บทที่ 1

บทนำ

ท่อนำคลื่นเป็นอุปกรณ์นำสัญญาณชนิดหนึ่งที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวาง และต้องการการวิเคราะห์สำหรับหาพารามิเตอร์ที่สำคัญบางตัว เช่น ความถี่คัตออฟ, ค่าคงที่ของการส่งผ่าน, แพตเทิร์นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น การวิเคราะห์ปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นอาจทำได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) ถ้าโครงสร้างของท่อนำคลื่นนั้นไม่สลับซับซ้อนจนเกินไปนัก ทว่าถ้าหากท่อนำคลื่นนั้นมีโครงสร้างที่ซับซ้อน การคำนวณโดยวิธีการเชิงเลข (Numerical Method) จะมีความเหมาะสมกว่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์

จากสมการแมกซ์เวลล์สำหรับบริเวณที่ไม่มีประจุไฟฟ้า[1]

$$\nabla \times \bar{\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon\bar{\mathcal{E}} \qquad (1\text{-}1a)$$

$$\nabla \times \bar{\mathcal{E}} = -j\omega\mu\bar{\mathcal{H}} \qquad (1\text{-}1b)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathcal{E}} = 0 \qquad (1\text{-}1c)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathcal{H}} = 0 \qquad (1\text{-}1d)$$

ในที่นี้ $\bar{\mathcal{E}}$ และ $\bar{\mathcal{H}}$ เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่ง x, y, z ε และ μ เป็นค่า permittivity และ permeability ของตัวกลาง $\bar{\mathcal{E}}$ และ $\bar{\mathcal{H}}$ มีเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างชั้นตัวกลางที่ต่างชนิดกัน คือ

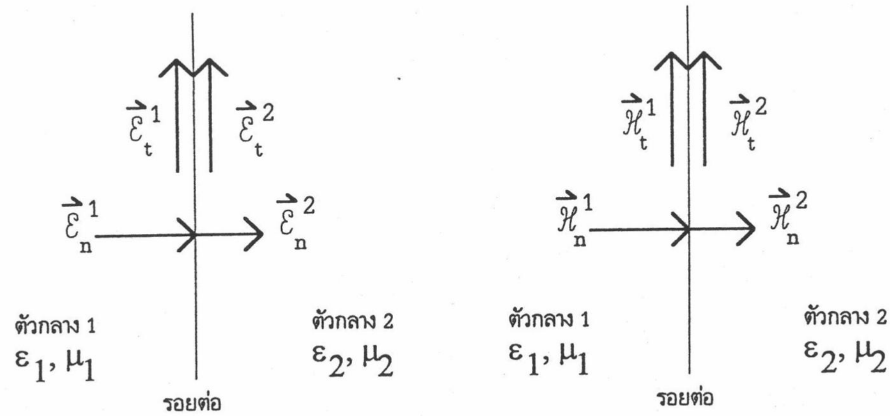
$$\bar{\mathcal{E}}_{t1} = \bar{\mathcal{E}}_{t2} \qquad (1\text{-}2a)$$

$$\varepsilon_1\bar{\mathcal{E}}_{n2} = \varepsilon_2\bar{\mathcal{E}}_{n2} \qquad (1\text{-}2b)$$

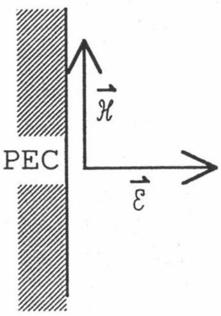
$$\bar{\mathcal{H}}_{t1} = \bar{\mathcal{H}}_{t2} \qquad (1\text{-}2c)$$

$$\mu_1\bar{\mathcal{H}}_{n1} = \mu_2\bar{\mathcal{H}}_{n2} \qquad (1\text{-}2d)$$

ในที่นี้ ดรรชนีล่าง t หมายถึงสนามในทิศแนวสัมผัสกับรอยต่อ และดรรชนีล่าง n หมายถึงสนามในแนวตั้งฉากกับรอยต่อ ดรรชนีล่าง 1 และ 2 หมายถึงชั้นของตัวกลาง 1 หรือ 2 รูปที่ 1-1a แสดงเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่รอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด และมีเงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ(perfect electric conductor)เป็น

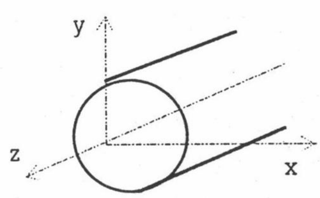


(a)



(b)

รูปที่1-1 แสดงเงื่อนไขขอบเขตของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (a)ที่รอยต่อระหว่างชั้นตัวกลาง 2 ชนิด (b)ที่ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ



รูปที่1-2 แสดงท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z

$$\mathbf{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (1\text{-}3a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \qquad (1\text{-}3b)$$

เมื่อ **n** เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับผิวของตัวนำไฟฟ้า รูปที่ 1-1b แสดงเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาการส่งผ่านคลื่นในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย ตามที่แสดงในรูปที่1-2 ท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z มีโครงสร้างสม่ำเสมอตามแนวแกน z คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งผ่านในท่อนำคลื่นในทิศ +z สามารถกำหนดให้มีอัตราการเปลี่ยนแปลงในทางแกน z เป็นดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta_z \tag{1-4}$$

เมื่อ β_z เป็นค่าคงที่ของการส่งผ่านในทิศ +z และเป็นจำนวนจริง ภายใต้โครงสร้างของท่อนำคลื่นดังแสดงในรูปที่ 1-2 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นจะสามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)e^{-j\beta_z z} \tag{1-5a}$$

$$\mathcal{H}(x,y,z) = \mathbf{H}(x,y)e^{-j\beta_z z} \tag{1-5b}$$

ซึ่งเมื่อนำสมการ (1-4) และ (1-5) ไปใช้กับสมการแมกซ์เวลล์ (1-1a) ถึง (1-1d) จะได้สมการคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งผ่านในท่อนำคลื่นคือ

$$\nabla^2\mathbf{E} + (k^2 - \beta_z^2)\mathbf{E} = 0 \tag{1-6a}$$

หรือ

$$\nabla^2\mathbf{H} + (k^2 - \beta_z^2)\mathbf{H} = 0 \tag{1-6b}$$

เมื่อ $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ และมีเงื่อนไขขอบเขตของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ผนังท่อนำคลื่นซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ คือ

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \tag{1-7a}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{1-7b}$$

เมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับผนังท่อนำคลื่น และมีเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด คือ

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \tag{1-8a}$$

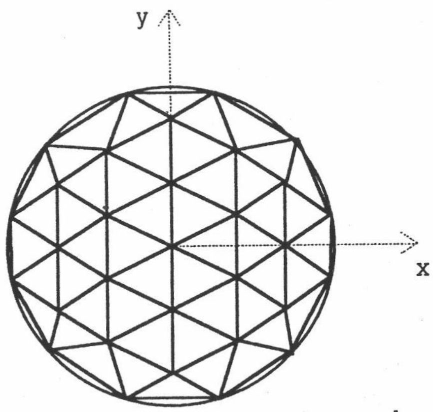
$$\varepsilon_1\mathbf{E}_{n1} = \varepsilon_2\mathbf{E}_{n2} \tag{1-8b}$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \tag{1-8c}$$

$$\mu_1\mathbf{H}_{n1} = \mu_2\mathbf{H}_{n2} \tag{1-8d}$$

ในที่นี้ ดรรชนีล่าง t หมายถึงสนามในทิศแนวสัมผัสกับรอยต่อ และดรรชนีล่าง n หมายถึงสนามในแนวตั้งฉากกับรอยต่อ ดรรชนีล่าง 1 และ 2 หมายถึงชั้นของตัวกลาง 1 หรือ 2 ตามลำดับ

สมการ (1-6) และเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (1-7) และ (1-8) ให้ผลเฉลยเป็นค่าคงที่ของการส่งผ่าน β_z และแพตเทิร์นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ ในท่อนำคลื่นในแต่ละโหมด ถ้าท่อนำคลื่นที่วิเคราะห์มีภาคตัดขวางที่มีรูปร่างซับซ้อนแปลกออกไป หรือภายในท่อนำคลื่นประกอบด้วยตัวกลางมากกว่า 1 ชนิดขึ้นไป การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์จะยาก



รูปที่1-3 แสดงตัวอย่างการแบ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมบนระนาบ x-y
สำหรับท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z

และไม่เหมาะสม อีกทั้งอาจจะหาคำตอบในรูปฟังก์ชันเชิงวิเคราะห์(Analytic function)ไม่ได้เลย วิธีการเชิงเลขจะเข้ามามีประโยชน์มากในกรณีเช่นนี้

วิธีการเชิงเลขสำหรับปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่รู้จักกันดี ได้แก่ Moment Method(MoM), Finite Differrence Method(FDM), Boundary Integral Equation Method(BIEM) และ Finite Element Method(FEM) เป็นต้น การพิจารณาเลือกวิธีการเชิงเลขใดมาใช้นั้น จะคำนึงถึง[2],[3],[4]

- ความแม่นยำ(accuracy)
- เวลาที่ใช้ในการคำนวณ(computing time)
- จำนวนหน่วยความจำสำหรับเครื่องคอมพิวเตอร์(storage requirment)
- ความเชื่อถือได้(reliability)
- และความสามารถประยุกต์ได้อย่างหลากหลาย(versatility)

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (Finite Element Method หรือ FEM) ใช้การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนย่อย เรียกว่าอีลีเมนต์ แล้วแก้สมการคลื่นในแต่ละอีลีเมนต์โดยมีเงื่อนไขขอบเขตของแต่ละอีลีเมนต์ แล้วจึงนำคำตอบของทุกอีลีเมนต์มาประกอบเป็นคำตอบรวมของทั้งโดเมน รูปที่ 1-3 แสดงตัวอย่างการแบ่งอีลีเมนต์ในท่อนำคลื่นแบบหนึ่ง

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับปัญหาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นมีอยู่หลายวิธี แต่ละวิธีมีความต้องการทรัพยากรในการคำนวณมากน้อยต่างกันไป โดยจำนวนหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ที่ต้องใช้นั้นจะแปรตามจำนวนส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใช้ และนอกจากนี้ แต่ละวิธีก็อาจมีปัญหาข้อบกพร่องบางประการซึ่งทำให้มีข้อจำกัดในการนำไปใช้ ปัญหาเกี่ยวกับ spurious mode เป็นปัญหาสำคัญอันหนึ่งที่พบในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่น[2],[3],[4] วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ไม่มี spurious mode นั้นได้มีผู้

ทำการวิจัยเสนอไว้แล้วหลายวิธี[5]-[11] วิธีเหล่านี้มีการกำจัด spurious mode ด้วยวิธีที่ต่างกันไป ในบางวิธีใช้ penalty function ในการแก้ปัญหา spurious mode [6],[7] โดยในวิธี penalty function นี้จะต้องมีการกำหนดค่าคงที่ค่าหนึ่ง เรียกว่า penalty coefficient เพื่อใช้ในการคำนวณ ซึ่งมีข้อเสียที่จะทำให้ความแม่นยำของคำตอบจะขึ้นอยู่กับการกำหนดค่า penalty coefficient นี้ และในวิธีที่ใช้ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้า **E** หรือสนามแม่เหล็ก **H** ครบทั้ง 3 ส่วนประกอบ[8],[9],[10] หรือบางวิธีที่ใช้ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก **A** ร่วมกับศักย์สเกลาร์ **V** [11] ล้วนมีข้อเสียที่ต้องมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในการคำนวณมาก

วิธีที่ใช้ตัวแปรของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเฉพาะส่วนประกอบในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบ ซึ่งได้มีผู้เสนอไว้แล้วคือ W.C. Chew และ M.A.Nasir [5] ซึ่งเมื่อศึกษานำมาใช้แล้วมีข้อดี คือ

1.การใช้ตัวแปรของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเฉพาะส่วนประกอบในแนวขวาง จะมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในการคำนวณเป็น $\frac{2}{3}$ ของวิธีที่ใช้ตัวแปรของสนามครบทั้ง 3 ส่วนประกอบ วิธีนี้ทำให้การใช้จำนวนหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์น้อยกว่า

2.ไม่มี spurious mode ในชุดคำตอบค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

ผู้ศึกษาในงานวิจัยนี้ได้ทดลองคำนวณตามวิธีการของ W.C. Chew และ M.A. Nasir นี้ แล้วพบว่ามีปัญหาในวิธีนี้ 2 ข้อ คือ

1.คำตอบของแพตเทิร์นสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมกลวงสำหรับโหมด TE และ TM ที่เป็นโหมดดีเจนเนอเรชันกัน มีแพตเทิร์นไม่ถูกต้อง

2.คำตอบค่าคงที่ของการส่งผ่านของท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นเส้นโค้ง ไม่ถูกต้อง

จุดประสงค์ของการวิจัยนี้ จะเสนอการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ (Vector Shape Function) เพื่อแก้ปัญหาที่พบ 2 ข้อข้างต้นนี้ โดยจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ ในการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางภายในอีลีเมนต์ แทนวิธีการกระจายด้วยส่วนประกอบตามแนวแกน x และ y ที่ใช้ในวิธีของ W.C. Chew และ M.A.Nasir [5]

ภายในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบด้วย

บทที่ 1 บทนำ

บทที่ 2 กล่าวถึงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สำหรับท่อนำคลื่นที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบเป็นตัวแปรที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir และกล่าวถึงปัญหาที่พบในการนำไปประยุกต์ใช้งาน และแนวความคิดเกี่ยวกับการนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มาใช้เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

บทที่ 3 กล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่เสนอในงานวิจัยนี้ และการนำไปใช้กับนิพจน์การแปรผันที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir

บทที่ 4 เป็นตัวอย่างผลการคำนวณของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่เสนอในบทที่ 3 กับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น 3 ตัวอย่าง คือ ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมกลวง ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมที่มีตัวกลางไดอิเล็กตริกเติมอยู่บางส่วน และ ท่อนำคลื่นแบบวงกลมกลวง ตามลำดับ

บทที่ 5 เป็นการสรุปผลการวิจัย