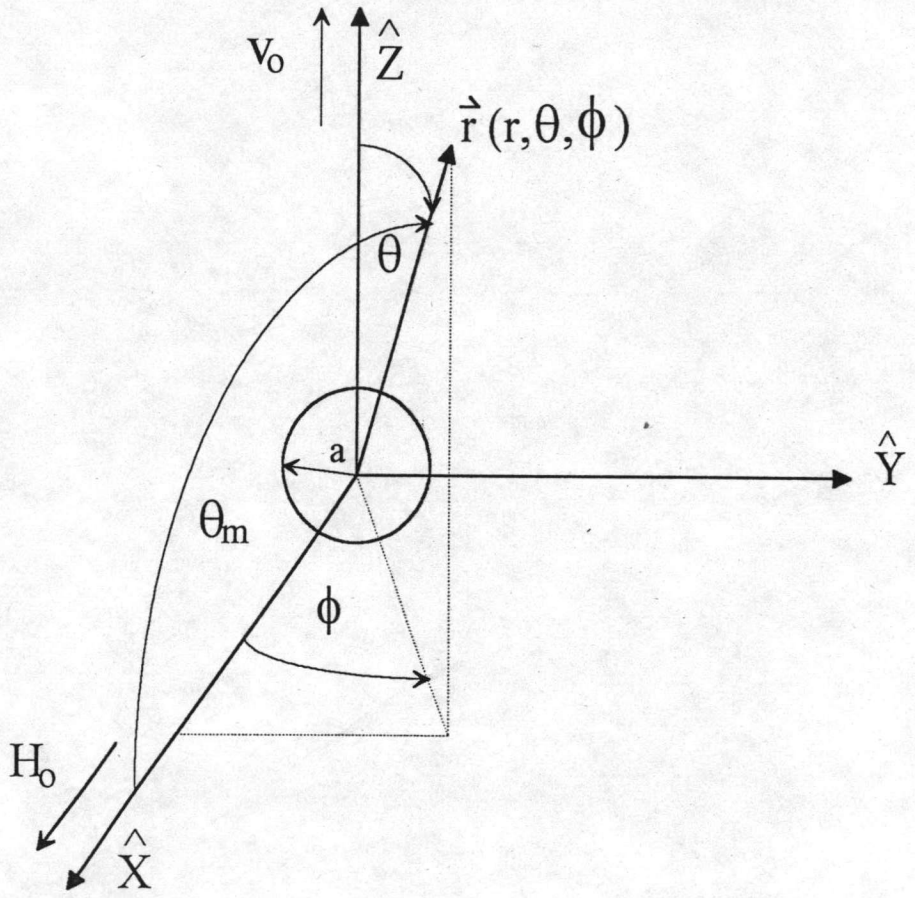
บทที่ 3

ทฤษฎีการจับอนุภาคแม่เหล็กแบบสามมิติในการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง

ในบทนี้ จะแสดงวิธีการหาสมการคำนวณเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กที่เป็นแบบสามมิติในการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง โดยจะพิจารณาถึงแรงต่างๆที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็กที่เข้ามากับของไหล และสร้างสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาค จากนั้นจะกล่าวถึงวิธีการหารัศมีการจับอนุภาค(capture radius, r_c) ตลอดจนวิธีการคำนวณหาพื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็ก (capture area, A_c) ซึ่งเป็นข้อมูลสำคัญสำหรับคำนวณหาประสิทธิภาพของการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวางต่อไป

3.1 แรงที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก

พิจารณาตัวกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง ซึ่งประกอบด้วยตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก (collector) ที่มีลักษณะเป็นทรงกลมกระจายกันอย่างสุ่มภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\vec{H}_o$) เมื่ออนุภาคแม่เหล็กทั้งแบบพาราแมกเนติกและไดอะแมกเนติกในระบบของไหลที่ไหลแบบแลมินาร์ เคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง อนุภาคแม่เหล็กเหล่านี้จะถูกกระทำด้วยแรงต่างๆ ซึ่งได้แก่ แรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational force) แรงเฉื่อย (inertial force) แรงทางไฟฟ้า (electric force) แรงแม่เหล็ก (magnetic force) และแรงหนืด (viscous drag force) เนื่องจากอนุภาคแม่เหล็กเหล่านี้มีขนาดเล็กมาก (เส้นผ่านศูนย์กลางน้อยกว่า 200 ไมครอน) จึงละเลยผลของแรงอันเนื่องมาจากแรงดึงดูดของโลกและแรงเฉื่อยได้ ส่วนแรงทางไฟฟ้านั้น ถือว่าเป็นแรงช่วงสั้นมากๆ มีผลต่อการจับอนุภาคแม่เหล็กขณะที่เคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองน้อยมากถือว่าไม่มีแรงนี้ ดังนั้น จึงเหลือแรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กขณะที่เคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองค่อนข้างเด่นชัด เพียง 2 แรง เท่านั้น คือ แรงแม่เหล็ก และแรงหนืด ซึ่งจะแยกพิจารณาแรงแต่ละชนิด ดังนี้



รูปที่ 3.1 แสดงตำแหน่งของอนุภาคแม่เหล็กขณะใดๆ ($\vec{r}$) ในระบบตัวกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง ($\vec{v_o} \perp \vec{H}_o$)

ก. <u>แรงแม่เหล็ก</u> ($\overrightarrow{F_m}$)

แรงแม่เหล็กที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก เกิดจากสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นจากกลุ่มตัวจับทรงกลมในตัวกรอง (สนามแม่เหล็ก $\overrightarrow{H}$ ในสมการที่ (2.41)) ซึ่งมีค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กสูง (high permeability) ขณะถูกเหนี่ยวนำด้วยสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\overrightarrow{H}_o$) พิจารณาอนุภาคแม่เหล็กที่มีขนาดเล็กมากซึ่งมีค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กจำเพาะ (specific magnetic susceptibility) เท่ากับ χ_p แทรกอยู่ในระบบของไหลที่มีค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กเท่ากับ χ_f ภายใต้ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\overrightarrow{H}$ จากกลุ่มตัวจับทรงกลม และกำหนดให้ $\overrightarrow{v_o}$ เป็นความเร็วเริ่มต้นของอนุภาคแม่เหล็กขณะเริ่มเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง (entrance velocity) ในงานวิจัยนี้ ศึกษากรณี $\overrightarrow{v_o}$ ตั้งฉากกับทิศของสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\overrightarrow{v_o} \perp \overrightarrow{H}_o$) ซึ่งเป็นเงื่อนไขของการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง ดังแสดงในรูปที่ 3.1

จากรูปที่ 3.1 กำหนดให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{v_o}$ (ซึ่งอยู่ในทิศเดียวกันกับแกน +Z) กับตำแหน่งของอนุภาคขณะใดๆ ($\overrightarrow{r}$), θ_m เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{H}_o$ ซึ่งอยู่ในทิศเดียวกับแกน +X กับ $\overrightarrow{r}$ และ ϕ เป็นมุมระหว่างเงาของ $\overrightarrow{r}$ บนระนาบ XY กับแกน +X ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างมุม θ กับมุม θ_m เป็น

$$\cos\theta_m = \sin\theta\cos\phi \qquad (3.1)$$

จากสมการที่ (2.41) เราสามารถเขียนสมการความเข้มสนามแม่เหล็ก $\overrightarrow{H}$ ในรูปพิกัดเชิงขั้วทรงกลม (spherical polar coordinate)ใหม่ เป็น

$$\overrightarrow{H}(r,\theta,\phi) = AH_o\left[\left(1+\frac{2K_s a^3}{r^3}\right)\cos\theta_m\ \hat{r} - \left(1-\frac{K_s a^3}{r^3}\right)\sin\theta_m\ \hat{\theta}_m\right]$$

$$1 < \frac{r}{a} < \frac{1}{\gamma} \qquad (3.2)$$

โดยที่ $$A = \frac{1}{1 - \gamma^3 K_s} \qquad (3.3)$$

เมื่อ $K_s = \frac{\nu - 1}{\nu + 2}$ ซึ่งจะเรียกว่าค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (magnetic constant) และ $\hat{\theta}_m$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของมุม θ_m เมื่อแทนสมการที่ (3.1) ลงในสมการที่ (3.2) แล้วจัดรูปสมการที่ (3.2) ใหม่ จะได้

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) = AH_o\left[\left(1 + \frac{2K_s a^3}{r^3}\right)\sin\theta\cos\phi\,\hat{r} - \left(1 - \frac{K_s a^3}{r^3}\right)\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi}\;\hat{\theta}_m\right],$$

$$1 < \frac{r}{a} < \frac{1}{\gamma} \qquad (3.4)$$

และ แรงแม่เหล็กที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็กขณะใดๆ (ภาคผนวก ก) มีสมการเป็น

$$\vec{F_m} = \left(\frac{2\pi}{3}\right) r_p^3 \mu_o \left(\chi_p - \chi_f\right) \vec{\nabla}\left(\vec{H} \cdot \vec{H}\right) \qquad (3.5)$$

เมื่อ r_p คือ รัศมีของอนุภาคแม่เหล็ก μ_o เป็น ค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7}$ เฮนรีต่อเมตร χ_p คือ ค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กของอนุภาคในระบบของไหล และ χ_f คือ ค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กของระบบของไหล ในที่นี้อนุภาคแม่เหล็กแบบพาราแมกเนติก หมายถึงกรณีที่ $\chi_p > \chi_f$ และอนุภาคแม่เหล็กแบบไดอะแมกเนติก หมายถึงกรณีที่ $\chi_p < \chi_f$ ค่า $(\chi_p - \chi_f)$ ซึ่งเป็นบวก (อนุภาคพาราแมกเนติก) และเป็นลบ (อนุภาคไดอะแมกเนติก) เป็นพารามิเตอร์สำคัญอันหนึ่งที่ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กแตกต่างกันออกไป

เมื่อพิจารณาผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง $\vec{H}$ กับ $\vec{H}$ จะได้

$$\vec{H} \cdot \vec{H} = H^2 = A^2 H_o^2\left[\left(1 + \frac{2K_s a^3}{r^3}\right)^2 \sin^2\theta\cos^2\phi + \left(1 - \frac{K_s a^3}{r^3}\right)^2\left(1 - \sin^2\theta\cos^2\phi\right)\right]$$

$$= A^2 H_o^2\left[\left(\frac{6K_s a^3}{r^3} + \frac{3K_s^2 a}{}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi + \left(1 - \frac{K_s a^3}{r^3}\right)^2\right] \qquad (3.6)$$

และเกรเดียนท์ ($\vec{\nabla}$) ในพิกัดเชิงขั้วทรงกลม เขียนเป็น

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (3.7)$$

ดังนั้น

$$\vec{\nabla}\left(\vec{H}\cdot\vec{H}\right) = \hat{r}\frac{\partial H^2}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial H^2}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H^2}{\partial \phi} \qquad (3.8)$$

จากสมการที่ (3.5) เมื่อแยกพิจารณาแต่ละส่วนประกอบย่อยของแรงแม่เหล็กในทิศเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, และ $\hat{\phi}$ ในพิกัดเชิงขั้วทรงกลม จะพบว่า

$$\overrightarrow{F_m} = F_{mr}\hat{r} + F_{m\theta}\hat{\theta} + F_{m\phi}\hat{\phi} \qquad (3.9)$$

เมื่อ F_{mr} , $F_{m\theta}$ และ $F_{m\phi}$ เป็นส่วนประกอบของแรงแม่เหล็กในแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, และ $\hat{\phi}$ ตามลำดับ

เมื่อแทนสมการที่ (3.8) และ (3.9) ลงในสมการที่ (3.5) พิจารณาแต่ละส่วนประกอบย่อยของแรงแม่เหล็ก จะพบว่า

$$F_{mr} = \frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi\left(\frac{\partial H^2}{\partial r}\right), \qquad (3.10)$$

$$F_{m\theta} = \frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H^2}{\partial \theta}\right), \qquad (3.11)$$

และ

$$F_{m\phi} = \frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H^2}{\partial \phi}\right) \qquad (3.12)$$

เมื่อ $\chi = \chi_p - \chi_f$

พิจารณาเทอม $\left(\frac{\partial H^2}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H^2}{\partial \theta}\right)$ และ $\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H^2}{\partial \phi}\right)$ จะพบว่า

$$\frac{\partial H^2}{\partial r} = A^2H_o^2\left[-18\left(\frac{K_s a^3}{r^4}+\frac{K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi + 6\left(\frac{K_s a^3}{r^4}-\frac{K_s^2 a^6}{r^7}\right)\right], \qquad (3.13)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H^2}{\partial \theta} = A^2H_o^2\left(\frac{6K_s a^3}{r^4}+\frac{3K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin 2\theta\cos^2\phi, \qquad (3.14)$$

และ $$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H^2}{\partial \phi} = -A^2H_o^2\left(\frac{6K_s a^3}{r^4}+\frac{3K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin\theta\sin\phi \qquad (3.15)$$

แทนสมการที่ (3.13), (3.14) และ (3.15) ลงในสมการที่ (3.10), (3.11) และ (3.12) จะพบว่า ส่วนประกอบย่อยของแรงแม่เหล็กในทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{\phi}$ มีค่าเป็น

$$F_{mr} = \frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi A^2H_o^2\left[-18\left(\frac{K_s a^3}{r^4}+\frac{K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi + 6\left(\frac{K_s a^3}{r^4}-\frac{K_s^2 a^6}{r^7}\right)\right], \qquad (3.16)$$

$$F_{m\theta} = \frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi A^2H_o^2\left(\frac{6K_s a^3}{r^4}+\frac{3K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin 2\theta\cos^2\phi, \qquad (3.17)$$

และ $$F_{m\phi} = -\frac{2\pi}{3}r_p^3\mu_o\chi A^2H_o^2\left(\frac{6K_s a^3}{r^4}+\frac{3K_s^2 a^6}{r^7}\right)\sin\theta\sin 2\phi \qquad (3.18)$$

เมื่อได้สมการที่ (3.16), (3.17) และ (3.18) แล้วนำกลับไปแทนลงในสมการที่ (3.9) จะได้สมการของแรงแม่เหล็กในรูปพิกัดเชิงขั้วทรงกลมซึ่งจะนำไปใช้สำหรับหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 3.2 ต่อไป

ข. <u>แรงหนืด</u> ($\overrightarrow{F_d}$)

แรงหนืดที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก เกิดจากความหนืดของของไหล (η) ที่ไหลแบบแลมินาร์ผ่านกลุ่มตัวจับทรงกลมในตัวกรองชนิดแม่เหล็ก ให้แรงหนืดที่กระทำต่ออนุภาคที่เคลื่อนที่ในตัวกลางของไหล สอดคล้องกับกฎของสโตกส์ (Stoke 's law) กล่าวคือ

$$\vec{F_d} = -6\pi\eta r_p\left(\vec{v} - \vec{v_f}\right) \qquad (3.19)$$

เมื่อ r_p เป็นรัศมีของอนุภาคแม่เหล็ก และ $\vec{v}$ เป็นความเร็วของอนุภาคในของไหลขณะเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง ซึ่งเขียนในรูปพิกัดเชิงขั้วทรงกลมเป็น

$$\vec{v}(r,\theta,\phi) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \qquad (3.20)$$

และ $\vec{v_f}$ เป็นความเร็วของตัวกลางของไหล ซึ่งสำหรับการไหลแบบแลมินาร์ สมการความเร็วของของไหลที่ไหลผ่านกลุ่มทรงกลมที่กระจายอย่างสุ่มตามแบบจำลองของฮัปเปิล(Happel 's model) สำหรับความเร็วเริ่มต้นที่เข้ามา(entrance velocity , $\vec{v_o}$) เท่ากับ $-v_o\hat{z}$ (C. Moyer และคณะ , 1984) เขียนได้เป็น

$$\vec{v_f} = A_s v_o\left[P(r_a,\gamma)\cos\theta\,\hat{r} - Q(r_a,\gamma)\sin\theta\,\hat{\theta}\right],$$

$$1 < r_a < \frac{1}{\gamma} \qquad (3.21)$$

เมื่อ P และ Q เป็นฟังก์ชันของ r_a และ γ ซึ่งมีค่าเป็น

$$P(r_a,\gamma) = \frac{1}{2r_a^3} - \left(3+2\gamma^5\right)\frac{1}{2r_a} + 1 + \frac{3}{2}\gamma^5 - \frac{\gamma^5}{2}r_a^2, \qquad (3.22)$$

$$Q(r_a,\gamma) = -\frac{1}{4r_a^3} - \left(3+2\gamma^5\right)\frac{1}{4r_a} + 1 + \frac{3}{2}\gamma^5 - \gamma^5 r_a^2, \qquad (3.23)$$

และ $$A_s = 2/\left(2-3\gamma+3\gamma^5-2\gamma^6\right) \qquad (3.24)$$

และในทำนองเดียวกับแรงแม่เหล็ก แรงหนืดสามารถที่จะแยกเป็นส่วนประกอบย่อยของแรงหนืดในทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{\phi}$ เป็น

$$\overrightarrow{F_d} = F_{dr}\,\hat{r} + F_{d\theta}\,\hat{\theta} + F_{d\phi}\,\hat{\phi} \qquad (3.25)$$

เมื่อ F_{dr} , $F_{d\theta}$ และ $F_{d\phi}$ เป็นส่วนประกอบย่อยของแรงหนืดในทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{\phi}$ ตามลำดับ เมื่อแทนสมการที่ (3.20) , (3.21) และ (3.25) ลงในสมการที่ (3.19) จะพบว่า

$$F_{dr} = -6\pi\eta r_p\left[\frac{dr}{dt} - A_s v_o P(r_a,\gamma)\cos\theta\right], \qquad (3.26)$$

$$F_{d\theta} = -6\pi\eta r_p\left[r\frac{d\theta}{dt} + A_s v_o Q(r_a,\gamma)\sin\theta\right], \qquad (3.27)$$

และ

$$F_{d\phi} = -6\pi\eta r_p r\sin\theta\frac{d\phi}{dt} \qquad (2.28)$$

ในทำนองเดียวกันกับแรงแม่เหล็ก เมื่อได้สมการที่ (3.26), (3.27) และ (3.28)นำกลับไปแทนลงในสมการที่ (3.25) จะได้สมการของแรงหนืดในรูปพิกัดเชิงขั้วทรงกลม ซึ่งจะนำไปใช้สำหรับหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กขณะเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง ร่วมกับแรงแม่เหล็กในหัวข้อต่อไป

3.2 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็ก

สำหรับอนุภาคแม่เหล็กซึ่งมีขนาดเล็กมาก แรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็กเนื่องจากแรงแม่เหล็กและแรงหนืด เขียนได้เป็น

$$\overrightarrow{F_m} + \overrightarrow{F_d} = 0 \qquad (3.29)$$

แทนสมการที่ (3.9) และ (3.25) ลงในสมการที่ (3.29) และแยกพิจารณาแต่ละส่วนประกอบย่อยของแรงที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก จะพบว่า

$$F_{mr} + F_{dr} = 0, \qquad (3.30)$$

$$F_{m\theta} + F_{d\theta} = 0, \qquad (3.31)$$

และ

$$F_{m\phi} + F_{d\phi} = 0 \qquad (3.32)$$

หลังจากแทนสมการที่ (3.16) และ (3.26) ลงในสมการที่ (3.30) , แทนสมการที่ (3.17) และ (3.27) ลงในสมการที่ (3.31) และแทนสมการที่ (3.18) และ (3.28) ลงในสมการที่ (3.32) แล้วจัดรูปสมการใหม่ จะพบว่าสมการที่ (3.30) , (3.31) และ (3.32) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\frac{dr_a}{dt} = v_{oa}A_s P(r_a,\gamma)\cos\theta - A^2 v_{ma} r_a^{-4}\left\{3\left[1+\frac{K_s}{r_a^3}\right]\sin^2\theta\cos^2\phi + \left[\frac{K_s}{r_a^3}-1\right]\right\}, \qquad (3.33)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -v_{oa}A_s r_a^{-1} Q(r_a,\gamma)\sin\theta + A^2 v_{ma} r_a^{-5}\left[1+\frac{K_s}{2r_a^3}\right]\sin 2\theta\cos^2\phi, \qquad (3.34)$$

และ

$$\frac{d\phi}{dt} = -A^2 v_{ma} r_a^{-5}\left[1+\frac{K_s}{2r_a^3}\right]\sin 2\phi \qquad (3.35)$$

เมื่อ $1 < r_a < \frac{1}{\gamma}$, $r_a = \frac{r}{a}$, $v_{oa} = \frac{v_o}{a}$ และ $v_{ma} = \frac{2\chi\mu_o K_s H_o r_p}{3\eta a^2}$

เมื่อ $\varphi_o = 0$ สมการที่ (3.33) - (3.35) จะลดรูปเป็นสมการการเคลื่อนที่แบบสองมิติ ตรงกับกรณีของ C. Moyer และคณะ (1984) และตรงกับกรณีของ F. J. Friedlaender และคณะ (1981) สำหรับตัวจับอนุภาคเดี่ยว ($\gamma^3 \Rightarrow 0$ และ $\varphi_o = 0$) แต่สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในตัวกลางยังผล (กรณีที่ $r_a > \frac{1}{\gamma}$) ซึ่งมีค่าความหนืดคงที่ โดยความเร็วของของไหลไม่ต่างจากความเร็วเริ่มต้น ($\vec{v_o}$) เขียนได้ดังนี้

$$\frac{dr_a}{dt} = v_{oa}\cos\theta, \qquad (3.36)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -v_{oa} r_a^{-1}\sin\theta, \qquad (3.37)$$

และ $$\frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad (3.38)$$

โดยแรงแม่เหล็กในตัวกลางยังผลเป็นศูนย์ เนื่องจากสนามแม่เหล็กคงที่ในบริเวณนี้ตามสมการที่ (2.42)

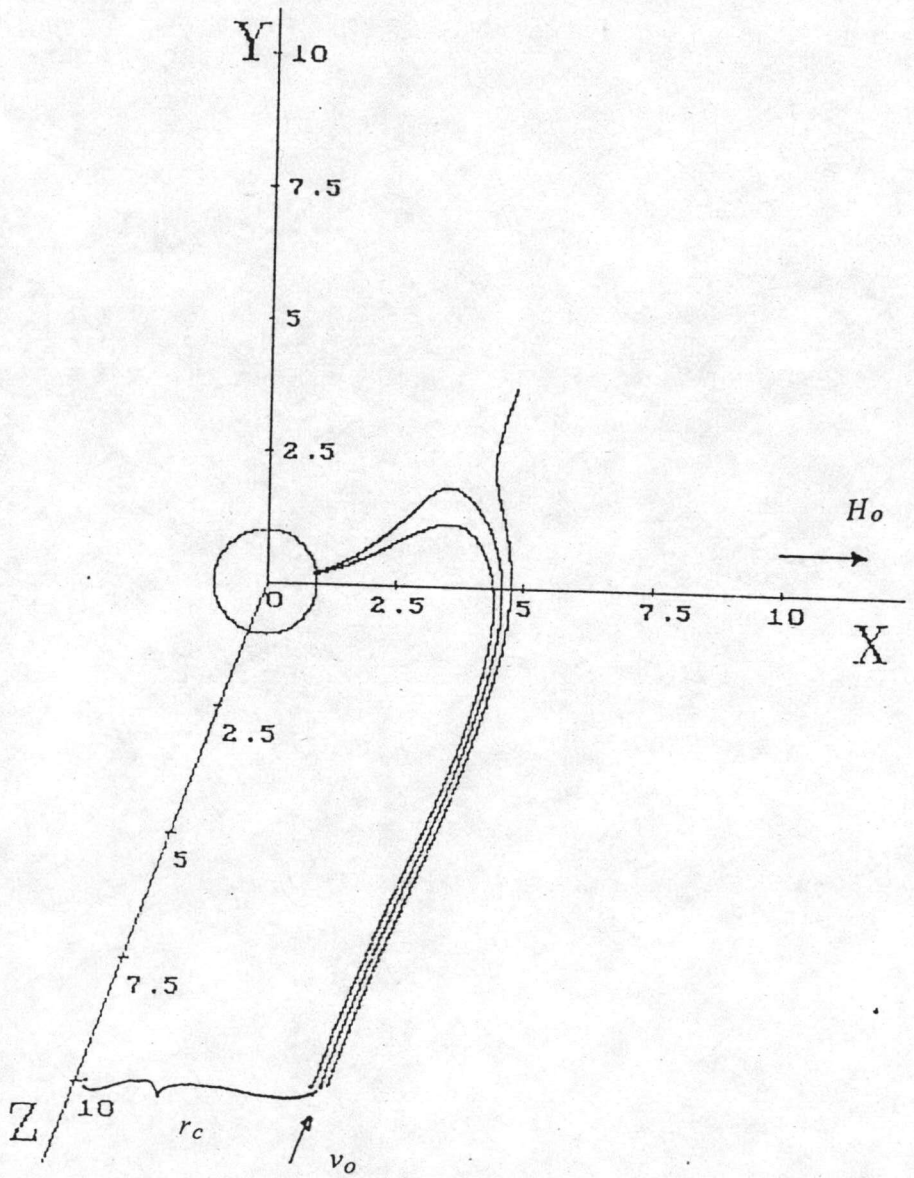
3.3 เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กในขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง

ตำแหน่งของอนุภาคแม่เหล็กขณะใดๆ ($\vec{r}$) สามารถคำนวณหาได้โดยการแก้สมการที (3.33) , (3.34) และ (3.35) สำหรับอนุภาคแม่เหล็กขณะเคลื่อนที่เข้ามาในบริเวณตัวจับ หรือสมการที่ (3.36) , (3.37) และ (3.38) สำหรับอนุภาคแม่เหล็กขณะเคลื่อนที่เข้ามาในบริเวณตัวกลางยังผล โดยจะคำนวณด้วยวิธีรังกัตตาอันดับที่ 4 (the fourth-order Runge-Kutta method) ซึ่งวิธีการคำนวณได้แสดงไว้ในภาคผนวก ค ตำแหน่งของอนุภาคแม่เหล็กขณะใดๆที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาค (γ^3) และสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\vec{H}_o$)

3.4 ประสิทธิภาพการจับอนุภาคแม่เหล็กในการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง

พิจารณารูปที่ 3.2 อนุภาคแม่เหล็กขณะเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเริ่มต้นเท่ากับ v_o เข้ามาทางแกน Z ที่ตำแหน่งนี้อนุภาคจะห่างจากแกน Z เท่ากับ R_o ที่ระยะ Z เท่ากับ Z_o เราจะเรียก R_o นี้ ว่ารัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็ก(capture radius , r_c) ก็ต่อเมื่อ R_o เป็นระยะที่มากที่สุดที่อนุภาคขณะเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองยังคงถูกจับอยู่

สำหรับการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวางนี้ เมื่อเปลี่ยนมุมระหว่างระนาบของความเร็วเริ่มต้นกับระนาบสมมาตรหลัก รัศมีการจับที่ได้จะเปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับชนิดของอนุภาคแม่เหล็ก (พาราแมกเนติกและไดอะแมกเนติก) สัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก (γ^3) และสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\vec{H_o}$) พื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็ก (ระนาบที่ขนานกับระนาบ XY ที่ระยะ Z เท่ากับ Z_o ดังแสดงในรูปที่ 3.2 แทนด้วย A_c) ที่ได้ จะไม่เป็นวงกลม ต่างกับพื้นที่การจับอนุภาคในการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามยาว ซึ่งพื้นที่การจับอนุภาคที่ได้มี



รูปที่ 3.2 แสดงการวัดรัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็ก (r_c) ในระบบตัวกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวาง ($\vec{v_o} \perp \overrightarrow{H_o}$)

ลักษณะเป็นวงกลมสะดวกต่อการคำนวณมากกว่า กล่าวคือ สามารถคำนวณได้จากพื้นที่วงกลม ($A_c = \pi r_c^2$) ได้เลย แต่สำหรับการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามขวางนี้ การคำนวณเพื่อหาพื้นที่การจับจะใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) ซึ่งโปรแกรมการคำนวณได้แสดงไว้ในภาคผนวก ง และจะใช้พื้นที่การจับอนุภาคที่ได้มาคำนวณหาประสิทธิภาพของการกรอง ($\in$) ซึ่งมีสมการคำนวณเป็น (ภาคผนวก ข)

$$\in \quad = \quad 1 - \exp\left(-\frac{3A_c\gamma^3 L}{4\pi a^3}\right) \qquad (3.39)$$

เมื่อ L คือความหนาของระบบตัวกรอง

จากสมการที่ (3.39) ประสิทธิภาพการจับอนุภาคแม่เหล็กที่คำนวณได้นี้ขึ้นอยู่กับสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาค สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ และความหนาของระบบตัวกรอง