.model, new.xbar, se.fit=TRUE)
> sig.HH<- function(x){c1*FV.xbar$se.fit+
+      c2*abs(x-mean.x)*sigmahat*sqrt(1/(sum((x-mean.x)^2)))}
> TwS.band<- cbind(FV$fit-sig.HH(new), FV$fit+sig.HH(new))
> lines(cbind(new, TwS.band[,1]), lty="solid")
> lines(cbind(new, TwS.band[,2]), lty="solid")
```

□

2.2.4.2 แถบแบบด้านเดียว (One-sided band)

แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างล่างแบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x > \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - \hat{\sigma} H_2(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

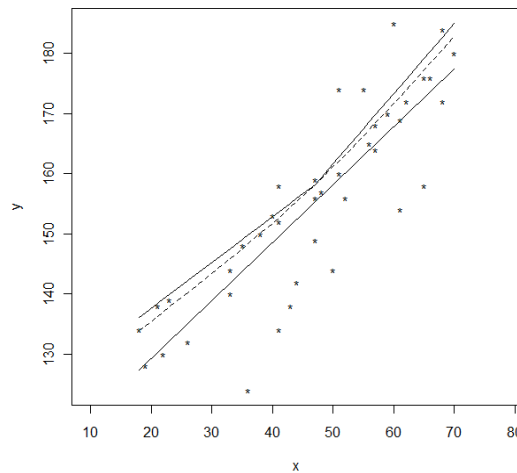
ขณะที่แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนแบบด้านเดียวมีรูปแบบเป็น

$$\beta_0 + \beta_1 x < \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} H_2(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c_1, c_2 สำหรับแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบด้านเดียวต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1 - \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-(\pi - \eta^*)}^{\eta^*} F_{Rr} \left(\frac{c_1}{\cos \theta} \right) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\eta^*}^{\pi/2} F_{Rr} \left(\frac{c_2}{\cos \theta} \right) d\theta \quad (2.11)$$

ตัวอย่างที่ 2.6 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.1 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนแบบด้านเดียว 95% เพื่อเปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียว โดยการกำหนดให้ $c_1 = c_2$ จากสมการ (2.11) จะได้ $c_1 = c_2 = 2.201$ แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนและแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียวสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.11



ภาพที่ 2.11 แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนแบบด้านเดียว
และแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียว

จากภาพที่ 2.11 แถบความเชื่อมั่นสองส่วนข้างบนอยู่ใกล้กับเส้นการพยากรณ์มากกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกที่ $x = \bar{x}$ โดยภาพที่ 2.11 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.8

ตารางที่ 2.8 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นสองส่วนแบบด้านเดียว

```

> x<- c(41,60,41,47,66,47,68,43,68,57,65,57,61,36,44,50,47,19,22,21,
+      38,52,41,18,51,55,65,33,23,70,56,62,51,48,59,40,35,33,26,61)
> y<- c(158,185,152,159,176,156,184,138,172,168,176,164,154,124,142,
+      144,149,128,130,138,150,156,134,134,174,174,158,144,139,180,
+      165,172,160,157,170,153,148,140,132,169)
> dat<- data.frame(x,y); n<- dim(dat)[1]; fit.model<- lm(y ~ x)
> cc<- coef(fit.model); f<- function(x){cc[[1]] + cc[[2]]*x}
> plot(x, y, pch="*", asp=1); lines(c(min(x),max(x)),c(f(min(x)),f(max(x))))
> new<- data.frame(x=sort(x)); FV<- predict(fit.model, new, se.fit=TRUE)
>
> # Hyperbolic upper conf.band over (18,70)
> HB.up.crit<- 2.213; HB.up.band<- FV$fit+HB.up.crit*FV$se.fit
> lines(cbind(new, HB.up.band), lty="dashed")
>
> # Two-segment upper conf.band
> c1<- c2<- 2.201; mean.x<- mean(x); sigmahat<- summary(fit.model)$sigma
> new.xbar<- data.frame(x=mean.x); FV.xbar<- predict(fit.model,new.xbar,se.fit=TRUE)
> sig.HH<- function(x){c1*FV.xbar$se.fit+
+      c2*abs(x-mean.x)*sigmahat*sqrt(1/(sum((x-mean.x)^2)))}
> TwS.up.band<- FV$fit+sig.HH(new)
> lines(cbind(new, TwS.up.band), lty="solid")

```

□

2.3 แถบความเชื่อมั่นสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ

(Confidence bands for multiple linear regression model)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่องสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ $k > 1$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_k)'$

2.3.1 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไป

(Hyperbolic confidence bands over the whole space)

2.3.1.1 แถบแบบสองด้าน (Two-sided band)

แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปด้วยระดับ $1-\alpha$ สำหรับตัวแบบการถดถอย $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ มีรูปแบบเป็น

$$\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm \sqrt{(k+1)f_{1-\alpha, k+1, n-k-1}} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}$$

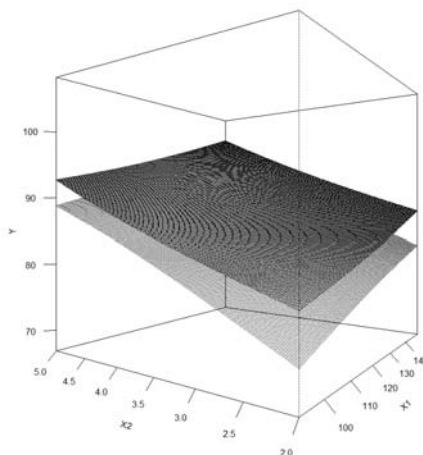
โดย Scheffé (1953) เป็นผู้นำเสนอแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปนี้ และถือว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Working และ Hotelling ด้วย

ตารางที่ 2.9 ข้อมูลทารกแรกเกิดของ Liu (2010, หน้า 2)

ทารกคนที่	น้ำหนักแรกเกิด (ออนซ์)	อายุ (วัน)	ความดันโลหิต (mm Hg)
i	x_1	x_2	y
1	125	3	86
2	101	4	87
3	104	4	87
4	143	5	100
5	92	5	89
6	119	3	86
7	100	4	89
8	149	3	89
9	133	2	83
10	120	4	92
11	118	4	88
12	94	3	79
13	131	5	98
14	93	4	85
15	94	4	87
16	121	5	97
17	96	4	87

ตัวอย่างที่ 2.7 จากข้อมูลในตารางที่ 2.9 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้าน 95%

สำหรับตัวแบบการถดถอย $x'\beta$ คือ $x'\beta \in x'\hat{\beta} \pm 3.167 \hat{\sigma} \sqrt{x'(X'X)^{-1}x}$



ภาพที่ 2.12 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบสองด้านบนปริภูมิ \mathbb{R}^2 ของตัวแปรอิสระ

โดยภาพที่ 2.12 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.10

ตารางที่ 2.10 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปแบบสองด้าน

```
> x1<- c(125,101,104,143,92,119,100,149,133,120,118,94,131,93,94,121,96)
> x2<- c(3,4,4,5,5,3,4,3,2,4,4,3,5,4,4,5,4)
> y<- c(86,87,87,100,89,86,89,89,83,92,88,79,98,85,87,97,87)
> dat<- data.frame(y,x1,x2); n<- dim(dat)[1]; k<- dim(dat)[2]-1
> lm.xy<- lm(y ~ x1 + x2, data=dat); cc<- lm.xy$coef
> Res<- 160; Theta<- -55; Phi<- 0
> xx1<- seq(min(x1),max(x1),length=Res); xx2<- seq(min(x2),max(x2),length=Res)
>
> # Hyperbolic two.sided conf.band for k=2
> HB.crit<- sqrt((k+1)*qf(0.05, k+1, n-k-1, lower.tail=F))
> f.low<- function(xx1,xx2){new.x<- data.frame(x1=xx1, x2=xx2)
+                               PV<- predict(lm.xy, new.x, se.fit=T)
+                               out<- PV$fit-HB.crit*PV$se.fit; out}
> f.up<- function(xx1,xx2){new.x<- data.frame(x1=xx1, x2=xx2)
+                               PV<- predict(lm.xy, new.x, se.fit=T)
+                               out<- PV$fit+HB.crit*PV$se.fit; out}
> y.low<- outer(xx1, xx2, f.low); y.up<- outer(xx1, xx2, f.up)
> x.min<- min(xx1); x.max<- max(xx1); y.min<- min(xx2); y.max<- max(xx2)
> z.min<- min(f.low(x.min,y.min),f.low(x.min,y.max),
+             f.low(x.max,y.min),f.low(x.max,y.max))
> z.max<- max(f.low(x.min,y.min),f.low(x.min,y.max),
+             f.low(x.max,y.min),f.low(x.max,y.max))
> low.HB.band<- persp(xx1,xx2,y.low,xlim=c(x.min,x.max),ylim=c(y.min,y.max),
+                     zlim=c(z.min-5,z.max+10),theta=Theta,phi=Phi,axes=F,
+                     border="dimgrey"); par(new=T)
> up.HB.band<- persp(xx1,xx2,y.up,xlim=c(x.min,x.max),ylim=c(y.min,y.max),
+                     zlim=c(z.min-5,z.max+10),xlab="X1",ylab="X2",zlab="Y",
+                     theta=Theta,phi=Phi,ticktype="detailed")
```

□

2.3.1.2 แถบแบบด้านเดียว (One-sided band)

แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างแบบด้านเดียวนบนปริภูมิทั่วไปมีรูปแบบเป็น

$$\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} > \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}$$

ขณะที่แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างบนแบบด้านเดียวนบนปริภูมิทั่วไปมีรูปแบบเป็น

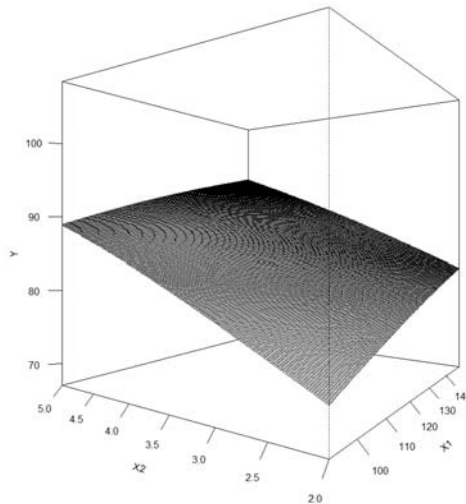
$$\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} < \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + c\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}$$

การกำหนดค่าคงที่วิกฤต c สำหรับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกแบบด้านเดียวนบนปริภูมิทั่วไปต้องสอดคล้องกับระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง คือ

$$1 - \alpha = \frac{1}{2}F_{k+1, \gamma^*} \left(\frac{c^2}{k+1} \right) + \frac{1}{2}F_{k, \gamma^*} \left(\frac{c^2}{k} \right) \quad (2.12)$$

เมื่อ F_{m, γ^*} คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F ด้วยองศาความเป็นอิสระ m และ $\gamma^* = n - k - 1$ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.8 จากข้อมูลในตารางที่ 2.9 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างแบบด้านเดียว 95% สำหรับตัวแบบการถดถอย $\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}$ จากสมการ (2.12) จะได้ $c = 2.984$ แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างแบบด้านเดียวสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.13



ภาพที่ 2.13 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกข้างล่างแบบด้านเดียวบนปริภูมิ \mathbf{x}^2 ของตัวแปรอิสระ

โดยภาพที่ 2.13 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.11

ตารางที่ 2.11 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปแบบด้านเดียว

```
> x1<- c(125,101,104,143,92,119,100,149,133,120,118,94,131,93,94,121,96)
> x2<- c(3,4,4,5,5,3,4,3,2,4,4,3,5,4,4,5,4)
> y<- c(86,87,87,100,89,86,89,89,83,92,88,79,98,85,87,97,87)
> dat<- data.frame(y,x1,x2); n<- dim(dat)[1]; k<- dim(dat)[2]-1
> lm.xy<- lm(y ~ x1 + x2, data=dat); cc<- lm.xy$coef
> Res<- 160; Theta<- -55; Phi<- 0
> xx1<- seq(min(x1),max(x1),length=Res); xx2<- seq(min(x2),max(x2),length=Res)
>
> # Hyperbolic lower conf.band for k = 2
> HB.low.crit<- 2.984
> f.low<- function(xx1,xx2){new.x<- data.frame(x1=xx1, x2=xx2)
+                                     PV<- predict(lm.xy, new.x, se.fit=T)
+                                     out<- PV$fit-HB.low.crit*PV$se.fit; out}
> y.low<- outer(xx1, xx2, f.low)
>
> x.min<- min(xx1); x.max<- max(xx1); y.min<- min(xx2); y.max<- max(xx2)
> z.min<- min(f.low(x.min,y.min), f.low(x.min,y.max),
+           f.low(x.max,y.min), f.low(x.max,y.max))
> z.max<- max(f.low(x.min,y.min), f.low(x.min,y.max),
+            f.low(x.max,y.min), f.low(x.max,y.max))
> low.HB.band<- persp(xx1,xx2,y.low,xlim=c(x.min,x.max),ylim=c(y.min,y.max),
+                    zlim=c(z.min-5,z.max+10),xlab="X1",ylab="X2",zlab="Y",
+                    theta=Theta,phi=Phi,ticktype="detailed")
```

□

2.3.2 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ (Independence point method confidence bands)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ โดย Hayter, Kiatsupaibul, Liu และ Wynn (2010) เป็นผู้นำเสนอวิธีนี้ขึ้นมา ซึ่งประยุกต์แนวคิดมาจากแถบความเชื่อมั่นสามส่วนสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของ Gafarian โดยการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีนี้จำเป็นต้องทราบถึงวิธีการหาจุดอิสระเสียก่อน

2.3.2.1 การเลือกจุดอิสระ (Independence point selection)

การเลือกจุดอิสระจำนวน $k+1$ จุด เมื่อมีจำนวนตัวแปรอิสระ k ตัว สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{a}_i = \sqrt{\frac{k}{n}} (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}}, \quad 1 \leq i \leq k+1 \quad (2.13)$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)'$ โดย $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}/n$ และ \mathbf{S} คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

ขนาด $k \times k$ ซึ่ง $S_{ij} = \sum_{m=1}^n (x_{im} - \bar{x}_i)(x_{jm} - \bar{x}_j)$ และเรียก \mathbf{e}_i ว่าจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน

(Equidistant points) จำนวน $k+1$ จุด บนทรงกลมหนึ่งหน่วยใน k มิติ กล่าวคือมีเวกเตอร์จำนวน $k+1$ เวกเตอร์ใน k มิติ ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทุกคู่มุมระหว่างเวกเตอร์ใดๆ มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{k}$

โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้เป็น

$$\mathbf{e}_i' \mathbf{e}_i = 1, \quad 1 \leq i \leq k+1 \quad \text{และ} \quad \mathbf{e}_i' \mathbf{e}_j = -\frac{1}{k}, \quad i \neq j \quad (2.14)$$

จากสมการ (2.13) สังเกตเห็นได้ว่าจุดอิสระจะมีค่าขึ้นอยู่กับจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน ดังนั้นเราสามารถสร้างจุดอิสระมาจากจุดที่มีระยะห่างเท่ากันใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.14) และยังมีผล

ทำให้ $\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ และ $\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{x}}$ ด้วย โดย Hayter และคณะ ได้เสนอให้แถบความเชื่อมั่น

ด้วยวิธีจุดอิสระเกิดจากการประกอบเข้าด้วยกัน (Comprising) ของตัวแบบการถดถอยที่โดนจำกัดโดยทุกช่วงความเชื่อมั่นที่จุดอิสระ และกำหนดให้ระดับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับแต่ละตัวแบบการ

ถดถอยที่จุดอิสระคือ $1 - \alpha_i$, $1 \leq i \leq k+1$ และสอดคล้องกับ $1 - \alpha = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \alpha_i)$ เมื่อ $1 - \alpha$

คือ ระดับแถบความเชื่อมั่นแบบต่อเนื่อง

2.3.2.2 แถบแบบสองด้าน (Two-sided band)

เนื่องจากแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน สามารถหาจากขอบเขตบนและขอบเขตล่างของทุกตัวแบบการถดถอยที่โดนจำกัดโดยทุกช่วงความเชื่อมั่นแบบสองด้านที่จุดอิสระ \mathbf{a}_i จากการศึกษาของ Hayter และคณะ พบว่าพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นมีลักษณะเป็นเชิงเส้นเป็นช่วง (Piecewise linear) ทำให้การพื้นผิวสามารถหาได้โดยกำหนดการเชิงเส้น (Linear programming) ดังนี้

$$\text{พื้นผิวด้านบนที่ } \mathbf{x} : \text{สมการจุดประสงค์ คือ } \max (\beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})$$

$$\text{พื้นผิวด้านล่างที่ } \mathbf{x} : \text{สมการจุดประสงค์ คือ } \min (\beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})$$

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \leq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\sigma} t_{1 - \frac{\alpha^*}{2}, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \geq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\sigma} t_{1 - \frac{\alpha^*}{2}, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

เมื่อ $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{k+1}}$ โดย α คือ ระดับนัยสำคัญของแถบความเชื่อมั่น

2.3.2.3 แถบแบบด้านเดียว (One-sided band)

โดยอาศัยแนวคิดเดียวกับกรณีแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน ทำให้พื้นผิวของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระข้างล่างแบบด้านเดียวสามารถหาได้ ดังนี้

$$\text{พื้นผิวด้านล่างที่ } \mathbf{x} : \text{สมการจุดประสงค์ คือ } \min (\beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})$$

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \leq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\sigma} t_{1 - \alpha^*, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \geq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\sigma} t_{1 - \alpha^*, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

ขณะที่พื้นผิวของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระข้างบนแบบด้านเดียวสามารถหาได้ ดังนี้

$$\text{พื้นผิวด้านบนที่ } \mathbf{x} : \text{สมการจุดประสงค์ คือ } \max (\beta_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})$$

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \leq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\sigma} t_{1 - \alpha^*, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

$$\beta_0 + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\beta} \geq \hat{\beta}_0 + \mathbf{a}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\sigma} t_{1 - \alpha^*, n-k-1} \sqrt{(k+1)/n}, \quad i = 1, \dots, k+1$$

แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระนี้ มีคุณสมบัติที่เด่นชัดอย่างหนึ่ง คือ “ความกว้างของแถบความเชื่อมั่นจะคงที่ตลอดภายในบริเวณรูปซิมเพล็กซ์ (Simplex) ที่มีจุดมุมเป็นจุดอิสระซึ่งมี \bar{x} เป็นศูนย์กลาง”

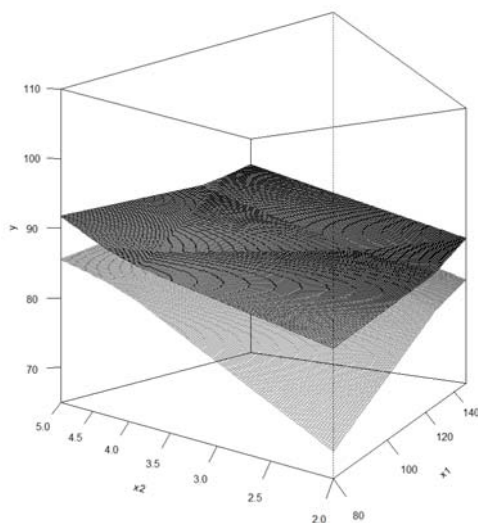
ตัวอย่างที่ 2.9 จากข้อมูลในตารางที่ 2.9 สมมติต้องการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน 95% สำหรับตัวแบบการถดถอย ในตัวอย่างนี้จะได้ $(k+1)/n = 3/17$ และ $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/(k+1)} = 1 - (1 - 0.05)^{1/3}$ โดยจุดอิสระมาจากการเลือกจุดที่มีระยะห่างเท่ากันจำนวน 3 จุด บนทรงกลมหนึ่งหน่วยใน 2 มิติ คือ

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)', \quad \mathbf{e}_2 = (-0.500, 0.866)', \quad \mathbf{e}_3 = (-0.500, -0.866)'$$

ทำให้จุดอิสระ คือ

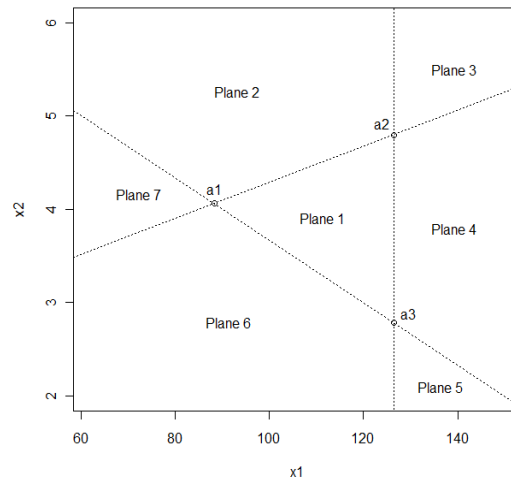
$$\mathbf{a}_1 = (88.325, 4.062)', \quad \mathbf{a}_2 = (126.403, 4.800)', \quad \mathbf{a}_3 = (126.389, 2.786)'$$

ดังนั้นแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้านสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน

จากภาพที่ 2.14 แถบความเชื่อมั่นมีลักษณะของพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างเป็นเชิงเส้นเป็นช่วง แต่ละพื้นผิวประกอบด้วย 7 ระนาบ ซึ่งมาจากการแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ด้วยเส้นตรงจำนวนสามเส้นที่ลากผ่านจุดอิสระดังภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับ
ระนาบของแถบความเชื่อมั่นทั้ง 7 ระนาบ

ทำให้ระนาบพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระสามารถแสดง
ได้ดังตารางที่ 2.12 แถบความเชื่อมั่นในตัวอย่างนี้จึงมีความกว้างคงที่เท่ากับ 2.9899 ตลอดภายใน
บริเวณรูปซิมเพลกซ์ที่มีจุดมุมเป็นจุดอิสระ (ระนาบที่ 1)

ตารางที่ 2.12 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น

Plane	Upper band			Lower band		
	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2
1	49.0777	0.1808	5.3129	46.0878	0.1808	5.3129
2	45.5891	0.1520	6.7977	49.5764	0.2096	3.8281
3	35.6654	0.2305	6.7972	59.5002	0.1310	3.8287
4	39.1540	0.2593	5.3124	56.0116	0.1022	5.3135
5	49.5764	0.2096	3.8281	45.5891	0.1520	6.7977
6	59.5002	0.1310	3.8287	35.6654	0.2305	6.7972
7	56.0116	0.1022	5.3135	39.1540	0.2593	5.3124

โดยภาพที่ 2.14 สามารถเขียนเป็นชุดคำสั่งได้ดังตารางที่ 2.13

ตารางที่ 2.13 ชุดคำสั่งการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระแบบสองด้าน

```

> res<- 160; Theta<- -55; Phi<- 0
> x1<- seq(80,150,length=res); x2<- seq(2,5,length=res)
> f.low<- function(x1,x2) {
+   out<- matrix(nrow=length(x1),ncol=length(x2))
+   for(i in 1:length(x1)){
+     for(j in 1:length(x2)){
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 46.0878+0.1808*x1[i]+5.3129*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 49.5764+0.2096*x1[i]+3.8281*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148)
+ {out[i,j]<- 59.5002+0.1310*x1[i]+3.8287*x2[j]}
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 56.0116+0.1022*x1[i]+5.3135*x2[j]}
+ if(x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148 && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220)
+ {out[i,j]<- 45.5891+0.1520*x1[i]+6.7977*x2[j]}
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 35.6654+0.2305*x1[i]+6.7972*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220)
+ {out[i,j]<- 39.1540+0.2593*x1[i]+5.3124*x2[j]}
+   }
+   } ; return(out)
+ }
> y.low<- f.low(x1,x2)
> persp(x1,x2,y.low,xlim=c(80,150),ylim=c(2,5),zlim=c(65,110),
+   theta=Theta,phi=Phi,axes=F,border="dimgrey")
>
> par(new=T)
>
> f.up<- function(x1,x2) {
+   out<- matrix(nrow=length(x1),ncol=length(x2))
+   for(i in 1:length(x1)){
+     for(j in 1:length(x2)){
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 49.0777+0.1808*x1[i]+5.3129*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 45.5891+0.1520*x1[i]+6.7977*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148)
+ {out[i,j]<- 35.6654+0.2305*x1[i]+6.7972*x2[j]}
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]>=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 39.1540+0.2593*x1[i]+5.3124*x2[j]}
+ if(x2[j]<=141.8239*x1[i]-17922.2148 && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220)
+ {out[i,j]<- 49.5764+0.2096*x1[i]+3.8281*x2[j]}
+ if(x2[j]<=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]>=141.8239*x1[i]-17922.2148
+ && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220) {out[i,j]<- 59.5002+0.1310*x1[i]+3.8287*x2[j]}
+ if(x2[j]>=0.0194*x1[i]+2.3495 && x2[j]<=-0.0335*x1[i]+7.0220)
+ {out[i,j]<- 56.0116+0.1022*x1[i]+5.3135*x2[j]}
+   }
+   } ; return(out)
+ }
> y.up<- f.up(x1,x2)
> persp(x1,x2,y.up,xlim=c(80,150),ylim=c(2,5),zlim=c(65,110),xlab="x1",
+   ylab="x2",zlab="y",theta=Theta,phi=Phi,ticktype="detailed")

```

□

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 แผนการศึกษาวิจัย

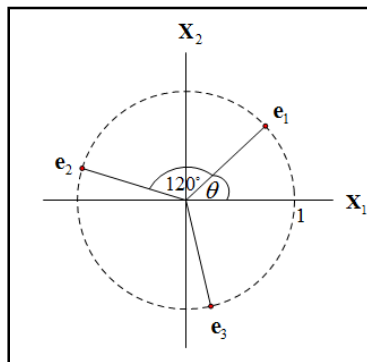
การหาจุดอิสระเพื่อใช้ในการสร้างแถบความเชื่อมั่นที่ผ่านมา จุดอิสระ a_i คือ ฟังก์ชันของจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน e_i และสามารถเลือกเป็นค่าใดๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.14) ทำให้เกิดเซตของจุดอิสระขึ้นมาเป็นจำนวนนับไม่ได้ เป็นสาเหตุให้ผู้วิจัยต้องการคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดในกรณีที่มีตัวแปรอิสระจำนวน 2 ตัว ($k=2$) โดยใช้เกณฑ์การตัดสินใจในการวิเคราะห์บริเวณคอนเวกซ์ (Convex Analysis) คือ

“จุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูลต้องเป็นจุดที่ทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด”

เพื่อความสะดวกในการศึกษา ผู้วิจัยได้ทำการเปลี่ยนพิกัดของจุด e_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วที่สามารถแทนด้วยมุมระหว่างเวกเตอร์ของจุดใดๆ บนเส้นรอบวงกลมกับแกนแนวนอนได้ ในที่นี้เรียกมุมนั้นว่า θ กำหนดให้เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ของจุด e_1 กับแกนแนวนอน และสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

$$e_1 = (\cos \theta, \sin \theta)', e_2 = (\cos(\theta + 120^\circ), \sin(\theta + 120^\circ)'), e_3 = (\cos(\theta + 240^\circ), \sin(\theta + 240^\circ))'$$

หรือแสดงความสัมพันธ์ในเชิงกราฟก็ได้ดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน e_1, e_2 และ e_3

3.2 ขั้นตอนในการศึกษาวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินการเพื่อหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูลมีดังนี้

1) จำลองข้อมูลตามตัวแบบจากตัวแปรอิสระ x_1, x_2 และความคลาดเคลื่อน e ที่มีการแจกแจงปกติ $N(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1}^2)$, $N(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2}^2)$ และ $N(0, \sigma^2)$ ตามลำดับ โดยตัวแปรอิสระต้องไม่มีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์

2) เลือกระดับนัยสำคัญของแถบความเชื่อมั่น α

3) เริ่มต้นให้มุม $\theta = 0^\circ$

4) สร้างจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน e_i จากมุม θ ในข้อ 3) ด้วยความสัมพันธ์

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta + 120^\circ) \\ \sin(\theta + 120^\circ) \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta + 240^\circ) \\ \sin(\theta + 240^\circ) \end{pmatrix}$$

5) คำนวณจุดอิสระ \mathbf{a}_i จากจุด \mathbf{e}_i ในข้อ 4) ด้วยความสัมพันธ์

$$\mathbf{a}_i = \sqrt{\frac{k}{n}} (\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})' \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}} \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3$$

6) ทำการวาดบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระในข้อ 5) และคำนวณจุดข้อมูลทีบริเวณนี้สามารถคลุมได้

7) ให้ $\theta = \theta + 1^\circ$ และดำเนินการซ้ำตั้งแต่ข้อ 4) ถึงข้อ 6) จนกระทั่ง $\theta = 119^\circ$ จึงหยุดดำเนินการ

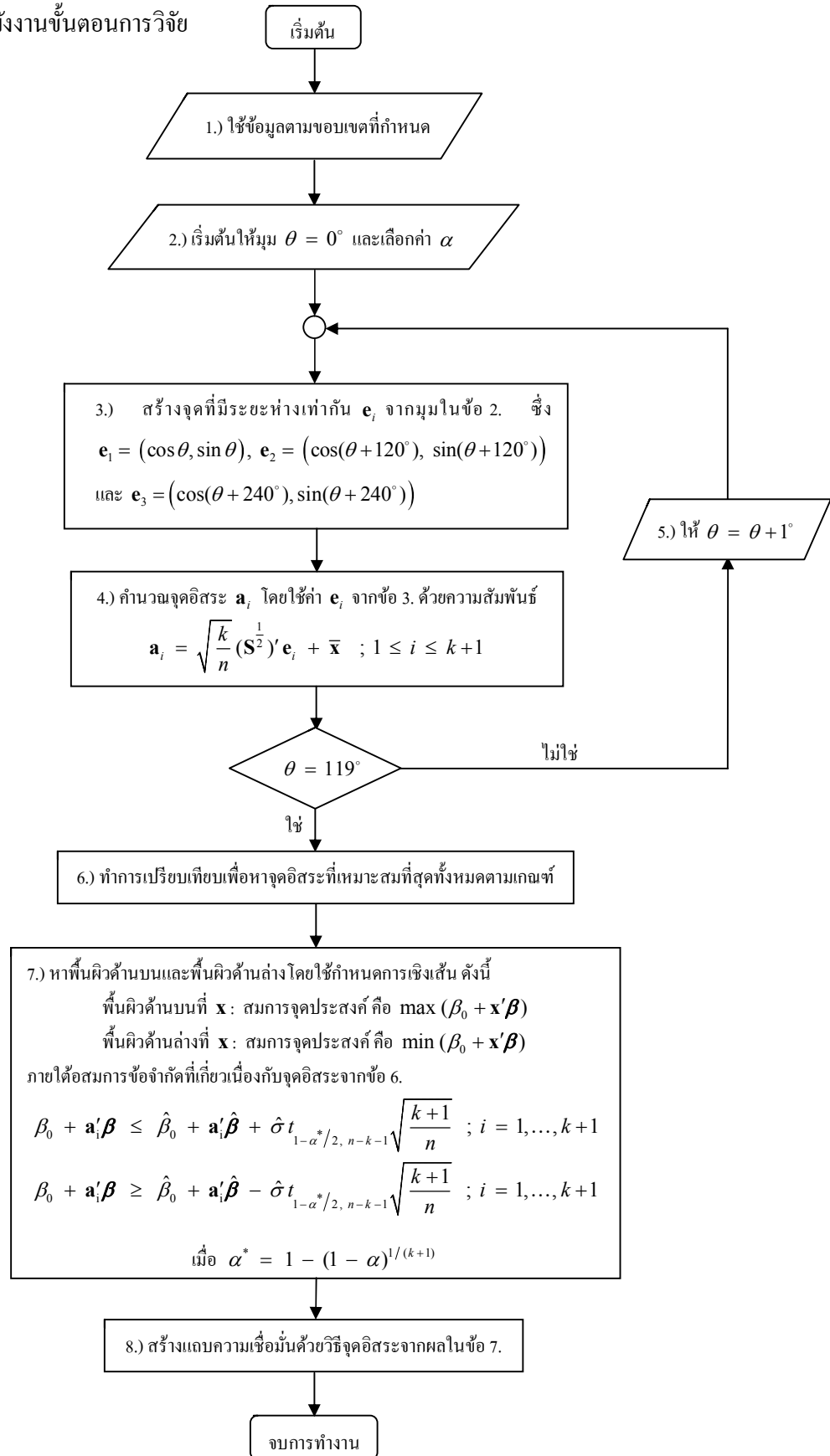
8) ทำการเปรียบเทียบจำนวนจุดข้อมูลทีบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมได้ทั้ง 120 มุม เพื่อหามุมที่ทำให้จำนวนจุดข้อมูลดังกล่าวมีค่ามากที่สุด

9) นำมุมในข้อ 8) ไปสร้างเป็นจุดอิสระ และเรียกจุดนี้ว่าจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูล

10) นำจุดอิสระในข้อ 9) ไปสร้างเป็นแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ

โดยผังงานแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัยสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 3.2

ภาพที่ 3.2 ฟังงานขั้นตอนการวิจัย



บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการศึกษาเพื่อหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดในการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ ผู้วิจัยได้ทำการทดลองโดยใช้ข้อมูลจากการจำลองขนาด $n = 50, 100$ และข้อมูลชื่อว่า “Rubber” จากการนำเข้าโปรแกรม ตามลำดับ ในศึกษานี้ กำหนดให้ตัวแบบจำลองมาจากตัวแปรอิสระ x_1, x_2 ที่มีการแจกแจงปกติ $N(0, 100)$ ความคลาดเคลื่อน e มีการแจกแจงปกติ $N(0, 49)$ และสัมประสิทธิ์การถดถอย คือ $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ โดยผู้วิจัยได้พัฒนาโปรแกรมเพื่อคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดด้วยโปรแกรม R มีรายละเอียดดังนี้

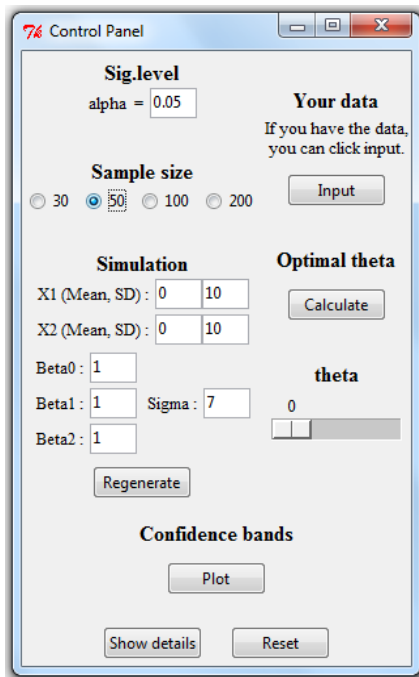
4.1 ข้อจำกัดในการใช้งานโปรแกรม

โปรแกรมคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อสร้างแถบความเชื่อมั่นสามารถแสดงเป็นชุดคำสั่งได้ดัง ภาคผนวก ข โดยมีข้อจำกัดในการใช้งานดังต่อไปนี้

- 1) โปรแกรมนี้ควรใช้กับโปรแกรม R เวอร์ชัน 2.9.2 หรือสูงกว่า
- 2) โปรแกรมใช้ได้เฉพาะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว เท่านั้น
- 3) ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ในโปรแกรมแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ข้อมูลจากการจำลองตามตัวแบบที่สามารถกำหนดได้ และข้อมูลจากการนำเข้า โดยโปรแกรมจะเลือกจำเฉพาะข้อมูลล่าสุดเท่านั้น
- 4) ตัวแปรอิสระ x_1 และ x_2 ของข้อมูลต้องไม่มีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์
- 5) ต้องติดตั้ง Packages ส่วนเสริม “limSolve” และ “splancs” ก่อนใช้งานโปรแกรม โดยวิธีติดตั้งโปรแกรม R และ Packages ส่วนเสริมสามารถแสดงได้ดัง ภาคผนวก ก
- 6) ความละเอียดของกราฟิกแถบความเชื่อมั่นขึ้นอยู่กับความละเอียดของหน้าจอคอมพิวเตอร์ด้วย

4.2 ผลการศึกษาการคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด

4.2.1 กรณี $n = 50$



ภาพที่ 4.1 แผงควบคุม กรณี $n = 50$

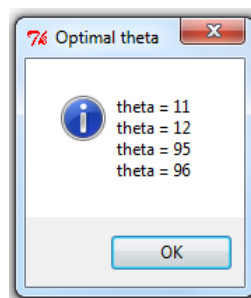
จากภาพที่ 4.1 เมื่อทำการกำหนดตัวแบบที่ต้องการลงในโปรแกรม จากนั้นกดปุ่ม “Regenerate” โปรแกรมจะทำการจำลองตัวแปรตาม y จากตัวแบบที่ได้กำหนดไป และสามารถแสดงข้อมูลได้ดังตารางที่ 4.1

จากนั้นคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด โดยกดปุ่ม “Calculate” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.1 โปรแกรมจะคำนวณจุดข้อมูลที่บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระจากมุม $\theta = 0^\circ, 1^\circ, \dots, 119^\circ$ สามารถคลุมได้ และแสดงผลออกมาในรูปของมุมที่ทำให้บริเวณดังกล่าวคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด กล่าวคือ มุมที่เป็นผลลัพธ์นี้สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูลตามเกณฑ์ได้ ดังภาพที่ 4.2

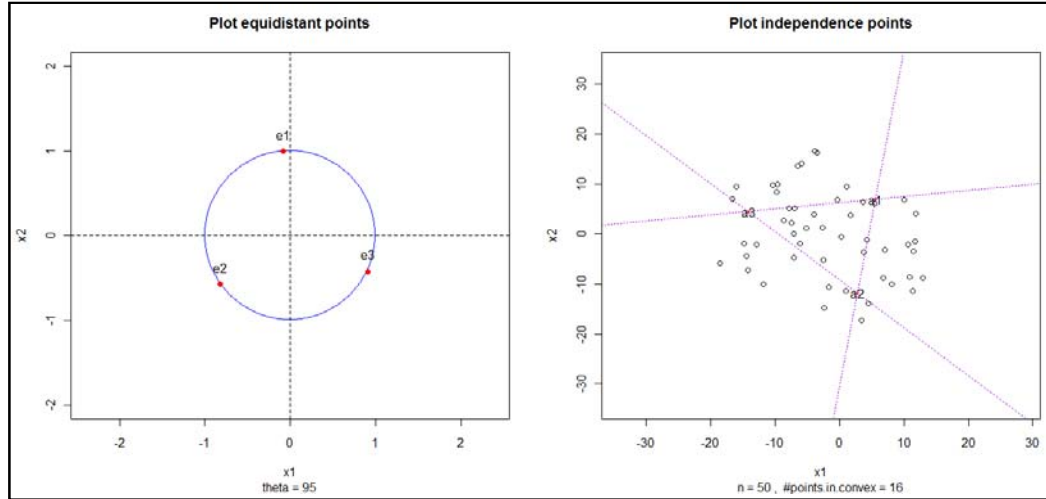
ตารางที่ 4.1 ข้อมูลการจำลองตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ กรณี $n = 50$

	y	x1	x2		y	x1	x2
1	13.7531953	3.5852292	6.46006576	26	-3.8154561	-2.520337	-5.181504
2	9.3941736	1.7490643	3.74070250	27	-19.2959380	-14.520935	-4.433054
3	-3.3554124	-2.6518392	1.24793527	28	1.5349284	6.962524	-3.240215
4	2.2637860	0.2688816	-0.56463538	29	14.2958699	-5.882499	14.185724
5	8.0837668	6.7316807	-8.82885138	30	-2.3276361	8.061032	-9.948910
6	11.4312730	-0.2994098	6.90260408	31	-10.9507261	-6.142811	-1.985289
7	4.9599324	-3.4423175	16.37291339	32	9.9677901	-3.862996	16.670981
8	26.6863700	10.0759806	6.88221804	33	-4.1323441	-7.120469	-4.688017
9	-4.2134933	-1.6473008	-10.69447049	34	-13.7879867	-14.162207	-7.171133
10	11.4371559	1.1565640	9.47299100	35	-0.6015516	5.388573	6.044572
11	-7.3446481	-7.8446504	5.21869979	36	-17.3275986	3.430852	-17.314550
12	1.4177460	-7.0954074	0.03809756	37	6.3456170	10.878675	-8.662914
13	6.4337525	-9.6596063	9.94915182	38	-6.4896884	-16.685094	7.051011
14	9.4583756	11.3626712	-11.33951290	39	-8.5789921	4.523491	-13.928507
15	-10.5284334	-12.9411327	-2.10156364	40	19.2580133	11.719462	-1.566221
16	-2.9635162	-9.7716102	8.44716252	41	1.0287150	-5.127502	1.060565
17	2.2801630	4.1835563	-1.22893633	42	-7.3900383	-8.626742	2.649317
18	7.1209546	3.7536525	-3.61847608	43	13.8530205	-6.471266	13.708027
19	-13.7648486	0.9589501	-11.33797819	44	2.9964482	10.671424	-2.139752
20	-10.0270201	-6.9825565	5.23205321	45	-1.6129406	-10.408925	9.748946
21	3.7129910	-7.4336521	2.19584737	46	-28.8090424	-11.787021	-10.064874
22	-0.6060642	-15.9994610	9.56003808	47	-23.9456109	-18.607592	-5.850265
23	22.5017625	11.9012610	4.10854581	48	4.8128278	-4.016207	3.984438
24	-14.2158621	-2.4450247	-14.79254781	49	12.6366537	12.897581	-8.836824
25	4.7969133	11.4416272	-3.47717821	50	-11.1923849	-14.849406	-1.999035

จากภาพที่ 4.2 มุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดมี 4 มุม คือ 11° , 12° , 95° และ 96° ตามลำดับ จุดอิสระจากมุมเหล่านี้จะทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด ในที่นี้ผู้วิจัยเลือกใช้มุม 95° ในการสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ โดยเลื่อนมุม “theta” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.1 ไปที่ 95 ทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด 16 จุด ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.2 มุมที่สามารถนำมาสร้างจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณี $n = 50$



ภาพที่ 4.3 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณี $n = 50$

จากภาพที่ 4.3 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันจำนวน 3 จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย คือ

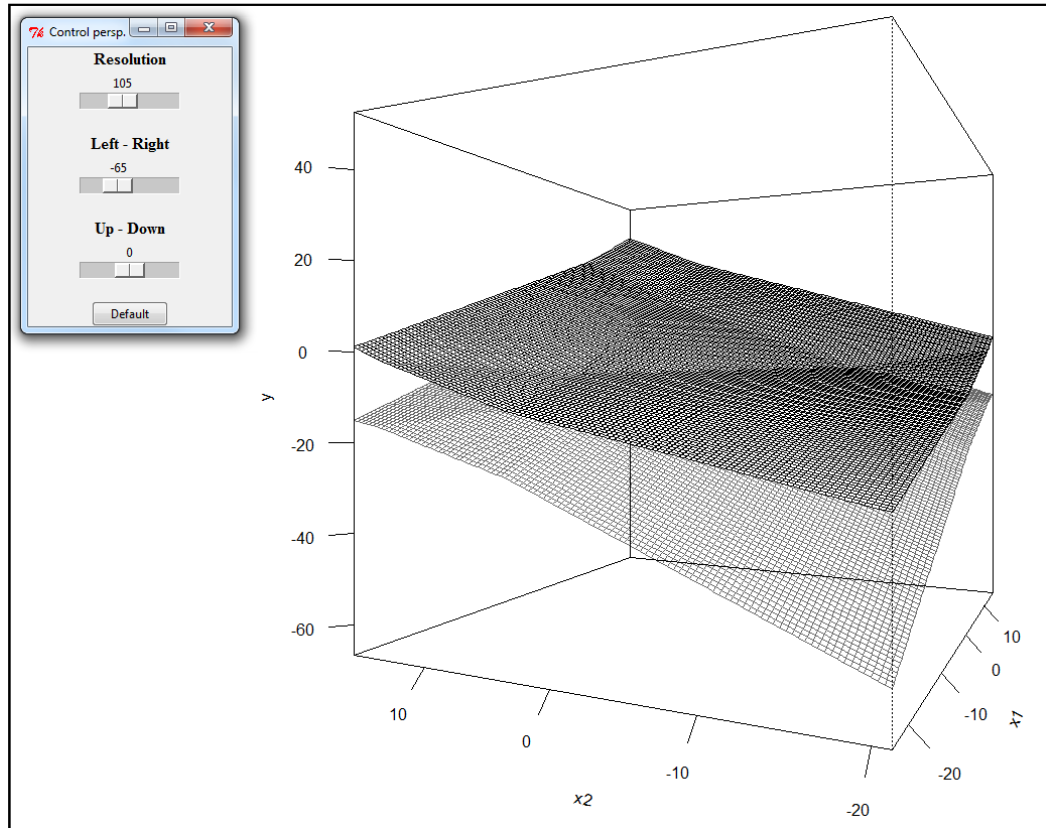
$$\mathbf{e}_1 = (-0.087, 0.996)', \mathbf{e}_2 = (-0.819, 0.574)', \mathbf{e}_3 = (0.906, -0.423)'$$

ขณะที่จุดอิสระทั้ง 3 จุด คือ

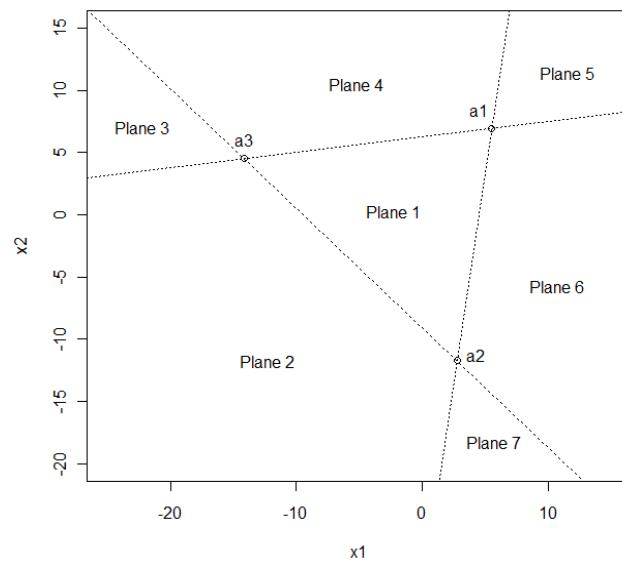
$$\mathbf{a}_1 = (5.537, 6.967)', \mathbf{a}_2 = (2.767, -11.738)', \mathbf{a}_3 = (-14.142, 4.528)'$$

โปรแกรมสามารถสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระได้ดังภาพที่ 4.4 โดยกดปุ่ม “Plot” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.1 และสามารถปรับความละเอียดของกราฟิกโดยเลื่อนปุ่มใน “Resolution” หรืออาจหมุนแถบความเชื่อมั่นซ้าย-ขวา โดยเลื่อนปุ่มใน “Left - Right” หรือหมุนบน-ล่าง โดยเลื่อนปุ่มใน “Up - Down”

แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระที่ได้ มีพื้นผิวด้านบนและด้านล่างเป็นแบบเชิงเส้นเป็นช่วง โดยแต่ละพื้นผิวประกอบด้วย 7 ระนาบ ซึ่งมาจากการแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ด้วยเส้นตรงสามเส้นที่ลากผ่านจุดอิสระดังภาพที่ 4.5 และสามารถแสดงสมการระนาบของพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระได้ดังตารางที่ 4.2



ภาพที่ 4.4 แลบทความเชื่อมแน่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 50$



ภาพที่ 4.5 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับ
ระนาบของแลบทความเชื่อมแน่นทั้ง 7 ระนาบ กรณี $n = 50$

ตารางที่ 4.2 ระบายของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณี $n = 50$

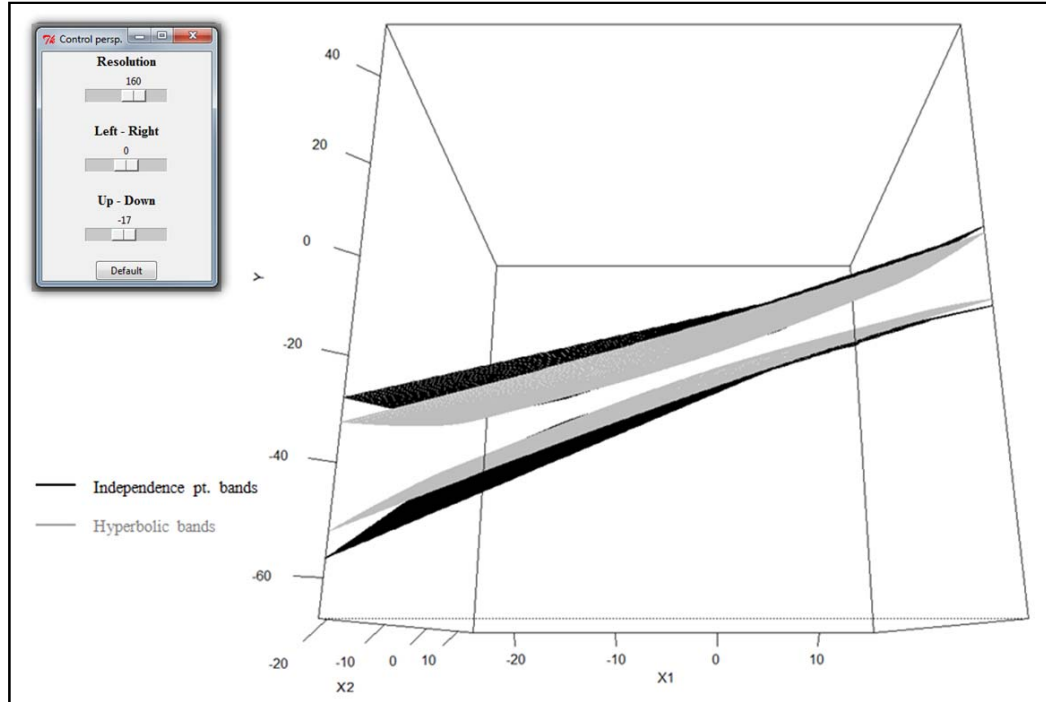
Plane	Upper band			Lower band		
	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2
1	5.525	1.026	0.943	-1.170	1.026	0.943
2	2.682	0.725	0.630	1.674	1.328	1.256
3	0.392	0.680	0.994	3.964	1.373	0.891
4	3.235	0.981	1.307	1.120	1.072	0.578
5	1.674	1.328	1.256	2.682	0.725	0.630
6	3.964	1.373	0.891	0.392	0.680	0.994
7	1.120	1.072	0.578	3.235	0.981	1.307

รายละเอียดข้างต้นสามารถแสดงได้ โดยคลิกปุ่ม “Show details” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.1 โปรแกรมจะแสดงข้อมูลทั้งหมดเกี่ยวกับการวิเคราะห์ตัวแบบและสมการพื้นผิวของแถบความเชื่อมั่นดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณี $n = 50$

\$n	\$plane.up
[1] 50	Beta0 Beta1 Beta2
\$R.squared	plane1up 5.5252254 1.0263586 0.9427953
[1] 0.7828908	plane2up 2.6815203 0.7249598 0.6295022
\$alpha	plane3up 0.3915089 0.6797760 0.9941303
[1] 0.05	plane4up 3.2352140 0.9811749 1.3074234
\$theta	plane5up 1.6738074 1.3277574 1.2560884
[1] 95	plane6up 3.9638188 1.3729412 0.8914602
\$eqd.pt	plane7up 1.1201138 1.0715424 0.5781671
e1 e2 e3	\$plane.low
[1.] -0.08715574 -0.8191520 0.9063078	Beta0 Beta1 Beta2
[2.] 0.99619470 -0.5735764 -0.4226183	plane1low -1.1698976 1.0263586 0.9427953
\$ind.pt	plane2low 1.6738074 1.3277574 1.2560884
a1 a2 a3	plane3low 3.9638188 1.3729412 0.8914602
[1.] 5.537018 2.766501 -14.141713	plane4low 1.1201138 1.0715424 0.5781671
[2.] 6.966535 -11.738290 4.527998	plane5low 2.6815203 0.7249598 0.6295022
\$est.par	plane6low 0.3915089 0.6797760 0.9941303
(Intercept) x1 x2	plane7low 3.2352140 0.9811749 1.3074234
2.1776639 1.0263586 0.9427953	\$points.in.convex
	[1] 16

การเปรียบเทียบเชิงกราฟระหว่างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปของ Scheffé สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4.6



ภาพที่ 4.6 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé

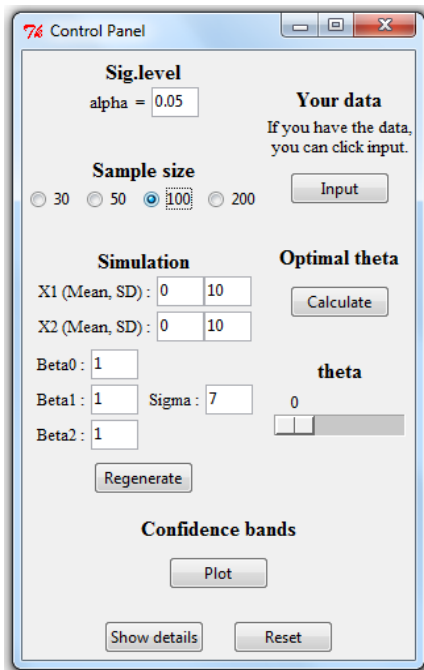
และแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 50$

จากภาพที่ 4.6 แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระมีความกว้างคงที่ตลอดภายในบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระโดยแคบกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé ที่จุดอิสระ a_1 , a_2 และ a_3 แต่กว้างกว่าเมื่อเข้าใกล้ \bar{x} หรือสามารถแสดงการเปรียบเทียบเชิงตัวเลขได้ดังตารางที่ 4.4

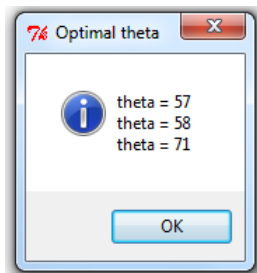
ตารางที่ 4.4 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณี $n = 50$

จุด	แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ			แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก (Scheffé)		
	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง
\bar{x}	51.119	44.424	6.695	2.367	-2.160	4.527
a_1	17.776	11.081	6.695	18.350	10.509	7.841
a_2	-2.705	-9.400	6.695	-2.129	-9.969	7.841
a_3	-4.715	-11.410	6.695	-4.148	-11.989	7.841

□

4.2.2 กรณี $n = 100$ ภาพที่ 4.7 แผงควบคุม กรณี $n = 100$

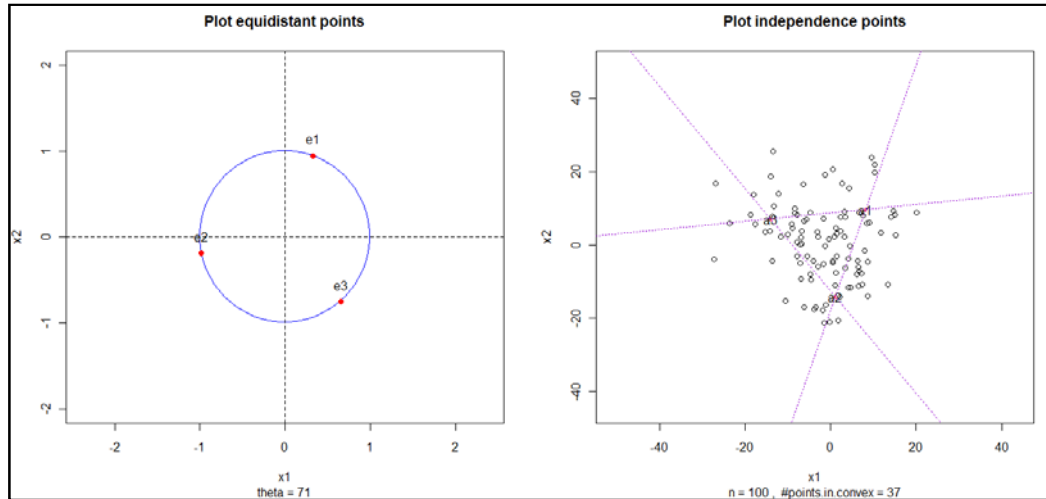
จากภาพที่ 4.7 ทำการจำลองตัวแปรตาม y จากตัวแบบที่ผู้วิจัยกำหนด ได้ข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 4.5 ต่อมาคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด โดยกดปุ่ม “Calculate” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.7 โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์เป็นมุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดดังภาพที่ 4.8

ภาพที่ 4.8 มุมที่สามารถนำมาสร้างจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณี $n = 100$

ตารางที่ 4.5 ข้อมูลการจำลองตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ กรณี $n = 100$

	y	x1	x2		y	x1	x2
1	-27.8328866	-13.5663854	-4.357074	51	-8.6677002	1.4299137	-3.00860514
2	11.3976745	-13.4358149	25.545766	52	-3.5024782	-6.9283417	1.97207130
3	5.3594883	0.8841787	2.169553	53	2.3900546	-5.5122365	-3.01115015
4	11.8313023	8.0140448	-1.609363	54	-22.8945681	-0.2414491	-21.02574367
5	-6.7530197	6.0724801	-8.028823	55	18.5621462	4.5530008	-0.35434303
6	-0.9393099	-13.6813043	7.816548	56	-0.5241023	-1.2390586	-0.37012862
7	33.7528297	14.6078698	9.258349	57	2.5717567	-6.2850484	16.44744332
8	-37.6258636	-27.2773001	-3.922443	58	19.3599437	14.0939420	7.63229971
9	-3.2624851	-7.7403917	8.108398	59	-2.9016265	-4.7670914	8.84322609
10	20.8256027	8.5091414	5.925760	60	8.6456600	-13.3160153	10.60182520
11	-16.8812196	-4.7039252	-7.897966	61	8.5488522	11.8071624	3.36415997
12	24.7028080	0.4979095	20.553893	62	15.4509936	15.1824010	2.64046128
13	-14.1189814	6.5073537	-11.163592	63	-0.7411698	6.3834614	-4.25891513
14	3.1741520	-2.9752470	2.348002	64	-14.6905915	0.4803208	-4.87662773
15	23.4957304	6.7016831	8.798571	65	16.2268851	2.3094919	3.68171415
16	-21.6698876	-1.7474904	-17.812657	66	-19.6225308	-14.0928929	3.65780991
17	-9.3076706	7.5129878	-10.839503	67	15.9179597	3.2652175	9.05870226
18	-19.6523867	-11.6351633	2.220443	68	4.9857840	-5.6320402	6.92896436
19	-23.7390219	-6.1660674	-16.811816	69	-10.4348328	-12.1235365	13.93141763
20	-10.3091093	-3.9323399	-4.298587	70	3.6398803	-1.5574680	7.12129468
21	14.0605619	-6.1029208	6.528482	71	-20.2842501	-6.7433331	0.26329765
22	-5.6573523	6.5815909	-6.136151	72	5.8181301	2.2986857	7.61060127
23	-26.8722179	-7.0566863	-5.048862	73	3.1262034	-3.0829565	3.60556809
24	7.1489871	3.4306989	7.494144	74	-19.0494505	1.7359762	-20.44388415
25	-0.4515464	-8.9388095	4.673466	75	18.7732446	-1.2528790	19.01693492
26	-9.5623922	-23.6470862	5.923905	76	-4.7624843	3.4312023	-6.30984882
27	-24.1605573	-3.8457678	-17.456350	77	-14.5549667	-18.0257713	13.79020881
28	-26.9284259	-1.5183731	-21.215234	78	-5.7645150	-10.0550525	2.97746383
29	-2.3215383	-17.6390673	5.742521	79	-0.4750397	-7.7327117	-0.72716864
30	13.6244931	7.6767664	7.946707	80	-19.0064602	2.1323483	-14.06942438
31	29.5428369	10.3107517	21.944803	81	-10.9064064	1.0949682	-11.01668433
32	37.9741841	9.6195315	23.854597	82	-1.0974007	-4.5042403	-9.50231611
33	37.6208708	10.3066747	19.648960	83	-17.3749491	-10.5127356	-15.16761164
34	29.0087078	15.1309626	8.243209	84	4.9685861	0.4737642	-4.30672846
35	-12.7136518	-2.9675829	-5.828718	85	0.9990826	-0.3642623	1.64306269
36	16.2450707	4.2683157	15.410610	86	-8.2756973	-1.7224118	-5.10319500
37	1.6228889	3.1917441	2.146089	87	-1.3063864	-7.1347244	0.09738109
38	0.0354375	1.2466502	-7.554525	88	-4.3593634	1.3292237	4.66236776
39	-8.9940389	-3.5184427	-16.895659	89	0.8791405	-6.7018655	3.84309649
40	-2.2342304	-8.4226972	9.857777	90	-2.9063807	13.4861948	-10.74138819
41	20.4217986	9.1207945	6.127986	91	4.9408416	-14.0034665	18.56904045
42	-21.1959441	-7.8607605	-3.140561	92	11.3082723	1.4397877	3.10609457
43	-11.2699904	-18.7183420	8.272226	93	-0.4534861	4.6834796	-11.56954490
44	-7.8762134	-26.7776031	16.741964	94	32.1354718	20.0733060	8.79166786
45	9.8649623	7.3227411	-7.717818	95	28.3999689	2.7961558	16.71938289
46	-6.0630631	6.6441324	-7.180399	96	10.2157633	8.6393136	-4.64085830
47	-6.6119642	8.7483861	-13.911816	97	-8.0599844	-6.9894894	-9.23106992
48	-15.9578305	-15.2723143	3.544660	98	-15.3659528	4.0820317	-11.57595968
49	-13.5440386	-9.0663125	5.753270	99	6.1685844	-8.3088154	8.61173484
50	-5.5307712	-1.0299145	-16.274833	100	6.1160856	4.2433242	-3.63601354

จากภาพที่ 4.8 มุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดมี 3 มุม คือ 57° , 58° และ 71° ตามลำดับ จุดอิสระจากมุมเหล่านี้จะทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด ในที่นี้ผู้วิจัยเลือกใช้มุม 71° โดยเลื่อนปุ่ม “theta” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.7 ไปที่ 71 ทำให้บริเวณดังกล่าวสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด 37 จุด ดังภาพที่ 4.9



ภาพที่ 4.9 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณี $n = 100$

จากภาพที่ 4.9 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันจำนวน 3 จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย คือ

$$\mathbf{e}_1 = (0.326, 0.946)', \mathbf{e}_2 = (-0.982, -0.191)', \mathbf{e}_3 = (0.656, -0.755)'$$

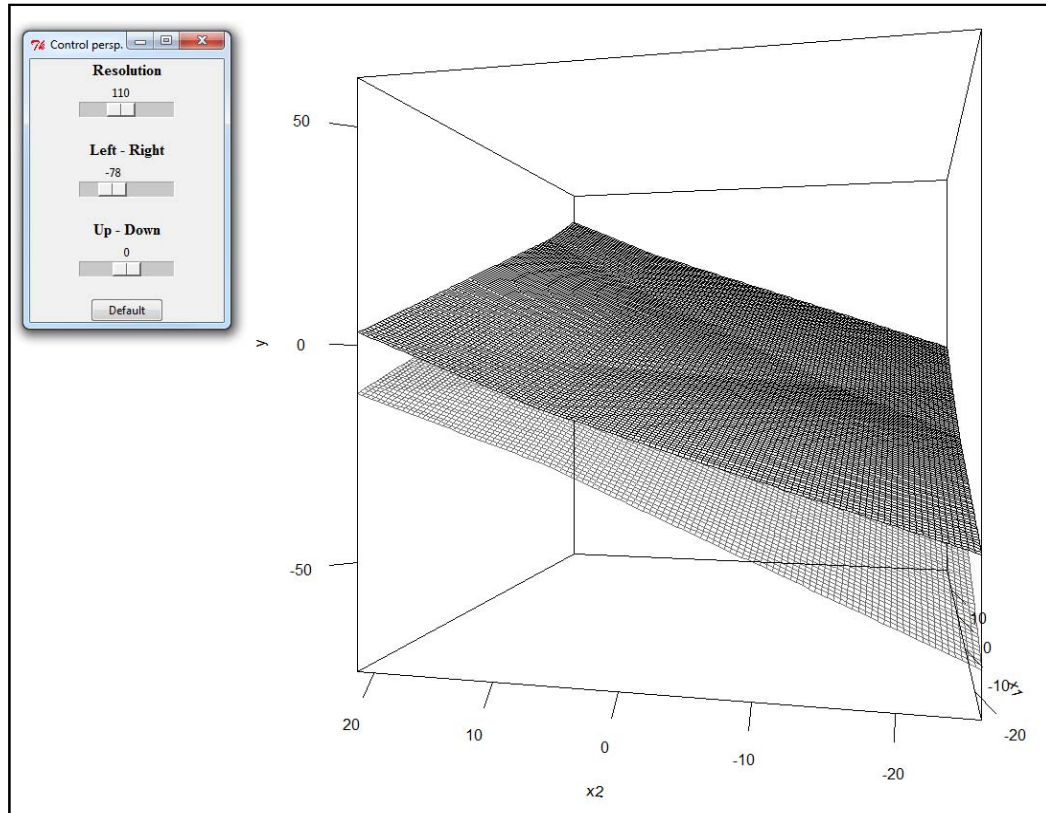
ขณะที่จุดอิสระทั้ง 3 จุด คือ

$$\mathbf{a}_1 = (8.226, 9.653)', \mathbf{a}_2 = (1.153, -13.964)', \mathbf{a}_3 = (-13.991, 7.106)'$$

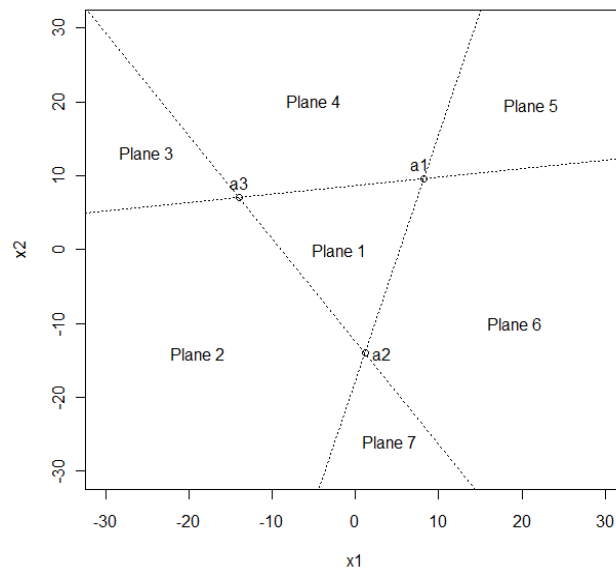
โปรแกรมสามารถสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระได้ดังภาพที่ 4.10 โดยกดปุ่ม “Plot” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.7 และสามารถแสดงการแบ่งพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นทั้ง 7 ระนาบ ได้ดังภาพที่ 4.11 ทำให้สมการระนาบของพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระเป็นดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ระนาบของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณี $n = 100$

Plane	Upper band			Lower band		
	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2
1	3.234	1.076	1.050	-2.606	1.076	1.050
2	1.076	0.833	0.876	-0.449	1.319	1.225
3	-1.154	0.804	1.132	1.781	1.348	0.969
4	1.003	1.047	1.306	-0.376	1.106	0.794
5	-0.449	1.319	1.225	1.076	0.833	0.876
6	1.781	1.348	0.969	-1.154	0.804	1.132
7	-0.376	1.106	0.794	1.003	1.047	1.306



ภาพที่ 4.10 แลบทความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 100$



ภาพที่ 4.11 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับ
ระนาบของแลบทความเชื่อมั่นทั้ง 7 ระนาบ กรณี $n = 100$

รายละเอียดข้างต้นสามารถแสดงได้ โดยกดปุ่ม “Show details” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.7 โปรแกรมจะแสดงข้อมูลทั้งหมดเกี่ยวกับการวิเคราะห์ห้ตัวแบบและสมการพื้นผิวของแถบความเชื่อมั่นดังตารางที่ 4.7

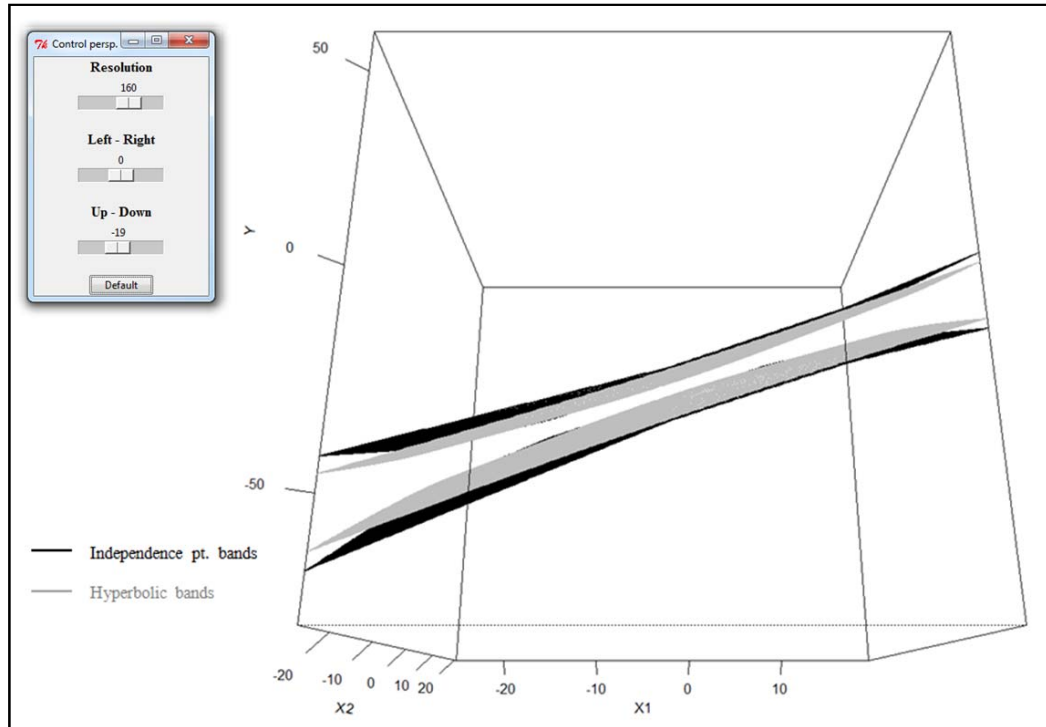
ตารางที่ 4.7 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณี $n = 100$

\$n	\$plane.up		
[1] 100	Beta0	Beta1	Beta2
\$R.squared	plane1up	3.2336717	1.0761792
[1] 0.8100137	plane2up	1.0764605	0.8333439
\$alpha	plane3up	-1.1538735	0.8039933
[1] 0.05	plane4up	1.0033377	1.0468285
\$theta	plane5up	-0.4488615	1.3190144
[1] 71	plane6up	1.7814725	1.3483650
\$eqd.pt	plane7up	-0.3757386	1.1055298
e1 e2 e3	\$plane.low		
[1.] 0.3255682 -0.9816272 0.6560590	Beta0	Beta1	Beta2
[2.] 0.9455186 -0.1908090 -0.7547096	plane1low	-2.6060726	1.0761792
\$ind.pt	plane2low	-0.4488615	1.3190144
a1 a2 a3	plane3low	1.7814725	1.3483650
[1.] 8.226476 1.153118 -13.991253	plane4low	-0.3757386	1.1055298
[2.] 9.653120 -13.963733 7.106443	plane5low	1.0764605	0.8333439
\$est.par	plane6low	-1.1538735	0.8039933
(Intercept) x1 x2	plane7low	1.0033377	1.0468285
0.3137995 1.0761792 1.0504040	\$points.in.convex		
	[1] 37		

การเปรียบเทียบเชิงกราฟิกระหว่างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปของ Scheffé สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4.12 หรือสามารถเปรียบเทียบเชิงตัวเลขได้ดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณี $n = 100$

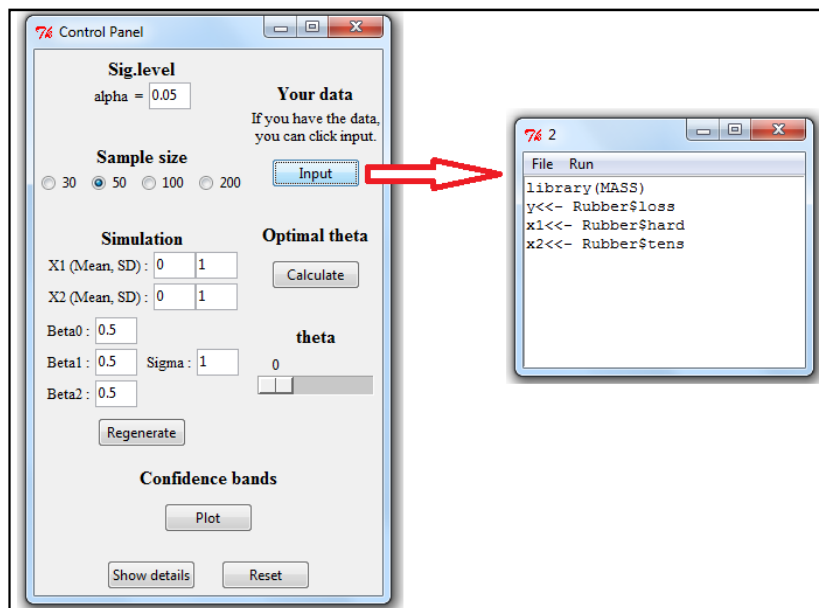
จุด	แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ			แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก (Scheffé)		
	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง
\bar{x}	2.558	-3.282	5.840	1.612	-2.336	3.948
a_1	22.160	16.320	5.840	22.664	15.826	6.838
a_2	-10.453	-16.293	5.840	-9.959	-16.798	6.838
a_3	-4.032	-9.872	5.840	-3.532	-10.371	6.838



ภาพที่ 4.12 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé
และแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณี $n = 100$

□

4.2.3 กรณีข้อมูลจากการนำเข้า



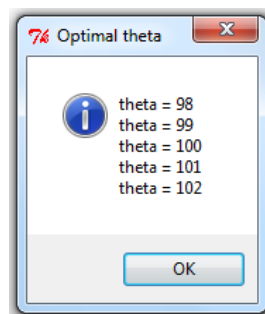
ภาพที่ 4.13 แผงควบคุม กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

จากภาพที่ 4.13 กดปุ่ม “Input” ในช่อง “Your data” ของแผงควบคุม จะปรากฏหน้าต่างเพื่อรับข้อมูล ในที่นี้ผู้วิจัยทำการทดลองโดยใช้ข้อมูลชื่อ “Rubber” จาก “MASS” Package ของ O.L. Davies เป็นข้อมูลการทดสอบยางรถจำนวน 30 เส้น ประกอบด้วยตัวแปรจำนวน 3 ตัว ได้แก่ การสึกหรอจากการเสียดทาน (loss: gm/hr), ความแข็งของยางรถ (hard: Shore units) และแรงดึง (tens: kg/m²) โดยผู้วิจัยกำหนดให้ตัวแปรตาม y คือ loss, ตัวแปรอิสระ x_1 คือ hard และตัวแปรอิสระ x_2 คือ tens ตามลำดับ เมื่อกำหนดตัวแปรเสร็จแล้ว กดปุ่ม “Run” เพื่อให้โปรแกรมรับค่าตัวแปรเข้าไป โดยข้อมูลดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 ข้อมูล Rubber

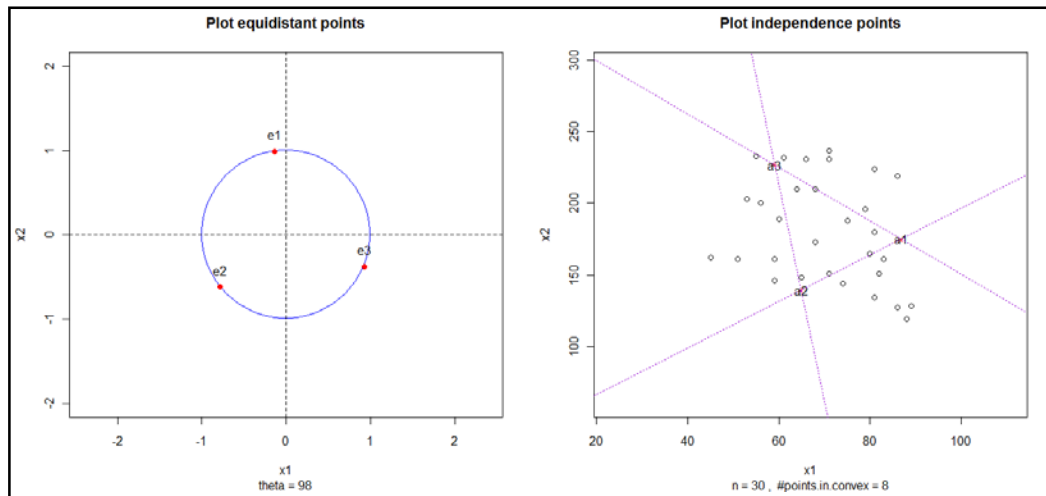
	loss	hard	tens		loss	hard	tens
1	372	45	162	16	196	68	173
2	206	55	233	17	128	75	188
3	175	61	232	18	97	83	161
4	154	66	231	19	64	88	119
5	136	71	231	20	249	59	161
6	112	71	237	21	219	71	151
7	55	81	224	22	186	80	165
8	45	86	219	23	155	82	151
9	221	53	203	24	114	89	128
10	166	60	189	25	341	51	161
11	164	64	210	26	340	59	146
12	113	68	210	27	283	65	148
13	82	79	196	28	267	74	144
14	32	81	180	29	215	81	134
15	228	56	200	30	148	86	127

ต่อมาคำนวณหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด โดยกดปุ่ม “Calculate” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.13 โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์เป็นมุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดดังภาพที่ 4.14



ภาพที่ 4.14 มุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุด กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

จากภาพที่ 4.14 มุมที่สามารถนำมาสร้างเป็นจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดมี 5 มุม คือ $98^\circ, 99^\circ, 100^\circ, 101^\circ$ และ 102° ตามลำดับ จุดอิสระจากมุมเหล่านี้จะทำให้บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด ในที่นี้ผู้วิจัยเลือกใช้มุม 98° โดยเลื่อนปุ่ม “theta” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.13 ไปที่ 98 ทำให้บริเวณดังกล่าวสามารถคลุมจุดข้อมูลได้มากที่สุด 8 จุด ดังภาพที่ 4.15



ภาพที่ 4.15 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันและบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

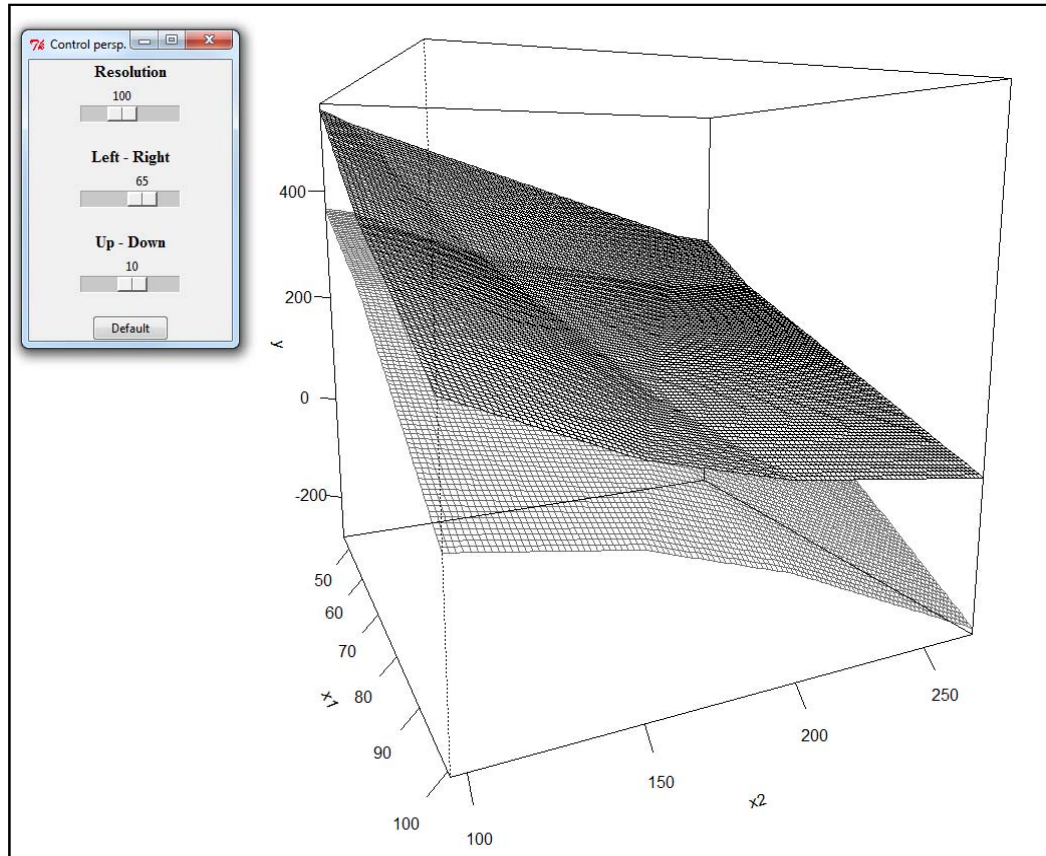
จากภาพที่ 4.15 จุดที่มีระยะห่างเท่ากันจำนวน 3 จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย คือ

$$\mathbf{e}_1 = (-0.139, 0.990)', \mathbf{e}_2 = (-0.788, -0.616)', \mathbf{e}_3 = (0.927, -0.375)'$$

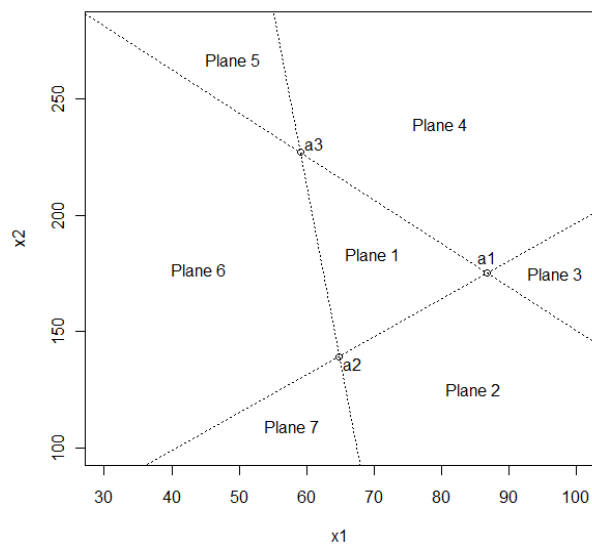
ขณะที่จุดอิสระทั้ง 3 จุด คือ

$$\mathbf{a}_1 = (86.863, 175.151)', \mathbf{a}_2 = (64.868, 139.359)', \mathbf{a}_3 = (59.069, 226.891)'$$

โปรแกรมสามารถสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระได้ดังภาพที่ 4.16 โดยกดปุ่ม “Plot” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.13 และสามารถแสดงการแบ่งพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นทั้ง 7 ระนาบ ได้ดังภาพที่ 4.17 ทำให้สมการระนาบของพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระเป็นดังตารางที่ 4.10



ภาพที่ 4.16 แลพบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า



ภาพที่ 4.17 การแบ่งอาณาบริเวณของระนาบ x_1 และ x_2 ที่สมนัยกับระนาบของแลบความเชื่อมั่นทั้ง 7 ระนาบ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

ตารางที่ 4.10 ระบายของพื้นผิวด้านบน - ด้านล่างของแถบความเชื่อมั่น กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

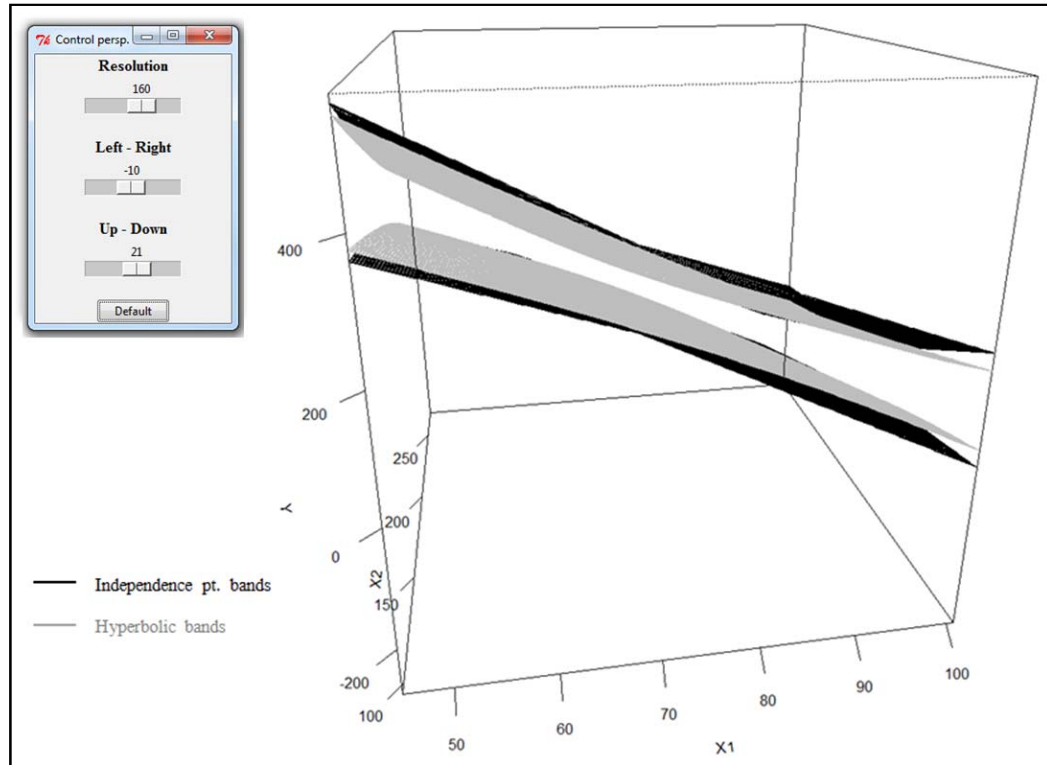
Plane	Upper band			Lower band		
	β_0	β_1	β_2	β_0	β_1	β_2
1	914.529	-6.571	-1.374	855.794	-6.571	-1.374
2	935.001	-5.585	-1.980	835.321	-7.556	-0.769
3	677.174	-4.160	-1.215	1093.149	-8.981	-1.534
4	656.701	-5.146	-0.609	1113.621	-7.996	-2.140
5	835.321	-7.556	-0.769	935.001	-5.585	-1.980
6	1093.149	-8.981	-1.534	677.174	-4.160	-1.215
7	1113.621	-7.996	-2.140	656.701	-5.146	-0.609

รายละเอียดข้างต้นสามารถแสดงได้ โดยกดปุ่ม “Show details” ในแผงควบคุมดังภาพที่ 4.13 โปรแกรมจะแสดงข้อมูลทั้งหมดเกี่ยวกับการวิเคราะห์ตัวแบบและสมการพื้นผิวของแถบความเชื่อมั่นดังตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11 ข้อมูลจากการวิเคราะห์ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

\$n	\$plane.up		
[1] 30	Beta0	Beta1	Beta2
\$R.squared	plane1up	914.5285	-6.570830 -1.3743118
[1] 0.8402314	plane2up	935.0012	-5.585189 -1.9800117
\$alpha	plane3up	677.1737	-4.160360 -1.2146005
[1] 0.05	plane4up	656.7010	-5.146000 -0.6089007
\$theta	plane5up	835.3210	-7.556470 -0.7686119
[1] 98	plane6up	1093.1485	-8.981300 -1.5340230
\$seqd.pt	plane7up	1113.6212	-7.995660 -2.1397229
e1 e2 e3	\$plane.low	Beta0	Beta1
[1.] -0.1391731 -0.7880108 0.9271839	plane1low	855.7938	-6.570830 -1.3743118
[2.] 0.9902681 -0.6156615 -0.3746066	plane2low	835.3210	-7.556470 -0.7686119
\$ind.pt	plane3low	1093.1485	-8.981300 -1.5340230
a1 a2 a3	plane4low	1113.6212	-7.995660 -2.1397229
[1.] 86.86323 64.86821 59.06856	plane5low	935.0012	-5.585189 -1.9800117
[2.] 175.15052 139.35858 226.89091	plane6low	677.1737	-4.160360 -1.2146005
\$sest.par	plane7low	656.7010	-5.146000 -0.6089007
(Intercept) x1 x2	\$points.in.convex	[1] 8	
885.161109 -6.570830 -1.374312			

การเปรียบเทียบเชิงกราฟิกระหว่างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกบนปริภูมิทั่วไปของ Scheffé สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 4.18



ภาพที่ 4.18 แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé และ แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

หรือสามารถแสดงการเปรียบเทียบเชิงตัวเลขได้ดังตารางที่ 4.12

ตารางที่ 4.12 การเปรียบเทียบความกว้างของแถบความเชื่อมั่นที่จุดต่างๆ กรณีข้อมูลจากการนำเข้า

จุด	แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระ			แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิก (Scheffé)		
	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ความกว้าง
\bar{x}	204.846	146.111	58.735	195.287	155.580	39.707
a_1	103.095	44.360	58.735	108.074	39.300	68.774
a_2	296.802	238.067	58.735	301.789	233.015	68.774
a_3	214.638	155.903	58.735	219.597	150.823	68.774

□

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในการหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพื่อใช้สร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระสำหรับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุ เมื่อกำหนดให้จุดอิสระมีค่าขึ้นอยู่กับมุม θ จากการใช้โปรแกรมช่วยจำลองภาพการหมุนของบริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระที่มีต่อมุม θ ปรากฏว่าเมื่อเพิ่มมุม θ ให้มีค่ามากขึ้น บริเวณดังกล่าวมีลักษณะการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่มีศูนย์กลางที่ \bar{x} และมีพื้นที่คงที่ตลอดไม่ว่ามุม θ มีค่าเป็นเท่าใดก็ตาม

จากผลการทดลองในขนาดตัวอย่างต่างๆ ภายใต้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระคลุมจุดข้อมูลเยอะที่สุด จุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดสามารถมีได้หลายชุด การใช้เกณฑ์ดังกล่าวเป็นเพียงการลดจำนวนชุดของจุดอิสระที่ไม่เหมาะสมกับข้อมูลออกไปให้มากที่สุด และข้อสังเกตอีกอย่างหนึ่งคือขนาดตัวอย่างของข้อมูลน่าจะมีผลต่อการหาจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เกณฑ์ดังกล่าวด้วย กล่าวคือ “ถ้าขนาดตัวอย่างมีจำนวนมากขึ้น จำนวนชุดของจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดควรมีแนวโน้มที่ลดลง และจะมีจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดเพียงชุดเดียว (Unique) ถ้าขนาดตัวอย่างมีจำนวนมากในระดับหนึ่ง” เพราะจำนวนจุดข้อมูลที่เยอะกว่า สามารถบอกความแตกต่างของจุดข้อมูลภายใต้เกณฑ์ดังกล่าวได้ดีกว่ากรณีที่มีจำนวนจุดข้อมูลน้อย

การเปรียบเทียบทั้งในเชิงกราฟิกและเชิงตัวเลขของความกว้างของแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระกับแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé พบว่าแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระมีความกว้างโดยรวมมากกว่าแถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé กล่าวคือ การใช้แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระจะให้ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณพิสัยของตัวแบบที่มากกว่า แต่หากพิจารณาการนำไปประยุกต์ใช้ในบางงานวิจัย แถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ดีกว่า เพราะพื้นที่ผิวของแถบความเชื่อมั่นมีลักษณะเป็นเชิงเส้นในช่วง ขณะที่แถบความเชื่อมั่นไฮเพอร์โบลิกของ Scheffé มีลักษณะเป็นส่วนโค้ง ทำให้ซับซ้อนต่อการใช้งาน

5.2 ข้อเสนอแนะ

- 1) ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ไม่ควรมีขนาดใหญ่เกินกว่า 200 เพื่อป้องกันปัญหาโปรแกรมค้างจากการทำงานหนักเกินไป
- 2) การใช้เกณฑ์บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระกลุ่มจุดข้อมูลเยอะที่สุด วิธีหมุมมุม θ เพิ่มขึ้นครั้งละ 1° อาจไม่เหมาะกับข้อมูลที่มีขนาดตัวอย่างน้อย เพราะไม่สามารถบอกถึงความแตกต่างของจุดข้อมูลตามเกณฑ์ได้ชัดเจน กล่าวคือ แม้ว่าจะเพิ่มมุม θ ให้มากขึ้น แต่บริเวณคอนเวกซ์ของจุดอิสระก็ยังคลุมจุดข้อมูลเท่ากับตอนที่ยังไม่ได้เพิ่มมุม θ ซึ่งวิธีแก้ปัญหานี้อาจต้องใช้การวิเคราะห์ทางสถิติอื่นๆ เข้ามาช่วย เพื่อให้ได้จุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดจริงๆ เช่น วิธีบูตสแตรป (Bootstrapping method)
- 3) อาจนำไปต่อยอดแนวคิดเพื่อใช้พัฒนาเป็นโปรแกรมที่สามารถใช้ได้กับตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 2 ตัว โดยมุ่งเน้นวิธีการที่มีประสิทธิภาพ สะดวกต่อการใช้งาน และให้ผลลัพธ์ไม่ต่างไปจากวิธีการดั้งเดิม

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ธีระพร วีระถาวร. 2541. ตัวแบบเชิงเส้น: ทฤษฎีและการประยุกต์. กรุงเทพมหานคร: วิทยพัฒน์.

ภาษาอังกฤษ

Gafarian, A.V. 1964. Confidence bands in straight line regression. Journal of the American Statistical Association: 182-213.

Graybill, F.A. and Bowden, D.C. 1967. Linear segment confidence bands for simple linear regression models. Journal of the American Statistical Association: 403-408.

Hayter, A.J., Kiatsupaibul, S., Liu, W. and Wynn, H.P. 2010. An independence point method of confidence band construction for multiple linear regression models. Forthcoming.

Kleinbaum, D.G., Kupper, L.L., Muller, K.E. and Nizam, A. 1998. Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods, 3rd Edition.

Liu, W. 2010. Simultaneous Inference in Regression. Chapman & Hall.

Scheffé, H. 1953. A method for judging all contrasts in analysis of variance. Biometrika: 87-104.

Working, H. and Hotelling, H. 1929. Applications of the theory of error to the interpretation of trends. Journal of the American Statistical Association: 73-85.

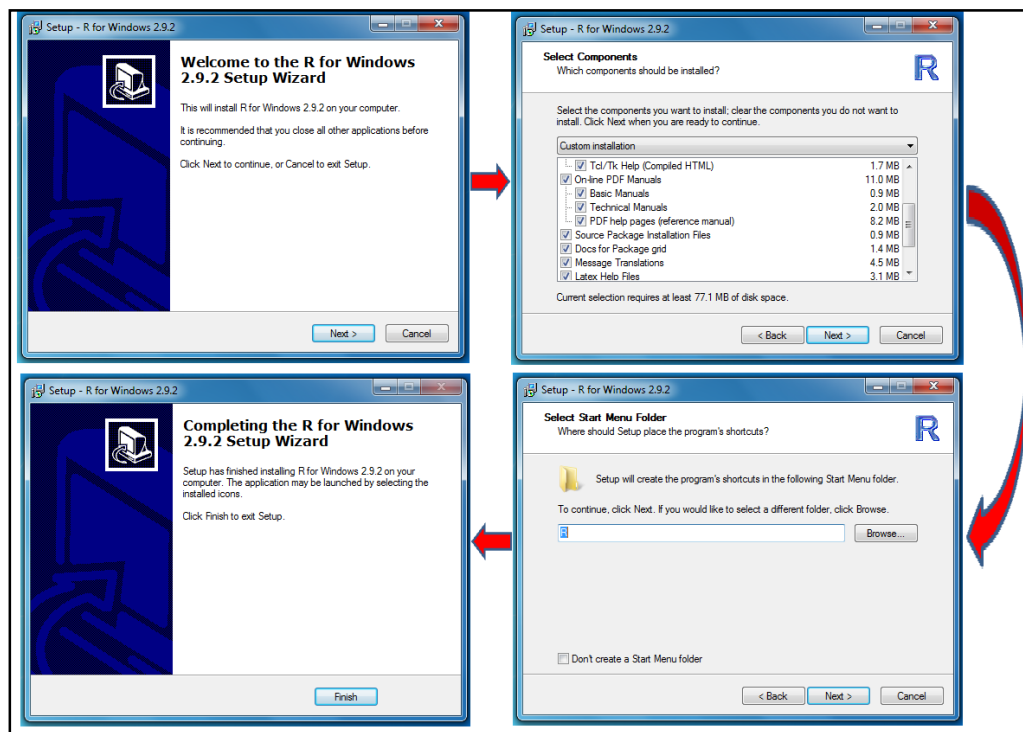
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การติดตั้งโปรแกรม R และ Packages ส่วนเสริม

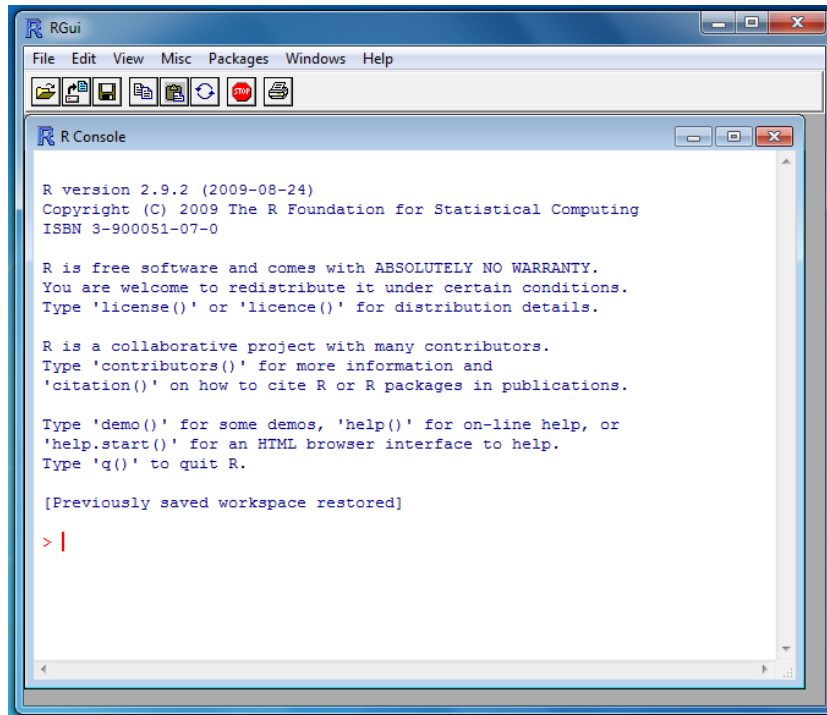
ก.1 การติดตั้งโปรแกรม R สำหรับ Microsoft Windows

โปรแกรม R สามารถดาวน์โหลดใช้ได้ฟรี โดยเวอร์ชัน 2.9.2 เป็นเวอร์ชันที่ผู้วิจัยใช้อ้างอิง สามารถดาวน์โหลดได้ที่ <http://cran.r-project.org/bin/windows/base/old/2.9.2/> และไฟล์ที่ดาวน์โหลดคือ R-2.9.2-win32.exe เมื่อดาวน์โหลดเสร็จแล้ว ขั้นตอนต่อไปให้ทำการติดตั้งโปรแกรม ดังภาพที่ ก1



ภาพที่ ก1 การติดตั้งโปรแกรม R

เมื่อกดให้โปรแกรม R ทำงาน จะปรากฏหน้าต่างคำสั่ง ดังภาพที่ ก2



ภาพที่ ก2 หน้าต่างโปรแกรม R

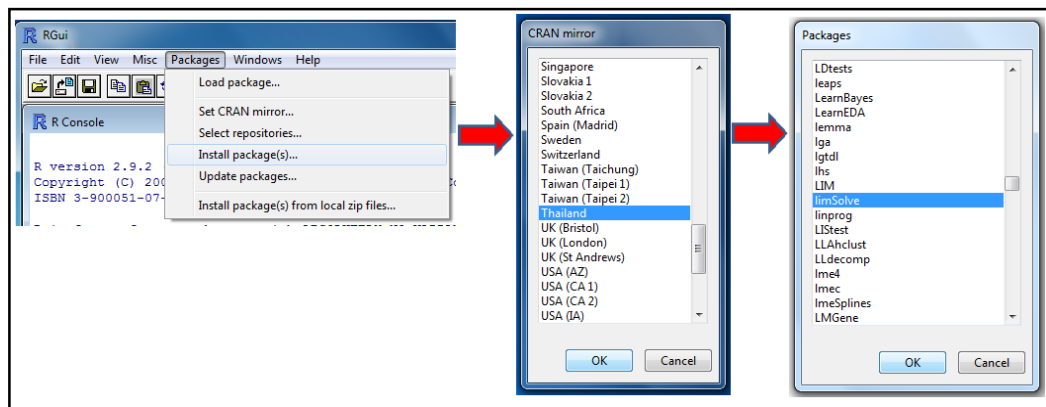
ก.2 การติดตั้ง Packages ส่วนเสริมลงในโปรแกรม R

ในบางครั้งหากต้องการใช้ฟังก์ชันการคำนวณเฉพาะทาง ซึ่งฟังก์ชันพื้นฐานของโปรแกรม R ไม่มี เราจำเป็นต้องติดตั้ง Packages ส่วนเสริมลงในโปรแกรม R เสียก่อน เพื่อให้โปรแกรมสามารถใช้ฟังก์ชันเฉพาะทางได้ โดยโปรแกรมในภาคผนวก ข จำเป็นต้องติดตั้ง Packages “limSolve” และ “splancs” มีขั้นตอนการติดตั้ง ดังนี้

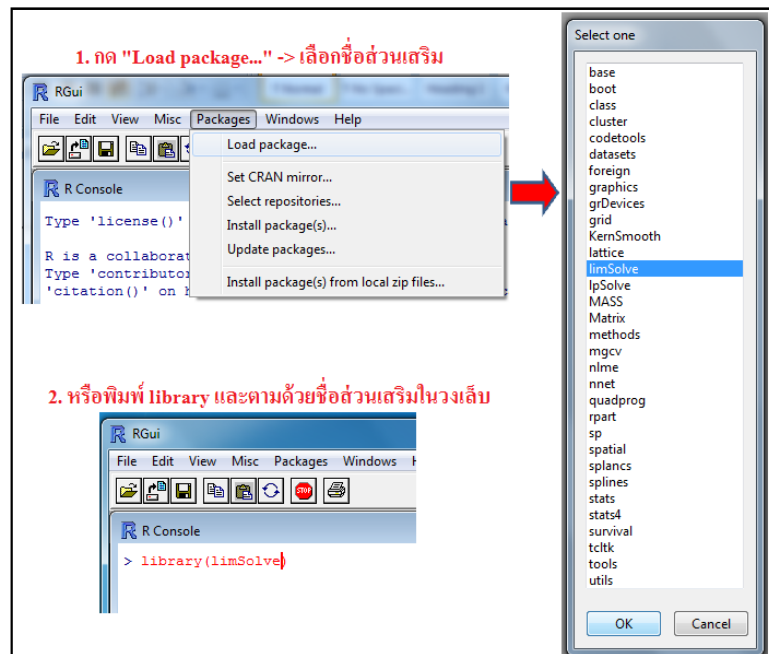
- 1) จากหน้าต่างโปรแกรม R ดังภาพที่ ก2 ให้เลือกเมนู “Packages” ทางด้านบนและเลือก “Install package(s)...”
- 2) ถัดมาจะมีหน้าต่างชื่อ CRAN mirror ปรากฏขึ้น เพื่อให้เลือก server ของประเทศที่ต้องการดาวน์โหลด ในที่นี้ผู้วิจัยแนะนำให้เลือก “Thailand”
- 3) ถัดมาจะมีหน้าต่างชื่อ Packages ปรากฏขึ้น ให้ทำการเลือก Packages ส่วนเสริมชื่อว่า “limSolve” และ “splancs”
- 4) เมื่อกด “OK” แล้ว รอสักครู่ โปรแกรมจะติดตั้ง Packages ส่วนเสริมลงในโปรแกรมหลัก
- 5) การใช้ฟังก์ชันที่มาจาก Packages ส่วนเสริมเหล่านี้ สามารถทำได้ 2 วิธี คือ

- 5.1) เลือกเมนู “Packages” และกดเลือก “Load package...” จากนั้นเลือกชื่อของส่วนเสริมที่ต้องการนำมาใช้
- 5.2) กดพิมพ์ library(...) และภายในฟังก์ชัน library ให้พิมพ์เป็นชื่อส่วนเสริม เช่น ถ้าต้องการใช้ฟังก์ชันจาก Packages ส่วนเสริม “limSolve” ให้พิมพ์ “library(limSolve)” ลงในโปรแกรม

โดยขั้นตอนที่ 1-4 สามารถแสดงได้ดังภาพที่ ก3 และขั้นตอนที่ 5 สามารถแสดงได้ดังภาพที่ ก4



ภาพที่ ก3 ตัวอย่างการติดตั้ง Packages ส่วนเสริม



ภาพที่ ก4 ตัวอย่างการให้ Packages ส่วนเสริมทำงาน

ภาคผนวก ข

โปรแกรมสร้างแถบความเชื่อมั่นด้วยวิธีจุดอิสระที่เหมาะสมที่สุดแบบสองด้าน

กรณีมีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ด้วยโปรแกรม R

```

# Independence points method conf.bands 2-sided case for k=2 #
library(limSolve); library(splancs); library(tcltk)

Alpha<- tclVar(0.05); size<- tclVar(50); Theta<- tclVar(0)

mean.x1<- tclVar(0); sd.x1<- tclVar(1); mean.x2<- tclVar(0); sd.x2<- tclVar(1)

Beta0<- tclVar(0.5); Beta1<- tclVar(0.5); Beta2<- tclVar(0.5); Sigma<- tclVar(1)

local({ have_ttk<- as.character(tcl("info", "tclversion")) >= "8.5"

  if(have_ttk) {tkbutton<- tkbutton; tkentry<- tkentry; tkframe<- tkframe
    tklabel<- tklabel; tkradiobutton<- tkradiobutton}

  conf.band<- function(...) {

    dat<- data.frame(y, x1, x2); n<- dim(dat)[1]; k<- dim(dat)[2]-1; fit.model<- lm(y ~ x1 + x2)

    r.sq<- summary(fit.model)$r.squared; cc<- coef(fit.model)

    yhat<- function(x1, x2) {cc[[1]] + cc[[2]]*x1 + cc[[3]]*x2}; xbar<- c(mean(x1), mean(x2))

    # Compute variance and matrix S & we define S = t(sqrtS) %>% sqrtS #

    v<- (k+1)/n

    S<- matrix(c(sum((x1-mean(x1))^2), sum((x1-mean(x1))*(x2-mean(x2))),
      sum((x1-mean(x1))*(x2-mean(x2))), sum((x2-mean(x2))^2)), nrow = k, byrow = T)

    s<- svd(S); P<- s$v; D<- diag(s$d); sqrtS<- t(P%>%sqrt(D))

    e1<- c(cos(theta*pi/180), sin(theta*pi/180)); e2<- c(cos((theta+120)*pi/180), sin((theta+120)*pi/180))
    e3<- c(cos((theta+240)*pi/180), sin((theta+240)*pi/180)); eqp<- cbind(e1, e2, e3)

    a1<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%>%e1) + xbar; a2<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%>%e2) + xbar
    a3<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%>%e3) + xbar; a<- cbind(a1, a2, a3)

    a.x1<- c(a[1,], a[2,], a[3,]); a.x2<- c(a[1,2], a[2,2], a[3,2]); co.x1.x2<- data.frame(x1, x2)

    mat<- cbind(c(a.x1, a.x1[1]), c(a.x2, a.x2[1])); check<- inout(co.x1.x2, mat, bound=T)

    num.pt<- sum(check); alphastar<- 1-(1-alpha)^(1/(k+1)); sigmahat<- summary(fit.model)$sigma

    llim<- ulim<- c(); me<- sigmahat*qt(1-alphastar/2,n-k-1)*sqrt(v)

    for(i in 1:(k+1)){ llim[i]<- yhat(a[,i][1],a[,i][2]) - me; ulim[i]<- yhat(a[,i][1],a[,i][2]) + me}

```

```

out<- cbind(llim, ulim); setl<- setu<- c()

G<- matrix(nrow=6,byrow=T,data=c(-1,-a1[1],-a1[2], 1,a1[1],a1[2], -1,-a2[1],-a2[2],
                                1,a2[1],a2[2], -1,-a3[1],-a3[2], 1,a3[1],a3[2]))

H<- c(-ulim[1], llim[1], -ulim[2], llim[2], -ulim[3], llim[3])

for(i in 1:dim(dat)[1]) {Costmax<- c(-1, -x1[i], -x2[i]); Costmin<- c(1, x1[i], x2[i])

  lmax<- linp(E=NULL, F=NULL, Cost=Costmax, G=G, H=H, ispos=F)

  lmin<- linp(E=NULL, F=NULL, Cost=Costmin, G=G, H=H, ispos=F)

  setu<- rbind(setu, c(x1[i], x2[i], lmax$X, lmax$solutionNorm))

  colnames(setu)<- c("x1", "x2", "Beta0", "Beta1", "Beta2", "Solution")

  setl<- rbind(setl, c(x1[i], x2[i], lmin$X, lmin$solutionNorm))

  colnames(setl)<- c("x1", "x2", "Beta0", "Beta1", "Beta2", "Solution")}

# Plane 1 upper #

out1<- setuu<- c()

check.up<- (round(setu[,4],4)==round(cc[[2]],4)) & (round(setu[,5],4)==round(cc[[3]],4))

for(i in 1:dim(dat)[1]) { if(check.up[i]==T) {out1<- c(out1, i)} }

for(i in out1) { setuu<- rbind(setuu, setu[i,]) }

plane1up<- c(setuu[1,3], setuu[1,4], setuu[1,5])

# Plane 1 lower #

out2<- setll<- c()

check.low<- (round(setl[,4], 4)==round(cc[[2]], 4)) & (round(setl[,5], 4)==round(cc[[3]], 4))

for(i in 1:dim(dat)[1]) { if(check.low[i]==T) {out2<- c(out2, i)} }

for(i in out2) { setll<- rbind(setll, setl[i,]) }

plane1low<- c(setll[1,3], setll[1,4], setll[1,5])

plane1up.fun<- function(x1, x2){plane1up[[1]]+plane1up[[2]]*x1+plane1up[[3]]*x2}

plane1low.fun<- function(x1, x2){plane1low[[1]]+plane1low[[2]]*x1+plane1low[[3]]*x2}

a.y.low<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==1] # The lowest of ind. pt., we set pt. rank = 1 #

a.y.mid<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==2] # The middle of ind. pt., we set pt. rank = 2 #

a.y.high<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==3] # The highest of ind. pt., we set pt. rank = 3 #

a1.up<- c(a.y.low, plane1up.fun(a.y.low[1], a.y.low[2]))

a2.up<- c(a.y.mid, plane1up.fun(a.y.mid[1], a.y.mid[2]))

a3.up<- c(a.y.high, plane1up.fun(a.y.high[1], a.y.high[2]))

```

```

a1.low<- c(a.y.low, plane1low.fun(a.y.low[1],a.y.low[2]))
a2.low<- c(a.y.mid, plane1low.fun(a.y.mid[1],a.y.mid[2]))
a3.low<- c(a.y.high, plane1low.fun(a.y.high[1],a.y.high[2]))
# Plane 2 upper = Plane 5 lower (a1.up, a2.up, a3.low) #
p2.1<- a2.up - a1.up; p2.2<- a3.low - a1.up
N.2<- c(det(matrix(c(p2.1[2], p2.1[3], p2.2[2], p2.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p2.1[1], p2.1[3], p2.2[1], p2.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        det(matrix(c(p2.1[1], p2.1[2], p2.2[1], p2.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane2up<- c(1/N.2[3]*(N.2[1]*a1.up[1]+N.2[2]*a1.up[2]+N.2[3]*a1.up[3]),
            -N.2[1]/N.2[3],-N.2[2]/N.2[3])
names(plane2up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane5low<- plane2up
# Plane 3 upper = Plane 6 lower (a2.up, a1.low, a3.low) #
p3.1<- a1.low - a2.up; p3.2<- a3.low - a2.up
N.3<- c(det(matrix(c(p3.1[2], p3.1[3], p3.2[2], p3.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p3.1[1], p3.1[3], p3.2[1], p3.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        det(matrix(c(p3.1[1], p3.1[2], p3.2[1], p3.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane3up<- c(1/N.3[3]*(N.3[1]*a2.up[1]+N.3[2]*a2.up[2]+N.3[3]*a2.up[3]),
            -N.3[1]/N.3[3],-N.3[2]/N.3[3])
names(plane3up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane6low<- plane3up
# Plane 4 upper = Plane 7 lower (a2.up, a3.up, a1.low) #
p4.1<- a3.up - a2.up; p4.2<- a1.low - a2.up
N.4<- c(det(matrix(c(p4.1[2], p4.1[3], p4.2[2], p4.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p4.1[1], p4.1[3], p4.2[1], p4.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        det(matrix(c(p4.1[1], p4.1[2], p4.2[1], p4.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane4up<- c(1/N.4[3]*(N.4[1]*a2.up[1]+N.4[2]*a2.up[2]+N.4[3]*a2.up[3]),
            -N.4[1]/N.4[3],-N.4[2]/N.4[3])
names(plane4up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane7low<- plane4up
# Plane 5 upper = Plane 2 lower (a3.up, a1.low, a2.low) #
p5.1<- a1.low - a3.up; p5.2<- a2.low - a3.up
N.5<- c(det(matrix(c(p5.1[2], p5.1[3], p5.2[2], p5.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p5.1[1], p5.1[3], p5.2[1], p5.2[3]), ncol=2, byrow=T)),

```

```

      det(matrix(c(p5.1[1], p5.1[2], p5.2[1], p5.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane5up<- c(1/N.5[3]*(N.5[1]*a3.up[1]+N.5[2]*a3.up[2]+N.5[3]*a3.up[3]),
            -N.5[1]/N.5[3],-N.5[2]/N.5[3])
names(plane5up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane2low<- plane5up
# Plane 6 upper = Plane 3 lower (a1.up, a3.up, a2.low) #
p6.1<- a3.up - a1.up; p6.2<- a2.low - a1.up
N.6<- c(det(matrix(c(p6.1[2], p6.1[3], p6.2[2], p6.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p6.1[1], p6.1[3], p6.2[1], p6.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        det(matrix(c(p6.1[1], p6.1[2], p6.2[1], p6.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane6up<- c(1/N.6[3]*(N.6[1]*a1.up[1]+N.6[2]*a1.up[2]+N.6[3]*a1.up[3]),
            -N.6[1]/N.6[3],-N.6[2]/N.6[3])
names(plane6up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane3low<- plane6up
# Plane 7 upper = Plane 4 lower (a1.up, a2.low, a3.low) #
p7.1<- a2.low - a1.up; p7.2<- a3.low - a1.up
N.7<- c(det(matrix(c(p7.1[2], p7.1[3], p7.2[2], p7.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        -det(matrix(c(p7.1[1], p7.1[3], p7.2[1], p7.2[3]), ncol=2, byrow=T)),
        det(matrix(c(p7.1[1], p7.1[2], p7.2[1], p7.2[2]), ncol=2, byrow=T)))
plane7up<- c(1/N.7[3]*(N.7[1]*a1.up[1]+N.7[2]*a1.up[2]+N.7[3]*a1.up[3]),
            -N.7[1]/N.7[3],-N.7[2]/N.7[3])
names(plane7up)<- c("Beta0","Beta1","Beta2"); plane4low<- plane7up
plane.up<- rbind(plane1up,plane2up,plane3up,plane4up,plane5up,plane6up,plane7up)
plane.low<- rbind(plane1low,plane2low,plane3low,plane4low,plane5low,plane6low,plane7low)
outshow<-list( )
outshow$n<- n; outshow$R.squared<- r.sq; outshow$alpha<- alpha; outshow$theta<- theta
outshow$eqd.pt<- eqp; outshow$ind.pt<- a; outshow$est.par<- cc; outshow$plane.up<- plane.up
outshow$plane.low<- plane.low; outshow$points.in.convex<- num.pt; outshow
}
calc.pts<- function(...) {
  dat<- data.frame(y, x1, x2); n<- dim(dat)[1]; k<- dim(dat)[2]-1; fit.model<- lm(y ~ x1 + x2)
  cc<- coef(fit.model); yhat<- function(x1, x2) {cc[[1]] + cc[[2]]*x1 + cc[[3]]*x2}
  xbar<- c(mean(x1), mean(x2)); v<- (k+1)/n
}

```

```

S<- matrix(c(sum((x1-mean(x1))^2), sum((x1-mean(x1))*(x2-mean(x2))),
              sum((x1-mean(x1))*(x2-mean(x2))), sum((x2-mean(x2))^2)), nrow = k, byrow = T)
s<- svd(S); P<- s$v; D<- diag(s$d); sqrtS<- t(P%*%sqrt(D))
e1<- c(cos(theta*pi/180), sin(theta*pi/180)); e2<- c(cos((theta+120)*pi/180), sin((theta+120)*pi/180))
e3<- c(cos((theta+240)*pi/180), sin((theta+240)*pi/180)); eqp<- cbind(e1, e2, e3)
a1<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%*%e1) + xbar; a2<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%*%e2) + xbar
a3<- c(sqrt(k/n)*t(sqrtS)%*%e3) + xbar; a<- cbind(a1, a2, a3)
a.x1<- c(a1[1], a2[1], a3[1]); a.x2<- c(a1[2], a2[2], a3[2]); co.x1.x2<- data.frame(x1, x2)
mat<- cbind(c(a.x1, a.x1[1]), c(a.x2, a.x2[1])); check<- inout(co.x1.x2, mat, bound=T)
num.pt<- sum(check); num.pt
}

replot<- function(...) {
  if( !is.na(as.numeric(tclvalue(Alpha)))) {
    theta<<- as.numeric(tclvalue(Theta)); alpha<<- as.numeric(tclvalue(Alpha))
    if(alpha > 0 && alpha < 1) { n<- conf.band( )$n
      e1<- conf.band( )$eqd.pt[,1]; e2<- conf.band( )$eqd.pt[,2]; e3<- conf.band( )$eqd.pt[,3]
      a1<- conf.band( )$ind.pt[,1]; a2<- conf.band( )$ind.pt[,2]; a3<- conf.band( )$ind.pt[,3]
      e.x1<- c(e1[1], e2[1], e3[1]); e.x2<- c(e1[2], e2[2], e3[2]); a.x1<- c(a1[1], a2[1], a3[1])
      a.x2<- c(a1[2], a2[2], a3[2]); co.x1.x2<- data.frame(x1, x2); par(mfrow=c(1, 2))
      plot(seq(-2, 2, length=5), seq(-2, 2, length=5), type="n", xlab="x1", ylab="x2", asp=1)
      title(main="Plot equidistant points", sub=paste("theta =", theta))
      symbols(x=0, y=0, circles=1, fg="blue", inches=FALSE, add=TRUE)
      points(e.x1, e.x2, col="red", pch=19); abline(h=0, lty="dashed"); abline(v=0, lty="dashed")
      text(e1[1], e1[2]+0.2,"e1"); text(e2[1], e2[2]+0.2,"e2"); text(e3[1], e3[2]+0.2,"e3")
      rrx1<- (max(x1)-min(x1))/2; x1.up<- max(x1)+abs(rrx1); x1.low<- min(x1)-abs(rrx1)
      rrx2<- (max(x2)-min(x2))/2; x2.up<- max(x2)+abs(rrx2); x2.low<- min(x2)-abs(rrx2)
      plot(seq(x1.low,x1.up,length=15), seq(x2.low,x2.up,length=15), type="n",xlab="x1",ylab="x2")
      mat<- cbind(c(a.x1, a.x1[1]), c(a.x2, a.x2[1])); check<- inout(co.x1.x2, mat, bound=T)
      num.pt<- sum(check)
      title(main="Plot independence points",sub=paste("n =",n, ", ", "#points.in.convex =",num.pt))
      points(a.x1, a.x2, col="red", pch="*"); points(co.x1.x2); text(a1[1], a1[2],"a1")
    }
  }
}

```



```

}
regen()
detail<- function(...) {
  if( !is.na(as.numeric(tclvalue(Alpha))) ) {
    alpha<<- as.numeric(tclvalue(Alpha)); theta<<- as.numeric(tclvalue(Theta))
    if(alpha > 0 && alpha < 1) { y<<- replot()$y; x1<<- replot()$x1; x2<<- replot()$x2
      base.detail<- tkoplevel(); tkwm.title(base.detail, 'Results')
      yscr<- tkscrollbar(base.detail, command=function(...)tkyview(txt,...))
      xscr<- tkscrollbar(base.detail, command=function(...)tkxview(txt,...), orient='horiz')
      txt<- tktext(base.detail, bg="white", font="courier", yscrollcommand=function(...)tkset(yscr,...),
        xscrollcommand=function(...)tkset(xscr,...), wrap="none",
        font=tkfont.create(family='lucidatypewriter',size=12))
      tkpack(yscr,side="right",fill="y"); tkpack(xscr,side="bottom",fill="x")
      tkpack(txt,fill="both",expand=1); thestring<- capture.output(print(conf.band()))
      thestring<- paste(thestring,collapse='\n'); tkinsert(txt,"end", thestring)
      tkconfigure(txt, state="disabled");
    else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
      message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
  }
  else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
    message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
}
opt.theta<- function(...) { pts.convex<- theta<- angle<- c()
  for(i in 1:120){ angle[i]<- i-1; theta<<- i-1; pts.convex[i]<- calc.pts() }
  test.max<- (pts.convex==max(pts.convex)); opt.angle<- angle[test.max==T]
  theta<<- as.numeric(tclvalue(Theta)); opt.angle
}
press.cal <- function(...) {
  if( !is.na(as.numeric(tclvalue(Alpha))) ) { alpha<<- as.numeric(tclvalue(Alpha))
    if(alpha > 0 && alpha < 1) { y<<- replot()$y; x1<<- replot()$x1; x2<<- replot()$x2
      tkmessageBox(title="Optimal theta", message= paste("theta =", opt.theta(), collapse="\n"),

```

```

        icon="info",type="ok" ) }
else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
        message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
}
else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
        message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
}
conf.persp<- function(...) { alpha<<- as.numeric(tclvalue(Alpha)); theta<<- as.numeric(tclvalue(Theta))
a<- conf.band( )$ind.pt; a1<- a[,1]; a2<- a[,2]; a3<- a[,3]
coef.up<- conf.band( )$plane.up; coef.low<- conf.band( )$plane.low
plane1up.fun<- function(x1, x2){coef.up[1,1]+coef.up[1,2]*x1+coef.up[1,3]*x2}
plane2up.fun<- function(x1, x2){coef.up[2,1]+coef.up[2,2]*x1+coef.up[2,3]*x2}
plane3up.fun<- function(x1, x2){coef.up[3,1]+coef.up[3,2]*x1+coef.up[3,3]*x2}
plane4up.fun<- function(x1, x2){coef.up[4,1]+coef.up[4,2]*x1+coef.up[4,3]*x2}
plane5up.fun<- function(x1, x2){coef.up[5,1]+coef.up[5,2]*x1+coef.up[5,3]*x2}
plane6up.fun<- function(x1, x2){coef.up[6,1]+coef.up[6,2]*x1+coef.up[6,3]*x2}
plane7up.fun<- function(x1, x2){coef.up[7,1]+coef.up[7,2]*x1+coef.up[7,3]*x2}
plane1low.fun<- function(x1, x2){coef.low[1,1]+coef.low[1,2]*x1+coef.low[1,3]*x2}
plane2low.fun<- function(x1, x2){coef.low[2,1]+coef.low[2,2]*x1+coef.low[2,3]*x2}
plane3low.fun<- function(x1, x2){coef.low[3,1]+coef.low[3,2]*x1+coef.low[3,3]*x2}
plane4low.fun<- function(x1, x2){coef.low[4,1]+coef.low[4,2]*x1+coef.low[4,3]*x2}
plane5low.fun<- function(x1, x2){coef.low[5,1]+coef.low[5,2]*x1+coef.low[5,3]*x2}
plane6low.fun<- function(x1, x2){coef.low[6,1]+coef.low[6,2]*x1+coef.low[6,3]*x2}
plane7low.fun<- function(x1, x2){coef.low[7,1]+coef.low[7,2]*x1+coef.low[7,3]*x2}
rrx<- (max(a[1,])-min(a[1,]))/2; x.up<- max(a[1,])+abs(rrx); x.low<- min(a[1,])-abs(rrx)
rry<- (max(a[2,])-min(a[2,]))/2; y.up<- max(a[2,])+abs(rry); y.low<- min(a[2,])-abs(rry)
z.up<- max(plane1up.fun(x.up, y.up), plane1up.fun(x.up, y.low), plane1up.fun(x.low, y.up),
        plane1up.fun(x.low, y.low), plane2up.fun(x.up, y.up), plane2up.fun(x.up, y.low),
        plane2up.fun(x.low, y.up), plane2up.fun(x.low, y.low), plane3up.fun(x.up, y.up),
        plane3up.fun(x.up, y.low), plane3up.fun(x.low, y.up), plane3up.fun(x.low, y.low),
        plane4up.fun(x.up, y.up), plane4up.fun(x.up, y.low), plane4up.fun(x.low, y.up),

```

```

plane4up.fun(x.low, y.low), plane5up.fun(x.up, y.up), plane5up.fun(x.up, y.low),
plane5up.fun(x.low, y.up), plane5up.fun(x.low, y.low), plane6up.fun(x.up, y.up),
plane6up.fun(x.up, y.low), plane6up.fun(x.low, y.up), plane6up.fun(x.low, y.low),
plane7up.fun(x.up, y.up), plane7up.fun(x.up, y.low), plane7up.fun(x.low, y.up),
plane7up.fun(x.low, y.low))
z.low<- min(plane1low.fun(x.up, y.up), plane1low.fun(x.up, y.low), plane1low.fun(x.low, y.up),
plane1low.fun(x.low, y.low), plane2low.fun(x.up, y.up), plane2low.fun(x.up, y.low),
plane2low.fun(x.low, y.up), plane2low.fun(x.low, y.low), plane3low.fun(x.up, y.up),
plane3low.fun(x.up, y.low), plane3low.fun(x.low, y.up), plane3low.fun(x.low, y.low),
plane4low.fun(x.up, y.up), plane4low.fun(x.up, y.low), plane4low.fun(x.low, y.up),
plane4low.fun(x.low, y.low), plane5low.fun(x.up, y.up), plane5low.fun(x.up, y.low),
plane5low.fun(x.low, y.up), plane5low.fun(x.low, y.low), plane6low.fun(x.up, y.up),
plane6low.fun(x.up, y.low), plane6low.fun(x.low, y.up), plane6low.fun(x.low, y.low),
plane7low.fun(x.up, y.up), plane7low.fun(x.up, y.low), plane7low.fun(x.low, y.up),
plane7low.fun(x.low, y.low))
a.y.low<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==1] # The lowest of ind. pt., we set pt. rank = 1 #
a.y.mid<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==2] # The middle of ind. pt., we set pt. rank = 2 #
a.y.high<- a[,rank(c(a1[2], a2[2], a3[2]))==3] # The highest of ind. pt., we set pt. rank = 3 #
test.a<- rank(c(a.y.low[1], a.y.mid[1], a.y.high[1]))
m12<- (a.y.mid[2]-a.y.low[2])/(a.y.mid[1]-a.y.low[1]); intercept12<- a.y.mid[2] - m12*a.y.mid[1]
m23<- (a.y.high[2]-a.y.mid[2])/(a.y.high[1]-a.y.mid[1]); intercept23<- a.y.high[2]-m23*a.y.high[1]
m13<- (a.y.high[2]-a.y.low[2])/(a.y.high[1]-a.y.low[1]); intercept13<- a.y.high[2]-m13*a.y.high[1]
xx1<- seq(x.low,x.up,length=as.numeric(tclvalue(res)))
xx2<- seq(y.low,y.up,length=as.numeric(tclvalue(res)))
f.low<- function(x1, x2) { out<- matrix(nrow=length(x1), ncol=length(x2))
m<- (a.y.high[2]-a.y.low[2])/(a.y.high[1]-a.y.low[1]); intercept<- a.y.high[2]-m*a.y.high[1]
for(i in 1:length(x1)){
for(j in 1:length(x2)){
# Case 1 low #
if(((test.a[1]==1 && test.a[2]==2 && test.a[3]==3) || (test.a[1]==3 && test.a[2]==2 &&
test.a[3]==1)) && a.y.mid[2] <= m*a.y.mid[1]+intercept) {

```

```

if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[1,1]+coef.low[1,2]*x1[i]+coef.low[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[2,1]+coef.low[2,2]*x1[i]+coef.low[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[3,1]+coef.low[3,2]*x1[i]+coef.low[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[4,1]+coef.low[4,2]*x1[i]+coef.low[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[5,1]+coef.low[5,2]*x1[i]+coef.low[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[6,1]+coef.low[6,2]*x1[i]+coef.low[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
  { out[i,j]<- coef.low[7,1]+coef.low[7,2]*x1[i]+coef.low[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}
# Case 2 low #
if(((test.a[1]==1 && test.a[2]==2 && test.a[3]==3) || (test.a[1]==3 && test.a[2]==2 &&
test.a[3]==1)) && a.y.mid[2] >= m*a.y.mid[1]+intercept) {
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[1,1]+coef.low[1,2]*x1[i]+coef.low[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[2,1]+coef.low[2,2]*x1[i]+coef.low[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
  if(x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[3,1]+coef.low[3,2]*x1[i]+coef.low[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&

```

```

x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[4,1]+coef.low[4,2]*x1[i]+coef.low[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[5,1]+coef.low[5,2]*x1[i]+coef.low[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.low[6,1]+coef.low[6,2]*x1[i]+coef.low[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12)
  { out[i,j]<- coef.low[7,1]+coef.low[7,2]*x1[i]+coef.low[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}
# Case 3 low #
if((test.a[1]==1 && test.a[2]==3 && test.a[3]==2)||(test.a[1]==3 && test.a[2]==1 &&
test.a[3]==2)) {
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[1,1]+coef.low[1,2]*x1[i]+coef.low[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[2,1]+coef.low[2,2]*x1[i]+coef.low[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
  if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[3,1]+coef.low[3,2]*x1[i]+coef.low[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[4,1]+coef.low[4,2]*x1[i]+coef.low[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[5,1]+coef.low[5,2]*x1[i]+coef.low[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[6,1]+coef.low[6,2]*x1[i]+coef.low[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
    { out[i,j]<- coef.low[7,1]+coef.low[7,2]*x1[i]+coef.low[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}

```

```

}

# Case 4 low #
if((test.a[1]==2 && test.a[2]==1 && test.a[3]==3)||((test.a[1]==2 && test.a[2]==3 &&
test.a[3]==1)){
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[1,1]+coef.low[1,2]*x1[i]+coef.low[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[2,1]+coef.low[2,2]*x1[i]+coef.low[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
  if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[3,1]+coef.low[3,2]*x1[i]+coef.low[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
  if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[4,1]+coef.low[4,2]*x1[i]+coef.low[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[5,1]+coef.low[5,2]*x1[i]+coef.low[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.low[6,1]+coef.low[6,2]*x1[i]+coef.low[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
    { out[i,j]<- coef.low[7,1]+coef.low[7,2]*x1[i]+coef.low[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
  }
}
}

return(out)
}

yy<- f.low(xx1, xx2);
persp(xx1, xx2, yy, xlim=c(x.low, x.up), ylim=c(y.low, y.up), zlim=c(z.low-10, z.up+10),
theta=as.numeric(tclvalue(teta)), phi=as.numeric(tclvalue(phi)), axes=F); par(new=T)

```

```

f.up<- function(x1, x2) { out<- matrix(nrow=length(x1),ncol=length(x2))

  m<- (a.y.high[2]-a.y.low[2])/(a.y.high[1]-a.y.low[1]); intercept<- a.y.high[2]-m*a.y.high[1]

  for(i in 1:length(x1)){
    for(j in 1:length(x2)){

      # Case 1 up #
      if(((test.a[1]==1 && test.a[2]==2 && test.a[3]==3)|(test.a[1]==3 && test.a[2]==2 &&
        test.a[3]==1)) && a.y.mid[2] <= m*a.y.mid[1]+intercept){
        if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
          x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[1,1]+coef.up[1,2]*x1[i]+coef.up[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
        if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
          x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[2,1]+coef.up[2,2]*x1[i]+coef.up[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
        if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[3,1]+coef.up[3,2]*x1[i]+coef.up[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
        if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
          x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[4,1]+coef.up[4,2]*x1[i]+coef.up[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
        if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[5,1]+coef.up[5,2]*x1[i]+coef.up[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
        if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
          x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
          { out[i,j]<- coef.up[6,1]+coef.up[6,2]*x1[i]+coef.up[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
        if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
          { out[i,j]<- coef.up[7,1]+coef.up[7,2]*x1[i]+coef.up[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
      }
    }

    # Case 2 up #
    if(((test.a[1]==1 && test.a[2]==2 && test.a[3]==3)|(test.a[1]==3 && test.a[2]==2 &&
      test.a[3]==1)) && a.y.mid[2] >= m*a.y.mid[1]+intercept){

      if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&

```



```

x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[1,1]+coef.up[1,2]*x1[i]+coef.up[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[2,1]+coef.up[2,2]*x1[i]+coef.up[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
if(x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[3,1]+coef.up[3,2]*x1[i]+coef.up[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[4,1]+coef.up[4,2]*x1[i]+coef.up[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[5,1]+coef.up[5,2]*x1[i]+coef.up[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
  { out[i,j]<- coef.up[6,1]+coef.up[6,2]*x1[i]+coef.up[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12)
  { out[i,j]<- coef.up[7,1]+coef.up[7,2]*x1[i]+coef.up[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}
# Case 3 up #
if((test.a[1]==1 && test.a[2]==3 && test.a[3]==2)||test.a[1]==3 && test.a[2]==1 &&
test.a[3]==2)){
  if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.up[1,1]+coef.up[1,2]*x1[i]+coef.up[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.up[2,1]+coef.up[2,2]*x1[i]+coef.up[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
    { out[i,j]<- coef.up[3,1]+coef.up[3,2]*x1[i]+coef.up[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)

```

```

      {out[i,j]<- coef.up[4,1]+coef.up[4,2]*x1[i]+coef.up[4,3]*x2[j]} # plane 4 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[5,1]+coef.up[5,2]*x1[i]+coef.up[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[6,1]+coef.up[6,2]*x1[i]+coef.up[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
      { out[i,j]<- coef.up[7,1]+coef.up[7,2]*x1[i]+coef.up[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}
# Case 4 up #
if((test.a[1]==2 && test.a[2]==1 && test.a[3]==3)|(test.a[1]==2 && test.a[2]==3 &&
test.a[3]==1)){
      if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[1,1]+coef.up[1,2]*x1[i]+coef.up[1,3]*x2[j] } # plane 1 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[2,1]+coef.up[2,2]*x1[i]+coef.up[2,3]*x2[j] } # plane 2 #
if(x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[3,1]+coef.up[3,2]*x1[i]+coef.up[3,3]*x2[j] } # plane 3 #
if(x2[j]>=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[4,1]+coef.up[4,2]*x1[i]+coef.up[4,3]*x2[j] } # plane 4 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[5,1]+coef.up[5,2]*x1[i]+coef.up[5,3]*x2[j] } # plane 5 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]>=m12*x1[i]+intercept12 &&
x2[j]<=m23*x1[i]+intercept23)
      { out[i,j]<- coef.up[6,1]+coef.up[6,2]*x1[i]+coef.up[6,3]*x2[j] } # plane 6 #
if(x2[j]<=m13*x1[i]+intercept13 && x2[j]<=m12*x1[i]+intercept12)
      { out[i,j]<- coef.up[7,1]+coef.up[7,2]*x1[i]+coef.up[7,3]*x2[j] } # plane 7 #
}

```

```

    }
  }
  return(out)
}

yy<- f.up(xx1, xx2)

persp(xx1, xx2, yy, xlim=c(x.low, x.up), ylim=c(y.low, y.up), zlim=c(z.low-10, z.up+10),

      theta=as.numeric(tclvalue(teta)), phi=as.numeric(tclvalue(phi)), xlab="X1", ylab="X2", zlab="Y",

      ticktype="detailed")

# If you want to compare with Scheffe bands, you must remove the “#” in the next line #
# dat<- data.frame(y,x1,x2); n<- dim(dat)[1]; k<- dim(dat)[2]-1; fit.model<- lm(y ~ x1 + x2)
# cc<- coef(fit.model); par(new=T)

# g.low<- function(xx1, xx2) { new.x<- data.frame(x1=xx1, x2=xx2)
# PV<- predict(fit.model, new.x, se.fit=T); w<-sqrt((k+1)*qf(0.05, k+1, n-k-1, lower.tail=F))
# out<- PV$fit - w*PV$se.fit; out }; y.lower<- outer(xx1, xx2, g.low)

# Scheffe.low<- persp(xx1, xx2, y.lower, xlim=c(x.low, x.up), ylim=c(y.low, y.up),

#                   zlim=c(z.low-10, z.up+10), theta=as.numeric(tclvalue(teta)),

#                   phi=as.numeric(tclvalue(phi)), axes=F, border="red"); par(new=T)

# g.up<- function(xx1, xx2) { new.x<- data.frame(x1=xx1, x2=xx2)
# PV<- predict(fit.model, new.x, se.fit=T); w<-sqrt((k+1)*qf(0.05, k+1, n-k-1, lower.tail=F))
# out<- PV$fit + w*PV$se.fit; out }; y.upper<- outer(xx1, xx2, g.up)

# Scheffe.up<- persp(xx1, xx2, y.upper, xlim=c(x.low, x.up), ylim=c(y.low, y.up),

#                   zlim=c(z.low-10, z.up+10), theta=as.numeric(tclvalue(teta)),

#                   phi=as.numeric(tclvalue(phi)), axes=F, border="red")
}

persp.plot<- function(...) {
  if(!is.na(as.numeric(tclvalue(Alpha)))) { alpha<<- as.numeric(tclvalue(Alpha))

    if(alpha > 0 && alpha < 1){ sub.base<- tktoplevel( ); tkwm.title(sub.base, "Control persp.")

    mainfrm<- tkframe(sub.base)

    main.text <- tkfont.create(family="times", size=12, weight="bold")

    blank1<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(blank1, text=""))
  }
}

```

```

blank2<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(blank2, text=""))
blank3<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(blank3, text=""))
res<<- tclVar("30"); teta<<- tclVar("0"); phi<<- tclVar("0")
default<- function( ) { tclvalue(res)<- "30"; tclvalue(teta)<- "0"; tclvalue(phi)<- "0"
                        conf.persp( ) }
windows( ); par(mfrow=c(1,1))
m1<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(m1, text="Resolution", font=main.text))
tkpack(tkscale(m1, command=conf.persp, from=10, to=250, showvalue=TRUE,
              variable=res, resolution=1, orient='horiz'))
tkpack(m1, side='top'); tkpack(blank1, side="top")
m2<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(m2, text="Left - Right", font=main.text))
tkpack(tkscale(m2, command=conf.persp, from=-180, to=180, showvalue=TRUE,
              variable=teta, resolution=1, orient='horiz'))
tkpack(m2, side='top'); tkpack(blank2, side="top")
m3<- tkframe(mainfrm); tkpack(tklabel(m3, text="Up - Down", font=main.text))
tkpack(tkscale(m3, command=conf.persp, from=-180, to=180, showvalue=TRUE,
              variable=phi, resolution=1, orient='horiz'))
tkpack(m3, side='top'); tkpack(blank3, side="top")
m4<- tkframe(mainfrm); tkpack(tkbutton(m4, text="Default", command=default, side="top")
tkpack(m4,side='top'); tkpack(mainfrm)
}
else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
                  message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
}
else tkmessageBox(title="Warning: Range is not impossible",
                  message="alpha must be in the range (0,1)", icon="warning", type="ok")
}
tkscript<- function( ) { wfile<- ""; tt<- tkoplevel( ); txt<- tktext(tt, height=10); tkpack(txt)
save<- function( ) { file<- tclvalue(tkgetSaveFile(initialfile=tclvalue(tclfile.tail(wfile)),
                                                  initialdir=tclvalue(tclfile.dir(wfile))))
if(!length(file)) return( )

```

```

    chn<- tclopen(file,"w"); tclputs(chn, tclvalue(tkget(txt,"0.0","end"))); tclclose(chn); wfile<<- file }
load<- function( ){ file<- tclvalue(tkgetOpenFile( ))
    if(!length(file)) return( )
    chn<- tclopen(file, "r"); tkinsert(txt,"0.0", tclvalue(tclread(chn))); tclclose(chn); wfile<<- file }
run<- function( ){ code<- tclvalue(tkget(txt,"0.0","end")); e<- try(parse(text=code))
    if(inherits(e,"try-error")){ tkmessageBox(message="Syntax error", icon="error"); return( ) }
    eval(e)
    if(length(x1)==length(x2) && length(x1)==length(y) && length(x2)==length(y)){
        cat("Your data was executed ...\n"); replot( ) }
    else tkmessageBox(title="Error", message="Length of variable is not equal",
        icon="warning", type="ok" ) }
topMenu<- tkmenu(tt); tkconfigure(tt, menu=topMenu); fileMenu <- tkmenu(topMenu, tearoff=F)
tkadd(fileMenu, "command", label="Load", command=load)
tkadd(fileMenu, "command", label="Save", command=save)
tkadd(topMenu, "cascade", label="File", menu=fileMenu)
tkadd(topMenu, "command", label="Run", command=run)
}
reset<- function( ) { tclvalue(size)<- "50"; tclvalue(Alpha)<- "0.05"; tclvalue(Theta)<- "0"
    tclvalue(mean.x1)<- "0"; tclvalue(sd.x1)<- "1"; tclvalue(mean.x2)<- "0"; tclvalue(sd.x2)<- "1"
    tclvalue(Beta0)<- "0.5"; tclvalue(Beta1)<- "0.5"; tclvalue(Beta2)<- "0.5"; tclvalue(Sigma)<- "1"
    replot( )
}
base<- tkoplevel( ); tkwm.title(base,"Control Panel"); main.frame<- tkframe(base)
sub.frame1<- tkframe(base); sub.frame2<- tkframe(base)
mainfrm.left<- tkframe(main.frame); mainfrm.right<- tkframe(main.frame)
blank.left1<- tkframe(mainfrm.left); tkpack(tklabel(blank.left1, text=""))
blank.left2<- tkframe(mainfrm.left); tkpack(tklabel(blank.left2, text=""))
blank.right1<- tkframe(mainfrm.right); tkpack(tklabel(blank.right1, text=""))
blank.right2<- tkframe(mainfrm.right); tkpack(tklabel(blank.right2, text=""))
blank.right3<- tkframe(mainfrm.right); tkpack(tklabel(blank.right3, text=""))
blank.center<- tkframe(sub.frame1); tkpack(tklabel(blank.center, text=""))

```

```

main.text<- tkfont.create(family="times", size=12, weight="bold")
sub.text<- tkfont.create(family="times", size=10)
frame1<- tkframe(mainfrm.left); tkpack(tklabel(frame1, text="Sig.level", font=main.text))
  tkpack(tklabel(frame1, text="alpha = ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame1, width="5", textvariable=Alpha), side="top")
  tkpack(frame1, side="top", pady=5); tkpack(blank.left1, side="top")
frame2<- tkframe(mainfrm.left); tkpack(tklabel(frame2, text="Sample size", font=main.text))
  for(i in c(30,50,100,200)){tmp<- tkradiobutton(frame2, command=regen, text=i, value=i, variable=size)
    tkpack(tmp,side="left",padx=4)}
  tkpack(frame2, side="top",pady=5); tkpack(blank.left2, side="top")
frame3<- tkframe(mainfrm.left); tkpack(tklabel(frame3, text="Simulation", font=main.text))
  tkpack(tklabel(frame3, text="X1 (Mean, SD) : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame3, width=5, textvariable=mean.x1), side="left")
  tkpack(tkentry(frame3, width=5, textvariable=sd.x1), side="left"); tkpack(frame3, side="top", pady=2)
frame4<- tkframe(mainfrm.left)
  tkpack(tklabel(frame4, text="X2 (Mean, SD) : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame4, width=5, textvariable=mean.x2), side="left")
  tkpack(tkentry(frame4, width=5, textvariable=sd.x2),side="left"); tkpack(frame4, side="top", pady=2)
frame5<- tkframe(mainfrm.left); frame5.left<- tkframe(frame5); frame5.right<- tkframe(frame5)
frame5.1<- tkframe(frame5.left); tkpack(tklabel(frame5.1, text="Beta0 : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame5.1, width=5, textvariable=Beta0), side="left")
  tkpack(frame5.1, side="top", pady=2)
frame5.2<- tkframe(frame5.left); tkpack(tklabel(frame5.2, text="Beta1 : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame5.2, width=5, textvariable=Beta1), side="left")
  tkpack(frame5.2, side="top", pady=2)
frame5.3<- tkframe(frame5.left); tkpack(tklabel(frame5.3, text="Beta2 : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame5.3, width=5, textvariable=Beta2), side="left")
  tkpack(frame5.3, side="top", pady=2)
frame5.4<- tkframe(frame5.right); tkpack(tklabel(frame5.4, text=" Sigma : ", font=sub.text), side="left")
  tkpack(tkentry(frame5.4, width=5, textvariable=Sigma), side="left")
  tkpack(frame5.4, side="top", pady=2); tkpack(frame5.left, frame5.right, side="left")

```

```

tkpack(frame5, side="top", pady=2)

tkpack(tkbutton(mainfrm.left, text="Regenerate", command=regen), side="top", pady=5)

frame6<- tkframe(mainfrm.right); tkpack(tklabel(frame6, text="Your data",font=main.text), side="top")

tkpack(tklabel(frame6, text="If you have the data,\n you can click input.", font=sub.text), side="top")

tkpack(frame6, side="top", pady=10)

tkpack(tkbutton(mainfrm.right, text="Input", command=tkscript), side="top")

tkpack(blank.right1, side="top")

frame7<- tkframe(mainfrm.right)

tkpack(tklabel(frame7, text="Optimal theta", font=main.text), side="top")

tkpack(frame7, side="top", pady=10)

tkpack(tkbutton(mainfrm.right, text="Calculate", command=press.cal), side="top")

tkpack(blank.right2, side="top")

frame8<- tkframe(mainfrm.right); tkpack(tklabel(frame8, text="theta", font=main.text))

tkpack(tkyscale(frame8, command=replot, from=0, to=119, showvalue=TRUE,
                variable=Theta, resolution=1, orient="horiz"))

tkpack(frame8, side="top", pady=10); tkpack(blank.right3, side="top")

tkpack(mainfrm.left, mainfrm.right, side="left")

frame9<- tkframe(sub.frame1)

tkpack(tklabel(frame9, text="Confidence bands", font=main.text), side="top")

tkpack(frame9, side="top", pady=10)

tkpack(tkbutton(sub.frame1, text="Plot",command=persp.plot), side="top")

tkpack(blank.center, side="top")

frame10<- tkframe(sub.frame2)

tkpack(tkbutton(frame10, text="Show details", command=detail), side="left")

tkpack(tklabel(frame10, text="    "), side="left")

tkpack(tkbutton(frame10, text="Reset", command=reset), side="left")

tkpack(frame10, side="top", padx=10, pady=5)

tkpack(main.frame); tkpack(sub.frame1); tkpack(sub.frame2)

})

```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธีรุตม์ สุขสกุลวัฒน์ เกิดวันอังคารที่ 12 สิงหาคม พ.ศ. 2529 สำเร็จการศึกษา
หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ. เกียรตินิยมอันดับสอง) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชา
คณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2551 และเข้าศึกษาต่อใน
หลักสูตรสถิติศาสตรมหาบัณฑิต (สศ.ม.) สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการ
บัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2552