บทที่ 2

ทฤษฎีและสถิติที่ใช้ในการวิจัย

2.1 แผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค (Randomized Blocks Design)

แผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อคที่นำมาศึกษาในครั้งนี้ จะพิจารณาถึงแผนการทดลองที่เป็นบล็อคสมบูรณ์ ซึ่งหมายความว่าในแต่ละบล็อคจะต้องมีครบทุกทรีทเมนต์ แผนการทดลองแบบนี้ใช้สำหรับกรณีที่ผู้ทดลองสามารถแบ่งหน่วยทดลองออกเป็นกลุ่มหรือเป็นประเภทได้ โดยอาศัยลักษณะใดลักษณะหนึ่ง กลุ่มดังกล่าวเรียกว่า บล็อค โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้หน่วยทดลองที่อยู่ภายในบล็อคเดียวกัน มีลักษณะเหมือนกันหรือคล้ายคลึงกันมากที่สุด (Homogeneous) และหน่วยทดลองที่อยู่ต่างบล็อคกันจะมีความแตกต่างกันมากที่สุด ทั้งนี้ เพื่อขจัดความผันแปร ซึ่งไม่ใช่อิทธิพลของทรีทเมนต์ออกไปจากความคลาดเคลื่อนของการทดลอง และในกรณีแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อคสมบูรณ์นี้ ความผันแปรระหว่างบล็อคจะไม่มีผลกระทบต่อความผันแปรของทรีทเมนต์เพราะทุกทรีทเมนต์ได้ปรากฏในทุกบล็อค

แผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค มีตัวแบบผลบวกและลักษณะของข้อมูลแสดงไว้ในตารางที่ 2.1 ดังนี้

ตัวแบบผลบวก สำหรับแผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค

$$x_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots t$$
$$j = 1,2,\ldots r$$

โดยที่ x_{ij} หมายถึง ค่าสังเกตจากหน่วยทดลองในบล็อคที่ j ได้รับทรีทเมนต์ที่ i

μ หมายถึง ค่าเฉลี่ยของประชากร

τ_i หมายถึง อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i

β_j หมายถึง อิทธิพลของบล็อคที่ j

ε_{ij} หมายถึง ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลองจากหน่วยทดลองที่ (i,j)

ตารางที่ 2.1 ลักษณะของข้อมูลจากแผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค

ทรีทเมนต์ $i=1,2,\ldots t$	บล็อค $j = 1,2, \ldots r$				รวม $(x_{i.})$	ค่าเฉลี่ย $(\bar{x}_{i.})$
	1	2	. . .	r		
1	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1r}	$x_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2r}	$x_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
.	.	.		.	.	.
.	.	.		.	.	.
.	.	.		.	.	.
t	x_{t1}	x_{t2}	. . .	x_{tr}	$x_{t.}$	$\bar{x}_{t.}$
รวม $(x_{.j})$	$x_{.1}$	$x_{.2}$	. . .	$x_{.r}$	$x_{..}$	
ค่าเฉลี่ย $(\bar{x}_{.j})$	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	. . .	$\bar{x}_{.r}$		$\bar{x}_{..}$

2.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค

(The Analysis of Variance for Randomized Blocks Design)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อค เพื่อทดสอบความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์และบล็อค แสดงไว้ในตารางที่ 2.2 ดังนี้

ตารางที่ 2.2 ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลจากตารางที่ 2.1

SOV	df	SS	MS	F-Test
Blocks	(r-1)	$\left[\left(\sum_j x^2_{.j}\right)/t\right] - \left[\left(\sum_i \sum_j x_{ij}\right)^2/rt\right]$	SSB/df =MSB	MSB/MSE
Treatments	(t-1)	$\left[\left(\sum_i x^2_{i.}\right)/r\right] - \left[\left(\sum_i \sum_j x_{ij}\right)^2/rt\right]$	SSTr/df = MSTr	MSTr/MSE
Error	(r-1)(t-1)	SSTotal - SSB-SSTr = SSE	SSE/df = MSE	
Total	(rt-1)	$\sum_i \sum_j x^2_{ij} - \left[\left(\sum_i \sum_j x_{ij}\right)^2/rt\right]$		

สมมติฐานหลักที่ต้องการทดสอบ (Null Hypothesis) คือ

H_o : ไม่มีความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์

เกณฑ์การตัดสินใจ

ในการทดสอบ จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อค่า F จากการคำนวณมีค่ามากกว่าค่า F ที่ได้จากการเปิดตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (t-1), (r-1)(t-1)

2.3 ข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน

1. อิทธิพลของทรีทเมนต์และสิ่งแวดล้อมอื่น ๆ เป็นแบบบวก

2. ความคลาดเคลื่อนของการทดลองเกิดขึ้นโดยสุ่มเป็นอิสระต่อกันและมีลักษณะการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนเป็น σ^2

2.4 การทดสอบแบบนอนพาราเมตริก (Nonparametric Tests)

2.4.1 วิธีทดสอบของฟรีดแมน เป็นการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก ซึ่งไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากร ข้อมูลที่นำมาทดสอบจะต้องถูกจัดอยู่ในตารางแจกแจงสองทาง (Two-Way Table) โดยมีแนวนอน (Row) เป็นบล็อคอิสระกันและแนวตั้ง (Column) เป็นทรีทเมนต์จะมีความสัมพันธ์กัน

ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์สำหรับงานวิจัยนี้มีวิธีการทดสอบ ดังนี้

สมมติฐานหลัก

H_o : ไม่มีความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์

ขั้นตอนในการทดสอบ

1. จัดอันดับ (rank) ข้อมูลภายในบล็อคแต่ละบล็อคแยกจากกัน ถ้าอันดับเท่ากันให้ใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

2. หาผลรวมของอันดับในแต่ละทรีทเมนต์

3. คำนวณตัวสถิติ จากสูตร

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} R_j^2 - 3n(k+1)$$

โดยที่ n คือ จำนวนบล็อค

k คือ จำนวนทรีทเมนต์

R_j คือ ผลรวมของอันดับในทรีทเมนต์ที่ j

เกณฑ์การตัดสินใจ

เมื่อ k=3, n=2 ถึง 9 และ k=4, n=2 ถึง 4 เปิดตาราง 9 ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก และจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อค่า P-value น้อยกว่าระดับนัยสำคัญ α

เมื่อ k และ n มีค่ามากกว่าที่มีในตาราง 9 จะใช้ตาราง Chi-square และปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อค่า χ_r^2 ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า ค่า χ^2 จากตาราง ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (k-1)

2.4.2 วิธีทดสอบของเควด

Dana Quade (1972,1979) ได้ศึกษาและสร้างสถิติทดสอบนี้ขึ้นเพื่อทดสอบความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์ ในการวิเคราะห์แผนการทดลองแบบสุ่ม ในบล็อคสมบูรณ์ ซึ่งในการทดสอบของเควดนี้ นอกจากจะพิจารณาถึงการจัดอันดับข้อมูลภายในแต่ละบล็อคตามวิธีการทดสอบของฟรีดแมนแล้ว เควดยังได้พิจารณาถึงการจัดอันดับข้อมูลในระหว่างบล็อคอีกด้วย สำหรับรายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

H_o : ไม่มีความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์

015692

ขั้นตอนในการทดสอบ

ให้ X_{ij} เป็นค่าสังเกตจากหน่วยทดลองในบล็อคที่ i ได้รับทรีทเมนต์ที่ j , $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,k$

1. จัดอันดับ X_{ij} ภายในบล็อคแต่ละบล็อคแยกจากกันให้เป็น $R(X_{ij})$ ถ้าอันดับเท่ากันให้ใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

2. หา Sample Range ในแต่ละบล็อค โดย Sample Range = ค่าสูงสุด (X_{ij}) - ค่าต่ำสุด (X_{ij})

3. จัดอันดับ Sample Range ให้เป็น Q_i ถ้าอันดับเท่ากัน ให้ใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

4. คำนวณ $S_{ij} = Q_i \{R(X_{ij}) - \frac{(k+1)}{2}\}$

5. คำนวณ $S_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}$

6. คำนวณ $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} S_{ij}^2$ เรียกว่า TOTAL SUM OF SQUARES.

7. คำนวณ $B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} S_j^2$ เรียกว่า TREATMENT SUM OF SQUARES.

8. คำนวณตัวสถิติ จากสูตร

$$F_Q = \frac{(n-1)\ B}{A-B}$$

เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อ ค่าสถิติ F_Q ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตารางเอฟ ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (k-1) และ (n-1)(k-1)

2.4.3 วิธีทดสอบของโคโนเวอร์และไอแมน

เป็นการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก ที่พิจารณาถึงการจัดอันดับของข้อมูลที่แตกต่างไปจากการทดสอบแบบนอนพาราเมตริกทั้งสองข้างต้น ซึ่ง Conover, W.J. และ Iman, R.L. (1976,1981) ได้ศึกษาและสร้างสถิติทดสอบนี้ขึ้น โดยอาศัย Rank Transformation มาประยุกต์กับปัญหานี้ ซึ่งทำได้โดยการจัดอันดับของข้อมูลร่วมกันแล้วใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนกับอันดับของข้อมูลเหล่านั้น รายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

H_o : ไม่มีความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของทรีทเมนต์

ขั้นตอนในการทดสอบ

1. จัดอันดับข้อมูลทุกตัวร่วมกัน ถ้าอันดับเท่ากันใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

2. นำค่าอันดับของข้อมูลไปวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งลักษณะของข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์และขั้นตอนการวิเคราะห์ที่สำคัญเป็นดังนี้

BLOCKS	TREATMENTS							รวม
	1	2	3	.	.	.	k	
1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	.	.	.	R_{1k}	$R_{.1}$
2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	.	.	.	R_{2k}	$R_{.2}$
3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	.	.	.	R_{3k}	$R_{.3}$
.	.	.	.				.	.
.	.	.	.				.	.
.	.	.	.				.	.
n	R_{n1}	R_{n2}	R_{n3}	.	.	.	R_{nk}	$R_{.k}$
รวม	$R_{1.}$	$R_{2.}$	$R_{3.}$	.	.	.	$R_{n.}$	$\frac{N(N+1)}{2}$

TOTAL SUM OF SQUARES

$$SST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(R_{ij} - \frac{(N+1)}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} R_{ij}^2 - \frac{N}{4}(N+1)^2$$

TREATMENT SUM OF SQUARES

$$SSTR = n\sum_{j=1}^{k}\left(R_{j.} - \frac{(N+1)}{2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\frac{R_{j}^2}{n} - \frac{N}{4}(N+1)^2$$

BLOCK SUM OF SQUARES

$$SSB = k\sum_{i=1}^{n}\left(R.i - \frac{(N+1)}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{R.i^2}{k} - \frac{N}{4}(N+1)^2$$

ERROR SUM OF SQUARES

$$SSE = SST - (SSTR + SSB)$$

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของอันดับข้อมูล

SOV	df	SS	MS	F
BLOCK	n-1	$\sum_{i=1}^{n} \frac{R^2_{.1}}{k} - \frac{N}{4}(N+1)^2$	SSBK/df = MSB	MSB/MSE
TREATMENT	k-1	$\sum_{i=1}^{k} \frac{R^2_{j.}}{n} - \frac{N}{4}(N+1)^2$	SSTR/df = MSTR	MSTR/MSE
ERROR	(n-1)(k-1)	SST - (SSTR + SSB)	SSE/df = MSE	
TOTAL	nk-1	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} R^2_{ij} - \frac{N}{4}(N+1)^2$		

เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อค่าสถิติ F ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า ค่า F ที่ได้จากการเปิดตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (k-1) และ (n-1)(k-1)

2.5 ตัวอย่างการคำนวณหาค่าสถิติทดสอบแบบนอนพาราเมตริกทั้ง 3 วิธี

จากการทดสอบความยากง่ายของข้อสอบวิชาทดสอบความถนัดทางการแพทย์กับนักเรียนที่สุ่มมา 10 คน ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 10 คนนี้สอบข้อสอบ 3 ชุด แต่ละชุดคะแนนเต็ม 100 คะแนน ผลการทดสอบปรากฏดังนี้

นักเรียนคนที่	ข้อสอบชุดที่		
	1	2	3
1	70	90	80
2	20	60	50
3	70	30	50
4	80	50	60
5	90	20	70
6	30	60	20
7	60	40	10
8	90	10	60
9	80	50	40
10	70	60	50

สมมติฐานของการทดสอบ

H_o : ข้อสอบมีความยากง่ายไม่แตกต่างกัน

H_A : ข้อสอบมีความยากง่ายแตกต่างกัน

วิธีที่ 1 วิธีทดสอบของฟรีดแมน

1. จัดอันดับข้อมูล ในแต่ละบล็อคแยกจากกันจาก 1 ถึง 10 บล็อค
2. หาผลรวมของอันดับในแต่ละทรีทเมนต์ จะได้ตารางดังต่อไปนี้

นักเรียนคนที่	ข้อสอบชุดที่					
	1		2		3	
	คะแนน	อันดับ	คะแนน	อันดับ	คะแนน	อันดับ
1	70	1	90	3	80	2
2	20	1	60	3	50	2
3	70	3	30	1	50	2
4	80	3	50	1	60	2
5	90	3	20	1	70	2
6	30	2	60	3	10	1
7	60	3	40	2	10	1
8	90	3	10	1	60	2
9	80	3	50	2	40	1
10	70	3	60	2	50	1
	$R_1 = 25$		$R_2 = 19$		$R_3 = 16$	

3. คำนวณค่าสถิติ

$$\chi_r^2 = \frac{12}{10(3)(3+1)} \left[25^2 + 19^2 + 16^2\right] - 3(10)(3+1)$$

$$= 4.2$$

4. หาค่าวิกฤตจากตาราง Chi-square ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $\chi^2_{2,0.05} = 5.99$ พบว่า $\chi_r^2 < \chi^2_{2,0.05}$ ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o สรุปได้ว่า ข้อสอบมีความยากง่ายไม่แตกต่างกัน

วิธีที่ 2 วิธีทดสอบของเควด

1. จัดอันดับข้อมูลภายในบล็อคแต่ละบล็อคแยกจากกัน 1 ถึง 10 บล็อค ให้เป็น $R(X_{ij})$ จะได้ดังตาราง

นักเรียนคนที่	ข้อสอบชุดที่					
	1		2		3	
	คะแนน	$R(X_{ij})$	คะแนน	$R(X_{ij})$	คะแนน	$R(X_{ij})$
1	70	1	90	3	80	2
2	20	1	60	3	50	2
3	70	3	30	1	50	2
4	80	3	50	1	60	2
5	90	3	20	1	70	2
6	30	2	60	3	20	1
7	60	3	40	2	10	1
8	90	3	10	1	60	2
9	80	3	50	2	40	1
10	70	3	60	2	50	1

2. หา Sample Range ในแต่ละบล็อค โดย

Sample Range = ค่าสูงสุด (X_{ij}) - ค่าต่ำสุด (X_{ij})

Sample Range ในบล็อคที่ 1 = 90-70 = 20

Sample Range ในบล็อคที่ 2 = 60-20 = 40

ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งครบ 10 บล็อค

3. จัดอันดับ Sample Range ให้เป็น Q_i

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. คำนวณ $S_{ij} = Q_i \left[R(X_{ij}) - \frac{(k+1)}{2}\right]$

$$S_{1,1} = 1.5 \left[1 - \frac{(3+1)}{2}\right] = -1.5$$

$$S_{1,2} = 1.5 \left[3 - \frac{(3+1)}{2}\right] = 1.5$$

ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนถึง $S_{10,3}$ จะได้ค่า

$$S_{10,3} = 1.5 \left[1 - \frac{(3+1)}{2}\right] = -1.5$$

5. คำนวณ $S_j = \sum_{i=1}^{10} S_{ij}$

$$S_1 = -1.5 - 5.5 + 5.5 + \ldots 1.5 = 35.5$$

$$S_2 = 1.5 + 5.5 - 5.5 + \ldots 0 = -15$$

$$S_3 = 0 + 0 + 0 + \ldots -1.5 = -20.5$$

จากขั้นที่ 3, 4, 5 แสดงได้ดังตาราง

นักเรียนคนที่	Sample Range	Q_i	S_{ij}		
			1	2	3
1	20	1.5	-1.5	1.5	0
2	40	5.5	-5.5	5.5	0
3	40	5.5	5.5	-5.5	0
4	30	3	3	-3	0
5	70	9	9	-9	0
6	40	5.5	0	5.5	-5.5
7	50	8	8	0	-8
8	80	10	10	-10	0
9	40	5.5	5.5	0	-5.5
10	20	1.5	1.5	0	-1.5
		S_j =	35.5	-15	-20.5

6. คำนวณ TOTAL SUM OF SQUARES

$$A = (-1.5)^2 + (1.5)^2 + (0)^2 + \ldots(-1.5)^2 = 759$$

7. คำนวณ TREATMENT SUM OF SQUARES

$$B = \frac{1}{10}\left[(35.5)^2 + (-15)^2 + (-20.5)^2\right] = 190.55$$

8. คำนวณตัวสถิติ

$$F_Q = \frac{(10-1)\ 190.55}{759-190.55} = \frac{1714.95}{568.45} = 3.0169$$

9. หาค่าวิกฤตจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และ 18 ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{2,18,0.05} = 3.55$ พบว่า $F_Q < F_{2,18,0.05}$ ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o สรุปได้ว่า ข้อสอบมีความยากง่ายไม่แตกต่างกัน

วิธีที่ 3 วิธีทดสอบของโคโนเวอร์และไอแมน

1. จัดอันดับข้อมูลทุกตัวร่วมกัน จาก 1 ถึง 30 จะได้ดังตารางต่อไปนี้

นักเรียนคนที่	ข้อสอบชุดที่			รวม
	1	2	3	
	อันดับ	อันดับ	อันดับ	
1	22.5	29	26	77.5
2	4	17.5	12	33.5
3	22.5	6.5	12	41
4	26	12	17.5	55.5
5	29	4	22.5	55.5
6	6.5	17.5	4	28
7	17.5	8.5	1.5	27.5
8	29	1.5	17.5	48
9	26	12	8.5	46.5
10	22.5	17.5	12	52
รวม	205.5	126	133.5	465

2. นำค่าอันดับไปวิเคราะห์ความแปรปรวน

$$C.F = \frac{N}{4}(N+1)^2 = \frac{30}{4}(31)^2 = 7207.5$$

$$SST = \left[(22.5)^2 + (29)^2 + \ldots (12)^2\right] - CF = 2207.5$$

$$SSTr = \left[(205.5)^2 + (126)^2 + (133.5)^2\right]/n - CF = 385.35$$

$$SSBk = \left[(77.5)^2 + (33.5)^2 + \ldots (52)^2\right]/k - CF = 686$$

$$SSE = SST - SSTr - SSBk = 1136.15$$

SSE = SST - SSTr - SSBk = 1136.15

จะได้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ดังนี้

SOV	df	SS	MS	F-TEST
BLOCKS	9	686	76.22	1.208
TREATMENTS	2	385.35	192.675	3.053
ERROR	18	1136.15	63.119	
TOTAL	29	2207.5		

3. หาค่าวิกฤต จากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และ 18 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{2,18,0.05}$ = 3.55 พบว่า F จากการคำนวณ $<F_{2,18,0.05}$ ไม่สามารถปฏิเสธ H_o สรุปได้ว่าข้อสอบมีความยากง่ายไม่แตกต่างกัน