

สนามแม่เหล็กจากกลุ่มตัวจับทรงกลมในตัวกรอง

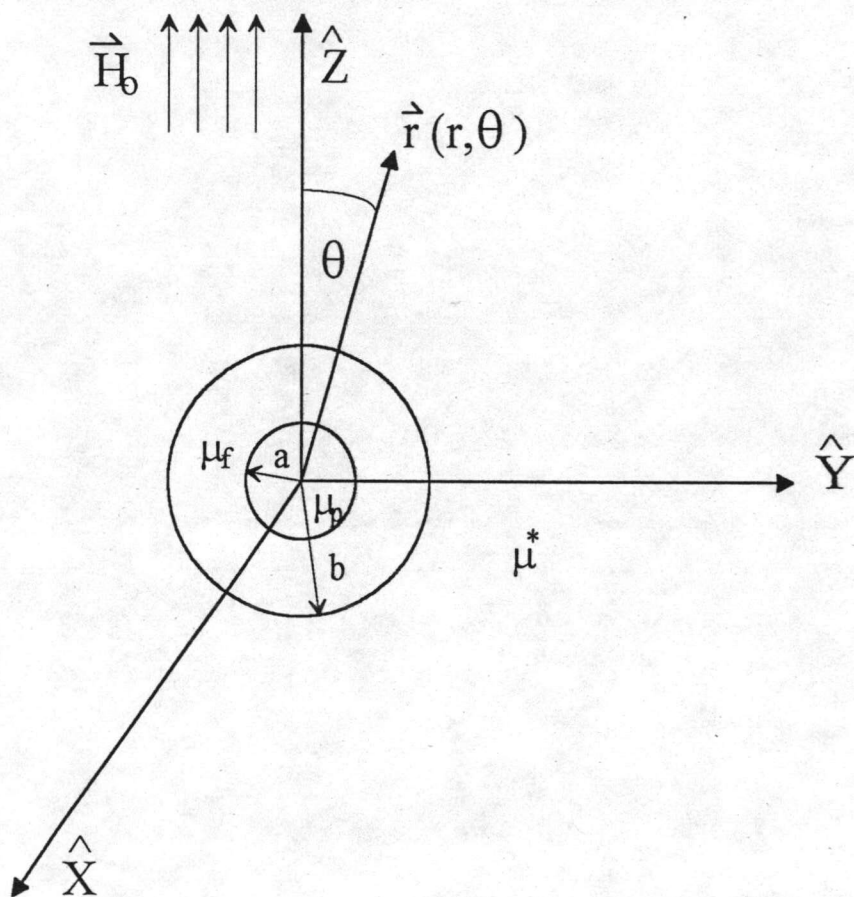
ในงานวิจัยของ F. J. Friedlaender และคณะ (1981) ได้ศึกษาการกรองชนิดแม่เหล็ก โดยพิจารณาให้สนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นรอบตัวจับ (collector) เป็นสนามแม่เหล็กจากทรงกลมเดี่ยวอันหนึ่งเท่านั้น ซึ่งไม่คำนึงถึงผลของสนามแม่เหล็กจากกลุ่มทรงกลมข้างเคียง แต่ในงานวิจัยนี้จะคำนึงถึงผลของสนามแม่เหล็กจากกลุ่มทรงกลมเหล่านี้ โดยสนามแม่เหล็กจากกลุ่มตัวจับทรงกลมนี้คำนวณโดยใช้วิธีตัวกลางยังผล (M. Natenapit, 1993) ซึ่งผลที่ได้อยู่ในรูปของอัตราส่วนของปริมาตรรวมของตัวจับทรงกลมกับปริมาตรของของไหลในระบบตัวกรอง (packing fraction , γ^3) และสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0)

2.1 ทฤษฎีตัวกลางยังผล

ในทฤษฎีตัวกลางยังผลนี้ กำหนดให้ กลุ่มตัวจับทรงกลมและระบบของไหลในตัวกรองแทนด้วยทรงกลมประกอบ (composite sphere) อันหนึ่ง แทรกอยู่ในตัวกลางยังผล (effective medium) ซึ่งเป็นของไหลเนื้อเดียว (homogeneous fluid) ทรงกลมประกอบอันนี้ ประกอบด้วยทรงกลมรัศมี a (รัศมีเฉลี่ยของตัวจับทรงกลม) และเซลล์ของไหล (fluid shell) รัศมี b ล้อมรอบตัวจับเหล่านี้อยู่ ซึ่งทรงกลมประกอบอันนี้ กำหนดจากสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก (packing fraction , γ^3) ซึ่งมีค่า เท่ากับ อัตราส่วนระหว่างปริมาตรจริงของกลุ่มตัวจับทรงกลมในตัวกรองกับปริมาตรจริงของระบบของไหล ดังนั้น จะได้

$$\gamma^3 = \frac{V_p}{V_f} = \frac{a^3}{b^3} \quad (2.1)$$

เมื่อ V_p เป็นปริมาตรรวมของตัวจับในตัวกรอง ซึ่งหาได้โดยการแทนที่ในน้ำ เป็นต้น และ V_f เป็นปริมาตรของไหลในตัวกรอง ซึ่งหาได้โดยวัดปริมาตรโดยตรง



รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะของทรงกลมประกอบ (composite sphere) ในตัวกลางยังผล (effective medium) ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0)

จุดศูนย์กลางของทรงกลมประกอบ ซึ่งกลุ่มตัวจับทรงกลมและเซลล์ของไหลมีค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็ก (magnetic permeability) เป็น μ_p และ μ_f ตามลำดับ และ ตัวกลางยังผล มีค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กยังผล (effective magnetic permeability) เป็น μ^* เมื่อใส่สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0) ให้กับระบบตัวกรอง สนามแม่เหล็กภายนอกจะเหนี่ยวนำตัวจับให้มีแมกนีไทเซชัน (magnetization , \vec{M}) ในทิศเดียวกับ \vec{H}_0 เป็นผลให้มีสนามแม่เหล็กบริเวณรอบตัวจับ (\vec{H}) เป็นสนามไม่สม่ำเสมอ และในที่นี้ ถ้าให้ H_0 มีค่ามาก และรัศมีตัวจับ (a) มีค่าน้อยมาก จะให้สนามแม่เหล็กเกรเดียนท์สูง (high gradient magnetic field)

การคำนวณสนาม \vec{H} หาได้โดยวิธีแก้ปัญหาแบบมีขอบเขตเพื่อหาค่าศักย์แม่เหล็ก (magnetic potential , Φ) เมื่อ Φ สัมพันธ์กับสนามแม่เหล็ก \vec{H} ดังนี้ คือ

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.2)$$

จากรูปที่แสดง ใส่สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0) ให้แก่ระบบตัวกรอง ในทิศเดียวกับแกนขั้วของพิกัดเชิงขั้วทรงกลม (spherical polar coordinate) ที่มีจุดศูนย์กลางของทรงกลมประกอบอยู่ที่จุดกำเนิดของพิกัดนี้ และกำหนดให้ Φ_0 , Φ_1 และ Φ_2 เป็นศักย์แม่เหล็กที่บริเวณตัวกลางยังผล , เซลล์ของไหล และทรงกลมประกอบ ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับสมการลาปลาซ (Laplace 's equation) สำหรับแต่ละบริเวณดังกล่าว กล่าวคือ

$$\nabla^2\Phi_0(r,\theta) = 0 \quad (b \leq r \leq \infty), \quad (2.3)$$

$$\nabla^2\Phi_1(r,\theta) = 0 \quad (a \leq r \leq b), \quad (2.4)$$

และ $\nabla^2\Phi_2(r,\theta) = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.5)$

2.2 เงื่อนไขขอบเขต

เราสามารถแก้สมการที่ (2.3) , (2.4) และ (2.5) เพื่อหาค่า Φ_0 , Φ_1 และ Φ_2 ได้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) กล่าวคือ

ก. สนามแม่เหล็กบริเวณที่ไกลจากตัวจับมากๆ คือ สนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{H}_0) นั้นเอง จะได้

$$\Phi_0(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta \quad \text{ที่ } r \Rightarrow \infty \quad (2.6)$$

ข. สนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวของเซลล์ของไหล และผิวของตัวจับ ($\vec{H}_{||}$) มีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางยังผลกับผิวของเซลล์ของไหล และบริเวณรอยต่อระหว่างผิวของเซลล์ของไหลกับตัวจับ กล่าวคือ

$$\vec{H}_{0||}(b, \theta) = \vec{H}_{1||}(b, \theta), \quad (2.7)$$

และ
$$\vec{H}_{1||}(a, \theta) = \vec{H}_{2||}(a, \theta) \quad (2.8)$$

จากสมการที่ (2.2) , เขียนสมการที่ (2.7) และ (2.8) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \Phi_0(b, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_1(b, \theta)}{\partial \theta}, \quad (2.9)$$

และ
$$\frac{\partial \Phi_1(a, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_2(a, \theta)}{\partial \theta} \quad (2.10)$$

ค. สนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวจับ และผิวของเซลล์ของไหล (\vec{B}_\perp) มีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางยังผลกับผิวของเซลล์ของไหล และบริเวณรอยต่อระหว่างผิวเซลล์ของไหลกับตัวจับ กล่าวคือ

$$\vec{B}_{0\perp}(b, \theta) = \vec{B}_{1\perp}(b, \theta), \quad (2.11)$$

และ
$$\vec{B}_{1\perp}(a, \theta) = \vec{B}_{2\perp}(a, \theta) \quad (2.12)$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็ก \vec{B} และสนามแม่เหล็ก \vec{H} จะสอดคล้องกับสมการ

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.13)$$

เมื่อ μ เป็นค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กของสารใดๆ

จากสมการที่ (2.2) และ (2.13) เขียนสมการที่ (2.11) และ (2.12) ใหม่ได้เป็น

$$\mu^* \frac{\partial \Phi_0(b, \theta)}{\partial r} = \mu_f \frac{\partial \Phi_1(b, \theta)}{\partial r}, \quad (2.14)$$

และ
$$\mu_f \frac{\partial \Phi_1(a, \theta)}{\partial r} = \mu_p \frac{\partial \Phi_2(a, \theta)}{\partial r} \quad (2.15)$$

2.3 ผลเฉลยโดยทั่วไปของสมการลาปลาซ

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ศักย์แม่เหล็กในแต่ละบริเวณของตัวทรงในสมการที่ (2.3), (2.4) และ (2.5) จะสอดคล้องกับสมการลาปลาซ และภายใต้เงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.9), (2.10), (2.14) และ (2.15) สมการลาปลาซในแต่ละบริเวณของตัวทรงจะมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$\Phi_0(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (b \leq r \leq \infty), \quad (2.16)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^{-(l+1)} + C_l r^l) P_l(\cos \theta) \quad (a \leq r \leq b), \quad (2.17)$$

และ
$$\Phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} (D_l r^l) P_l(\cos \theta)$$

$$(0 \leq r \leq a) \quad (2.18)$$

เมื่อ A_l, B_l, C_l และ D_l เป็นค่าคงที่ ซึ่งคำนวณได้จากเงื่อนไขข้างต้น

พิจารณาเทอม $\frac{\partial \Phi_0(r, \theta)}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial \theta}$ และ $\frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial \theta}$ จะพบว่า

$$\frac{\partial \Phi_0(r, \theta)}{\partial \theta} = H_0 r \sin \theta + \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^{-(l+1)}) P'_l(\cos \theta) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^{-(l+1)} + C_l r^l) P'_l(\cos \theta) \quad (2.20)$$

และ
$$\frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (D_l r^l) P'_l(\cos \theta) \quad (2.21)$$

เมื่อ
$$P'_l(\cos \theta) = \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

และพิจารณาเทอม $\mu^* \frac{\partial \Phi_0(r, \theta)}{\partial r}$, $\mu_f \frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial r}$ และ $\mu_p \frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial r}$ จะพบว่า

$$\mu^* \frac{\partial \Phi_0(r, \theta)}{\partial r} = -\mu^* \left(H_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l (l+1) r^{-(l+2)} \right) P_l(\cos \theta), \quad (2.22)$$

$$\mu_f \frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial r} = \mu_f \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-B_l (l+1) r^{-(l+2)} + C_l l r^{l-1}) P_l(\cos \theta) \right), \quad (2.23)$$

และ
$$\mu_p \frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial r} = \mu_p \left(\sum_{l=0}^{\infty} (D_l l r^{l-1}) P_l(\cos \theta) \right) \quad (2.24)$$

แทนสมการที่ (2.19) และ (2.20) ลงในสมการที่ (2.9) พิจารณา สำหรับกรณี
 $l = 1$ จะได้

$$\frac{1}{b^2}A_1 - \frac{1}{b^2}B_1 - bC_1 = bH_0 \quad (2.25)$$

และสำหรับกรณีที่ $l \neq 1$ จะได้

$$b^{-(l+1)}A_l - b^{-(l+1)}B_l - b^l C_l = 0 \quad (2.26)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทนสมการที่ (2.20) - (2.24) ลงในสมการที่ (2.10) - (2.15) จะพบว่า
 สำหรับกรณีที่ $l = 1$ จะได้

$$\frac{1}{a^2}B_1 + aC_1 - aD_1 = 0, \quad (2.27)$$

$$-\frac{2\mu^*}{b^3}A_1 + \frac{2\mu_f}{b^3}B_1 - \mu_f C_1 = \mu^* H_0, \quad (2.28)$$

และ
$$-\frac{2\mu_f}{a^3}B_1 + \mu_f C_1 - \mu_p D_1 = 0 \quad (2.29)$$

และสำหรับกรณีที่ $l \neq 1$ จะได้

$$a^{-(l+1)}B_l + a^l C_l - a^l D_l = 0, \quad (2.30)$$

$$-(l+1)\mu^* b^{-(l+2)}A_l + (l+1)\mu_f b^{-(l+2)}B_l - l\mu_f b^{l-1}C_l = 0, \quad (2.31)$$

และ
$$-(l+1)\mu_f a^{-(l+2)}A_l + l\mu_f a^{l-1}C_l - l\mu_p a^{l-1}D_l = 0 \quad (2.32)$$

โดยการแก้สมการที่ (2.27) - (2.32) ค่าคงที่ A_l, B_l, C_l และ D_l มีค่าเป็น

$$A_l = B_l = C_l = D_l = 0 \quad \text{สำหรับ } l \neq 1 \quad (2.33)$$

$$\text{และ } A_1 = \frac{H_o a^3}{\gamma^3 I} [\gamma^3 (v^* + 2)(v - 1) - (v^* - 1)(v + 2)], \quad (2.34 \text{ ก})$$

$$B_1 = \frac{3H_o a^3 v^* (v - 1)}{I}, \quad (2.34 \text{ ข})$$

$$C_1 = -\frac{3H_o v^* (v + 2)}{I}, \quad (2.34 \text{ ค})$$

$$D_1 = -\frac{9H_o v^*}{I} \quad (2.34 \text{ ง})$$

$$\text{เมื่อ } v^* = \frac{\mu^*}{\mu_f}, \quad v = \frac{\mu_p}{\mu_f} \quad \text{และ } I = (v + 2)(2v^* + 1) - 2\gamma^3 (v - 1)(v^* - 1)$$

2.4 สนามแม่เหล็กในระบบตัวกรอง

เราสามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็ก \vec{H} ที่บริเวณต่างๆในระบบตัวกรองได้ โดยแทนสมการที่ (2.16) - (2.18) และสมการที่ (2.33) - (2.34) ลงในสมการที่ (2.2) จะพบว่า

$$\vec{H}_{eff} = -\vec{\nabla}\Phi_o = \left(H_o + \frac{2A_1}{r^3}\right)\cos\theta \hat{r} - \left(H_o - \frac{A_1}{r^3}\right)\sin\theta \hat{\theta}, \quad (2.35)$$

เมื่อ \vec{H}_{eff} คือ สนามแม่เหล็กบริเวณตัวกลางยังผล

$$\vec{H}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1 = \left(\frac{2B_1}{r^3} - C_1\right)\cos\theta \hat{r} + \left(\frac{B_1}{r^3} + C_1\right)\sin\theta \hat{\theta}, \quad (2.36)$$

เมื่อ \vec{H}_1 คือสนามแม่เหล็กบริเวณเซลล์ของไหล และ

$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla}\Phi_2 = -D_1(\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}) \quad (2.37)$$

เมื่อ \vec{H}_2 คือสนามแม่เหล็กบริเวณตัวจับทรงกลม

สนามแม่เหล็กรอบๆตัวจับ (\vec{H}) คำนวณจากค่าเฉลี่ยของสนามแม่เหล็กตลอดทั้งระบบ
ตัวกรอง โดยค่าเฉลี่ยที่ได้เสมือนว่ามีค่าเท่ากันหมดทุกบริเวณในตัวกรอง ดังนั้น เราจะได้
ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กในทรงกลมประกอบ กับสนามแม่เหล็กในตัวกลางยังผล ซึ่ง
เขียนเป็น

$$\langle \vec{B} \rangle_i = \mu^* \langle \vec{H}_{eff} \rangle_i \quad (2.38)$$

เมื่อ $\langle \vec{B} \rangle_i$ เป็นสนามแม่เหล็กที่เฉลี่ยครอบคลุมปริมาตรของทรงกลมประกอบในแต่ละ
ส่วนประกอบย่อย i ของพิกัดคาร์ทีเซียน ($i = x, y$ และ z) จะได้

$$\langle \vec{B} \rangle_i = \gamma^3 \mu_p \langle \vec{H}_2 \rangle_i + (1 - \gamma^3) \mu_f \langle \vec{H}_1 \rangle_i \quad (2.39)$$

และ $\langle \vec{H}_{eff} \rangle_i$ เป็นสนามแม่เหล็กที่เฉลี่ยตลอดตัวกลางยังผลในแต่ละส่วนประกอบย่อย i ของ
พิกัดคาร์ทีเซียน ($i = x, y$ และ z) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

จากสมการที่ (2.38) และ (2.39) พิจารณาส่วนประกอบย่อยในแนวแกน X จะได้
ความสัมพันธ์ระหว่าง μ^* กับ μ_f เป็น

$$\frac{\mu^*}{\mu_f} = 1 + \frac{3\gamma^3(v-1)}{3 + (v-1)(1-\gamma^3)} \quad (2.40)$$

ดังนั้น สนามแม่เหล็ก \vec{H} บริเวณรอบๆตัวจับมีค่าเป็น

$$\vec{H}(\vec{r}) = AH_o \left[\left(1 - \frac{2-2v}{2+v} \frac{1}{r_a^3} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 + \frac{1-v}{2+v} \frac{1}{r_a^3} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right],$$

$$1 < r_a < \frac{1}{\gamma} \quad (2.41)$$

$$\text{และ } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_o, \quad r_a > \frac{1}{\gamma} \quad (2.42)$$

เมื่อ $A = (2+v) / (2 + \gamma^3 + v(1-\gamma^3))$ และ $r_a = r/a$ โดยที่ $\gamma = \frac{a}{b}$

จะเห็นได้ว่า ในกรณีที่ความหนาแน่นของตัวจับอนุภาคมีค่าน้อยมาก ($\gamma^3 \Rightarrow 0$) $A \cong 1$ สมการที่ (2.41) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_0 \left[\left(1 - \frac{2-2v}{2+v} \frac{1}{r_a^3} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 + \frac{1-v}{2+v} \frac{1}{r_a^3} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right],$$

$$1 < r_a < \frac{1}{\gamma} \quad (2.43)$$

ซึ่งเป็นสมการแม่เหล็กจากทรงกลมตัวจับเดี่ยว สอดคล้องกับทฤษฎีของ F. J. Friedlaender และคณะ (1981) และวาระยา ชำนาญภูมิ (1993)

กรณีที่ไม่มีตัวจับทรงกลมอยู่เลย ($\gamma^3 = 0$ และ $v = \mu_p/\mu_f = 1$) จะเห็นได้ว่า $A = 1$ และ สมการที่ (2.41) จะลดรูปเป็นสนามแม่เหล็กความเข้มสม่ำเสมอเท่ากับสนามแม่เหล็กภายนอก ($\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0$)