

บทที่ 2

ทฤษฎีและแนวคิด

ความนำ

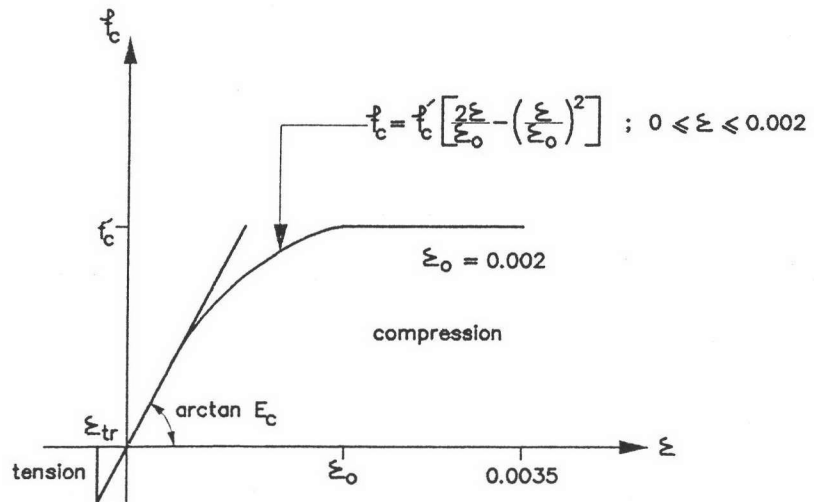
ในงานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างคานกรีตเสริมเหล็ก เพื่อคำนวณความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกสูงสุดของโครงสร้างในระนาบที่ทราบขนาดของหน้าตัดและปริมาณเหล็กเสริมโดยได้แบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ขั้นตอนหลัก

- การวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สอง เพื่อพิจารณาถึงความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต
- การวิเคราะห์หน้าตัด เพื่อพิจารณาถึงผลของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของวัสดุที่ไม่คงที่ หรือที่เรียกว่า ความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ

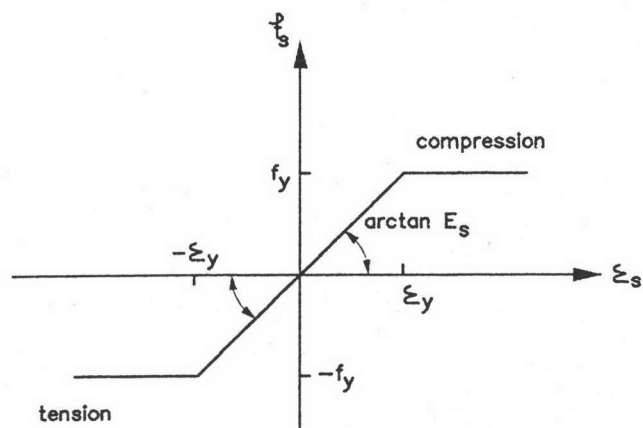
การวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สองและการวิเคราะห์หน้าตัดเมื่อนำมาพิจารณาร่วมกันเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างคานกรีตเสริมเหล็กต้องสอดคล้องกัน คือ ความเครียดที่ได้จากทั้งสองวิธีต้องมีค่าเท่ากัน

สมมติฐาน

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคานกรีต ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคานกรีต เนื่องจากหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัด (Baker and Amarakorn ,1964)
2. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเป็นแบบอิลาสติก- พลาสติก โดยสมบูรณ์ (Elastic - perfectly plastic) ดังแสดงในรูปที่ 2.2
3. ความเครียดมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากแนวแกนสะเทิน นั่นคือระนาบของหน้าตัดชิ้นส่วนจะยังคงเป็นระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนของชิ้นส่วนทั้งก่อนและหลังการแตกร้าว
4. คำนึงถึงผลของการแตกร้าวของคานกรีตในกรณีที่หน่วยแรงดึงที่เกิดขึ้นมากกว่าหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคานกรีตจะสมมติให้ค่าสติเฟนส์มีลักษณะแปรเปลี่ยนแบบพาราโบลาตลอดความยาวขององค์อาคาร



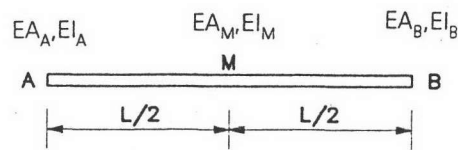
รูปที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต



รูปที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็ก

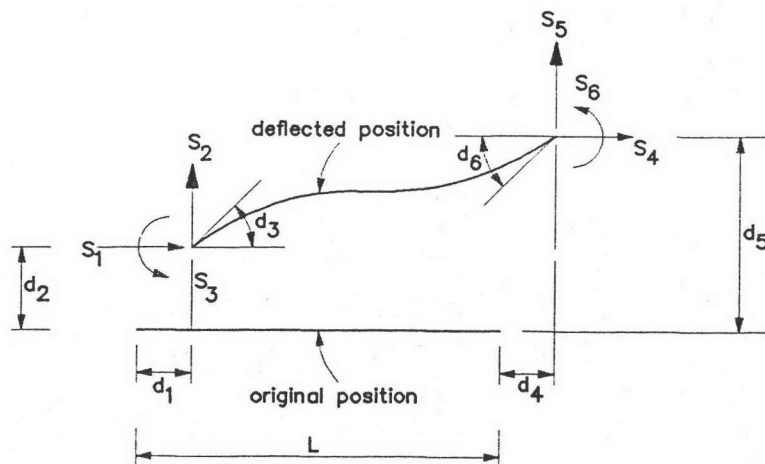
สติฟเนสขององค์อาคาร

พิจารณาองค์อาคารที่มีสติฟเนสทางแนวแกน ณ ตำแหน่งข้อต่อ A , B และที่กึ่งกลาง ความยาวของชิ้นส่วนเท่ากับ EA_A , EA_B และ EA_M ตามลำดับ สติฟเนสทางแรงดัด ณ ตำแหน่ง ข้อต่อ A , B และที่กึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วนเท่ากับ EI_A , EI_B และ EI_M ตามลำดับ และความยาว L ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงคุณสมบัติขององค์อาคาร

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับองค์อาคารที่มีแรงกระทำที่ปลาย S_1 ถึง S_6 และ d_1 ถึง d_6 เป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่สอดคล้องกับแรงกระทำที่ปลาย S_1 ถึง S_6 ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.4 และมีคุณสมบัติตามที่กำหนดข้างต้น สามารถเริ่มต้นจากสมการพลังงานศักย์รวม (Total potential energy , π) ดังนี้ (Chen and Lui , 1991)



รูปที่ 2.4 องค์อาคารภายใต้แรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง (Chen and Lui , 1991)

$$\pi = U + V \quad (2.1)$$

เมื่อ U เป็นพลังงานความเครียด (Strain energy)

$$\text{ดังนั้น } U = \int_V \int_{\epsilon} \sigma d\epsilon dV_{\epsilon} = \int_0^L \int_A \int_{\epsilon} (\sigma d\epsilon) dA dx \quad (2.2)$$

โดยที่ σ = หน่วยแรงในแนวแกน

ϵ = ความเครียดในแนวแกน

V_{ϵ} = ปริมาตรขององค์อาคาร

A = พื้นที่หน้าตัด

L = ความยาว

ขณะที่ V คือ พลังงานศักย์ (Potential energy)

$$\text{ดังนั้น } V = -\sum_{i=1}^6 S_i d_i = -[d]\{S\} \quad (2.3)$$

โดยที่ S_i คือ แรงกระทำที่ปลาย

d_i คือ การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย

$$\text{จากกฎของฮุก (Hook 's law) : } \sigma = E\epsilon \quad (2.4)$$

เมื่อ E เป็นโมดูลัสยืดหยุ่น

แทน (2.4) ลงไปใน (2.2) และอินทิเกรต จะได้

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E\epsilon^2 dA dx \quad (2.5)$$

ในการวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต สามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain - displacement relationship) ได้ดังนี้

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.6)$$

โดยที่ u และ v คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนและด้านข้างขององค์อาคารตามลำดับ

สามพจน์แรกของสมการ (2.6) สอดคล้องกับ Green 's strain tensor และพจน์สุดท้ายคือ ความเครียดในแนวแกนเนื่องจากการดัด

เพราะว่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนมีค่าน้อย ดังนั้นสามารถละทิ้งพจน์ที่สองได้ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ใหม่ได้ดังนี้

$$\varepsilon \equiv \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.7)$$

แทน (2.7) ลงใน (2.5) และอินทิเกรตพื้นที่หน้าตัดเราจะได้

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA_e \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + EA_e \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{EA_e}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx \quad (2.8)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} EI(x) &= \int_A Ey^2 dA \\ EA_e &= \int_A EdA = \frac{1}{6} [EA_A + 4EA_M + EA_B] \\ \int_A ydA &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาปัญหาที่การเปลี่ยนตำแหน่งมีค่าน้อย (Small displacement) เมื่อเทียบกับขนาดของโครงสร้างเท่านั้น ดังนั้นพจน์สุดท้ายของสมการ (2.8) มีค่าน้อยสามารถละทิ้งได้และให้

$$P = EA_e \frac{du}{dx} \quad (2.9)$$

ดังนั้นสมการ (2.8) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA_e \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (2.10)$$

เพื่อที่จะสามารถสร้างสถิติเฟนสมเมตริกซ์ได้ เราจำเป็นต้องทำการสมมติลักษณะการกระจายของค่าเปลี่ยนตำแหน่ง u และ v ก่อนดังนี้

$$u = a_0 + a_1x \quad (2.11)$$

$$v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (2.12)$$

จากเงื่อนไขที่จุดต่อคือ

$$u|_{x=0} = d_1, \quad u|_{x=L} = d_4 \quad (2.13)$$

$$v|_{x=0} = d_2, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = d_3, \quad v|_{x=L} = d_5, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = d_6 \quad (2.14)$$

จากนั้นจึงสามารถเขียนสมการลักษณะการกระจายของค่าเปลี่ยนตำแหน่ง u และ v ให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$u(x) = \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{L}) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} (1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}) & (x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}) & (\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}) & (-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

(2.16)

สามารถเขียนในรูปแบบของสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$u(x) = [N_u] \{d_u\} \quad (2.17)$$

$$v(x) = [N_v] \{d_v\} \quad (2.18)$$

โดยที่ N_u และ N_v แทนฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function)
แทนค่า (2.10) และ (2.3) ลงใน (2.1) เราจะได้

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right) EA_e \left(\frac{du}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) EI(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \sum_{i=1}^6 S_i d_i \quad (2.19)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \begin{bmatrix} \frac{dN_u}{dx} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \{d_u\}_{2 \times 1} = [d_u]_{1 \times 2} \left\{ \frac{dN_u}{dx} \right\}_{2 \times 1} \\ \frac{dv}{dx} &= \begin{bmatrix} \frac{dN_v}{dx} \end{bmatrix}_{1 \times 4} \{d_v\}_{4 \times 1} = [d_v]_{1 \times 4} \left\{ \frac{dN_v}{dx} \right\}_{4 \times 1} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \begin{bmatrix} \frac{d^2N_v}{dx^2} \end{bmatrix}_{1 \times 4} \{d_v\}_{4 \times 1} = [d_v]_{1 \times 4} \left\{ \frac{d^2N_v}{dx^2} \right\}_{4 \times 1} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L [d_u] \left\{ \frac{dN_u}{dx} \right\} EA_e \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{d_u\} dx + \frac{1}{2} \int_0^L [d_v] \left\{ \frac{d^2 N_v}{dx^2} \right\} EI(x) \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \{d_v\} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L [d_v] \left\{ \frac{dN_v}{dx} \right\} P \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{d_v\} dx - [d] \{S\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

จากหลักการของค่าสแตชันนารีของพลังงานศักย์รวม (Principle of stationary total potential energy) สภาวะสมดุลเกิดจากการแปรเปลี่ยนอันดับแรกของพลังงานศักย์รวม (π) เท่ากับศูนย์

$$\delta \pi = 0 \quad (2.21)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \frac{dN_u}{dx} \right\} EA_e \left[\frac{dN_u}{dx} \right] dx \{d_u\} + \int_0^L \left\{ \frac{d^2 N_v}{dx^2} \right\} EI(x) \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] dx \{d_v\} \\ & + \int_0^L \left\{ \frac{dN_v}{dx} \right\} P \left[\frac{dN_v}{dx} \right] dx \{d_v\} - \{S\} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\left([k_m] + [k_G] \right) \{d\} = \{S\} \quad (2.23)$$

โดยที่ $[k_m] =$ สติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้นดัดแปลง (Modified linear stiffness)

$$\begin{aligned} & = [k^a] + [k^b] \\ & = \int_0^L \left\{ \frac{dN_u}{dx} \right\} EA_e \left[\frac{dN_u}{dx} \right] dx + \int_0^L \left\{ \frac{d^2 N_v}{dx^2} \right\} EI(x) \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

สามารถเขียนสติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้นดัดแปลงที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย

$$\begin{aligned} \{d\} & = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T \quad \text{ดังนี้} \\ [k_m] & = \begin{bmatrix} a & h & h & -a & h & h \\ & b & c & h & -b & e \\ & & d & h & -c & f \\ & & & a & h & h \\ & & & & b & -e \\ & & & & & g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ค่าคงที่ a, b, c, d, e, f, g และ h สำหรับองค์อาคารมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
 a &= EA_e / L \\
 b &= (12A_1 / L^3 + 6A_2 / L^2 + 24A_3 / 5L) \\
 c &= (6A_1 / L^2 + 2A_2 / L + 7A_3 / 5) \\
 d &= (4A_1 / L + A_2 + 8A_3L / 15) \\
 e &= (6A_1 / L^2 + 4A_2 / L + 17A_3 / 5) \\
 f &= (2A_1 / L + A_2 + 13A_3L / 15) \\
 g &= (4A_1 / L + 3A_2 + 38A_3L / 15) \\
 h &= 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 E &= \text{โมดูลัสยืดหยุ่น} \\
 I &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อย} \\
 L &= \text{ความยาวขององค์อาคาร} \\
 A_e &= \frac{1}{6}[A_A + 4A_M + A_B] \text{ คือ พื้นที่หน้าตัดประสิทธิผล (Effective area)} \\
 A_1 &= EI_A \\
 A_2 &= (1/L)[-3EI_A + 4EI_M - EI_B] \\
 A_3 &= (2/L^2)[EI_A - 2EI_M + EI_B]
 \end{aligned}$$

รายละเอียดของการหาความสัมพันธ์ตามสมการ (2.26) แสดงในภาคผนวก ก

$$\begin{aligned}
 [k_G] &= \text{สติฟเนสเมตริกซ์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต (Geometric stiffness matrix)} \\
 &= \int_0^L \left\{ \frac{dN_v}{dx} \right\} P \left[\frac{dN_v}{dx} \right] dx
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

สามารถเขียนสติฟเนสเมตริกซ์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต ที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T$ ดังนี้

$$[k_G] = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ SYM. & & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

P เป็น + เมื่อเป็นแรงดึง (Tensile axial force)

รายละเอียดของการหาความสัมพันธ์ตามสมการ (2.28) แสดงในภาคผนวก ก

เพราะฉะนั้นสติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคาร เมื่อรวมผลของสติฟเนสเชิงเส้นดัดแปลงเข้ากับ สติฟเนสเมตริกซ์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต เราจะได้

$$[k(d)] = [k_m] + [k_G] \quad (2.29)$$

ซึ่งสามารถเขียนสติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคารที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T$ ได้ดังนี้

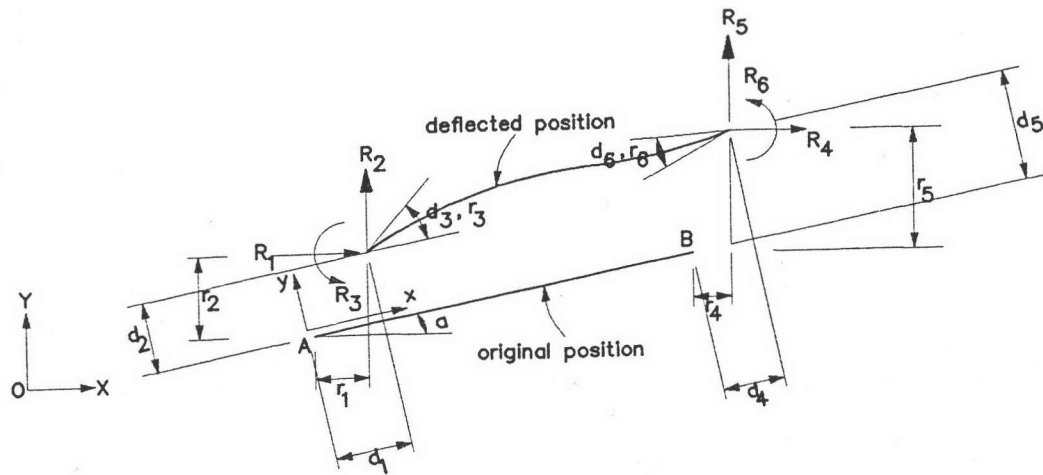
$$[k(d)] \{d\} = \{S\} \quad (2.30)$$

เมื่อ $[k(d)]$ เป็นสติฟเนสเมตริกซ์ขององค์อาคาร
 $\{d\}$ เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง
 $\{S\}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงกระทำ

การรวมสติฟเนส

ในกรณีที่องค์อาคารไม่ได้วางอยู่ในแกนราบหรือระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local coordinate) ไม่ได้วางแกนอยู่ตรงกับแกนของระบบพิกัดในวงกว้าง (Global coordinate) จำเป็นต้องมีการหมุนเพื่อเปลี่ยนตำแหน่ง และ แรงกระทำที่กำหนดซึ่งอยู่ในระบบพิกัดเฉพาะที่ให้อยู่ในระบบ

พิกัดในวงกว้างเสียก่อน การหมุนพิกัดกระทำได้โดยการพิจารณา องค์อาคาร i อยู่ในระนาบ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 องค์อาคารวางในระบบพิกัดในวงกว้าง (Chen and Lui, 1991)

จากรูประบบพิกัดในวงกว้างเป็น XY และระบบพิกัดเฉพาะที่เป็น xy ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดในวงกว้างกับระบบพิกัดเฉพาะที่เป็น

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

เมื่อ

- d_i เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะที่
- r_i เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดในวงกว้าง
- α เป็นมุมระหว่างแกนแนวราบในระบบพิกัดเฉพาะที่กับแกนแนวราบในระบบพิกัดในวงกว้าง

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{d\} = [a]\{r\} \quad (2.32)$$

สมการ (2.32) เป็นความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะที่กับการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดในวงกว้าง ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำในระบบพิกัดเฉพาะที่กับแรงกระทำในระบบพิกัดในวงกว้างได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T \{S\} \quad (2.33)$$

เมื่อ $\{S\}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงในระบบพิกัดเฉพาะที่
 $\{R\}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงในระบบพิกัดในวงกว้าง

ดังนั้นจะสามารถหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบพิกัดในวงกว้างขององค์อาคาร i ได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T [k(d)][a]\{r\}$$

$$\text{หรือ } \{R\} = [K_g]^i \{r\} \quad (2.34)$$

เมื่อ $[K_g]^i$ เป็นสติเฟเนสมเมตริกซ์ขององค์อาคาร i ในระบบพิกัดในวงกว้าง

ถ้าพิจารณาองค์อาคารทั้งหมด n ชั้นส่วนในโครงสร้างจะได้

$$\{R\} = \left(\sum_{i=1}^n [K_g]^i \right) \{r\}$$

$$\text{ให้ } [K] = \left(\sum_{i=1}^n [K_g]^i \right)$$

เมื่อ $[K]$ เป็นสติเฟเนสมเมตริกซ์ของโครงสร้าง

$$\text{จะได้ } \{R\} = [K]\{r\} \quad (2.35)$$

เมตริกซ์ $[K]$ ในสมการ (2.35) จะเป็นซิงกูลาร์ (Singular matrix) เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบวัตถุเกร็ง (Rigid body motion) อยู่ จำเป็นต้องใส่เงื่อนไขขอบเขต(Boundary conditions) เพียงพอที่จะไม่เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุเกร็งจะได้เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ (Non - singular matrix) สามารถแก้สมการได้โดยการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination)

การวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตโดยวิธี นิวตัน - แรพสัน

จากสมการ (2.30) และ (2.35) จะเห็นว่าความสัมพันธ์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจะไม่เป็นเชิงเส้นทั้งองค์อาคารในระบบพิกัดในเฉพาะที่ ตามสมการ (2.30) และในระบบพิกัดในวงกว้างตามสมการ (2.35) การแก้ระบบสมการลักษณะนี้ จำเป็นต้องใช้วิธีทำซ้ำ วิธีการนิวตัน-แรพสันเป็นวิธีการหนึ่งในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น วิธีการจะกระทำดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการ(2.35)สมมติให้ $\{\Psi\}$ เป็นเวกเตอร์เหลือจากการทำซ้ำ ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced force vector, $\{Q\}$) หลักการก็คือกำจัด $\{\Psi\}$ ให้มีค่าเข้าใกล้ $\{0\}$ เพื่อกำจัดค่าแรงคงค้างให้เหลือน้อยที่สุด ซึ่งจะได้

$$\Psi(a_{n+1}^{i+1}) \cong \Psi(a_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)_{n+1}^i \delta a_n^i = 0 \quad (2.36)$$

เมื่อ a ตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน $f(a)$ ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง , $\{r\}$

$f(a)$ ฟังก์ชันของ a ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของแรง, $\{R\}$
เมื่อการทำซ้ำเริ่มที่รอบที่ 1 สมการการทำซ้ำรอบที่ 1 จะเป็น

$$a_{n+1}^1 = a_n \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} = K_T = K \quad (2.38)$$

เมื่อ K_T เป็นความชันของฟังก์ชัน $f(a)$

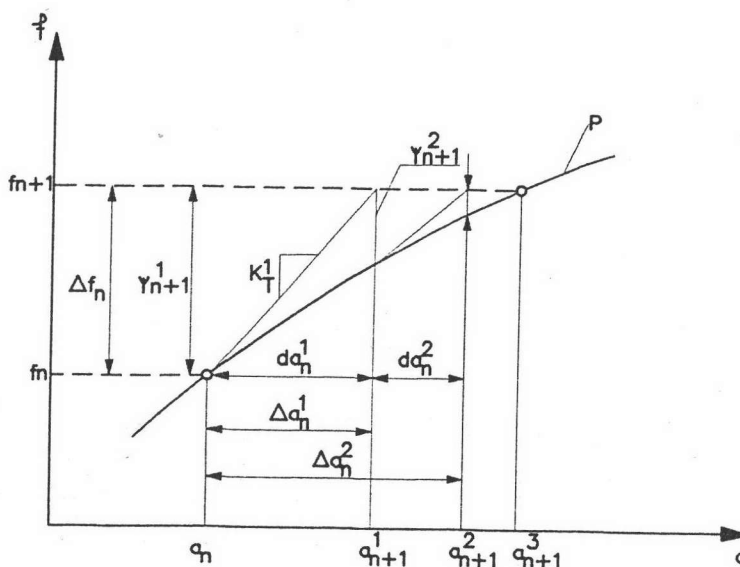
ถ้าเขียนในรูปการทำซ้ำหลาย ๆ ครั้งจะได้

$$K_T^i da_n^i = -\Psi_{n+1}^i \tag{2.39}$$

$$da_n^i = -(K_T)^{-1} \{\Psi\}_{n+1}^i \tag{2.40}$$

$$a_{n+1}^{i+1} = a_n + \Delta a_n^i = a_{n+1}^i + da_n^i \tag{2.41}$$

$$\Delta a_n^i = \sum_{k=1}^i da_n^k \tag{2.42}$$



รูปที่ 2.6 การวิเคราะห์ห่ออันดับที่สองโดยใช้วิธีนิวตัน - แรพสัน (Zienkiewicz and Taylor,1991)

ในกรณีที่ต้องการกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง แรงกระทำ R และ การเปลี่ยนตำแหน่ง r ทั้งเส้นสามารถกระทำได้ด้วยวิธีเพิ่มทีละขั้น (Chajes and Churchill , 1987) โดยการแบ่งแรงกระทำออกเป็นช่วง ๆ และประยุกต์ใช้วิธีทำซ้ำ นิวตัน - แรพสัน ในแต่ละช่วงของการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำ เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งที่สัมพันธ์กับแรงกระทำนั้น

การวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด

จากหลักการที่ว่าความสอดคล้องของความเครียด (Strain compatibility) และหลักการสมดุลของแรง (Equilibrium of force) เพื่อหาสตีฟเนสที่เปลี่ยนไปของหน้าตัด ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้ (Bakoss,Gilbert and Pulmano,1983)

1. กำหนดค่าความเครียดเริ่มต้นที่ผิวด้านรับแรงอัดของคอนกรีต (ε_c) ดังนี้

$$\varepsilon_c = \frac{M \times t}{2E_c I} + \frac{P}{E_c A} \quad (2.43)$$

2. กำหนดค่าความลึกของแนวแกนสะเทิน (Neutral axis , kd) โดยใช้วิธีเพิ่มทีละขั้น
3. คำนวณค่าแรงในแนวแกนของคอนกรีตและเหล็ก

จากรูปที่ 2.1 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของคอนกรีตที่คิดผลของเหล็กปลอกรัตรอบแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular hoops) ที่เสนอโดย Baker and Amarokone ,1964 ซึ่งเหมาะสำหรับคอนกรีตที่มี $f'_c \leq 500$ ksc. ดังสมการที่แสดงต่อไปนี้

หน่วยแรงอัดของคอนกรีต :

$$\begin{aligned} f_c &= f'_c \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] && ; 0 \leq \varepsilon \leq 0.002 \\ &= f'_c && ; 0.002 \leq \varepsilon \leq 0.0035 \\ &= E_c \varepsilon && ; \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

เมื่อ $\varepsilon_0 = 0.002$

หน่วยแรงดึงของคอนกรีต :

$$f_c = E_c \varepsilon \quad ; \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq 0 \quad (2.45)$$

จากสมมติฐานที่กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัดและให้คอนกรีตสามารถรับแรงดึงได้ไม่เกินหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคอนกรีตตาม ACI Committee 318 ซึ่งกำหนดให้หน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคอนกรีตมีค่าเท่ากับ $f_r = 1.98\sqrt{f'_c}$ ดังนั้นความเครียดสูงสุดที่ยอมให้ของคอนกรีตเนื่องจากแรงดึงมีค่าเท่ากับ $\varepsilon_r = -f_r/E_c$

คำนวณแรงเนื่องจากคอนกรีต

$$C = \frac{bkd}{\varepsilon_c} \int_{\varepsilon} f_c d\varepsilon \quad (2.46)$$

แทนค่า f_c จากสมการ (2.44) และ (2.45) จะได้ค่าแรงในคอนกรีตสำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง b และมีความลึก t ดังนี้

แรงอัดในแนวแกนของคอนกรีต (C_c) :

$$\begin{aligned}
 C_c &= C_{c1} \\
 &= \frac{bf'_c \varepsilon_c (kd)}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{\varepsilon_c}{3\varepsilon_0} \right] && ; 0 \leq \varepsilon_c \leq 0.002 \\
 C_c &= C_{c1} + C_{c2} \\
 &= \frac{bf'_c (0.002)^2}{\varepsilon_0 \phi} \left[1 - \frac{0.002}{3\varepsilon_0} \right] + bf'_c \frac{(\varepsilon - 0.002)}{\phi} && ; 0.002 \leq \varepsilon_c \leq 0.0035
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

โดยที่ $\phi = \frac{\varepsilon_c}{kd}$

ε_c คือ ความเครียดที่ผิวรับแรงอัดของคอนกรีต

แรงดึงในแนวแกนของคอนกรีต (C_t) :

$$\begin{aligned}
 C_t &= \frac{-bE_c \varepsilon_t^2}{2\phi} && ; \varepsilon_{tr} \leq \varepsilon_t \leq 0 \\
 &= 0 && ; \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tr}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

โดยที่ ε_t คือ ความเครียดที่ผิวรับแรงดึงของคอนกรีต

และจากรูปที่ 2.2 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของเหล็กเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกโดยสมมุติ กำหนดให้

หน่วยแรงอัดของเหล็ก :

$$\begin{aligned}
 f_s &= E_s \varepsilon_s && ; 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\
 &= f_y && ; \varepsilon_s \geq \varepsilon_y
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

หน่วยแรงดึงของเหล็ก :

$$\begin{aligned}
 f_s &= E_s \varepsilon_s && ; -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 0 \\
 &= -f_y && ; \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

โดยที่ ε_s คือ ความเครียดของเหล็ก

ε_y คือ ความเครียดคดฉากของเหล็ก

จากค่าหน่วยแรงสามารถเปลี่ยนเป็นแรงได้ดังนี้

$$\text{ผลรวมของแรงอัดและแรงดึงในแนวแกนของเหล็ก (St)} : St = \sum_{i=1}^n A_s f_s \tag{2.51}$$

จากสมดุลของแรงในแนวแกนจะได้

$$C_c + C_t + St = P_i \tag{2.52}$$

ถ้าแรง P_i เท่ากับ P ที่ได้จากการวิเคราะห์หือลาสติกอันดับที่สองให้ทำขั้นตอนที่ 4 ต่อไป แต่ถ้าไม่เท่าให้เพิ่มค่า kd จนกระทั่ง P_i เท่ากับ P

4. คำนวณระยะจากแกนสะเทินถึงจุดศูนย์กลางของแรงของคอนกรีต

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= kd \left[\frac{8\varepsilon_0 + 3\phi(kd)}{12\varepsilon_0 - 4\phi(kd)} \right] \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{2} \left[kd - \left(\frac{0.002}{\phi} \right) \right] \\ \bar{x}_t &= \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{tr}}{\phi}\end{aligned}\quad (2.53)$$

5. จากรูปที่ 2.7 สามารถคำนวณโมเมนต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}M_i &= C_{c1}\bar{x}_1 + C_t\bar{x}_t + \sum_{i=1}^n A_s f_s (d - kd) - P(kd - c) \quad ; 0 \leq \varepsilon_c \leq 0.002 \\ &= C_{c1}\bar{x}_1 + C_{c2}\bar{x}_2 + C_t\bar{x}_t + \sum_{i=1}^n A_s f_s (d - kd) - P(kd - c) \quad ; 0.002 \leq \varepsilon_c \leq 0.0035\end{aligned}\quad (2.54)$$

เปรียบเทียบค่าโมเมนต์ M_i ที่ได้จากการวิเคราะห์หน้าตัดกับโมเมนต์ M ที่ได้จากการวิเคราะห์หือลาสติกอันดับที่สอง ถ้าเท่ากันแสดงว่าการกระจายความเครียด (Strain distribution) นั้นถูกต้องแล้ว แต่ถ้า M_i มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า M ดังนั้น ความเครียดที่ผิวรับแรงอัดต้องถูกลดหรือเพิ่ม โดยกลับไปทำข้อ 1 ซ้ำอีกจนได้ความสมดุลของแรง P และ M

6. คำนวณค่าสติฟเนสสัมพัทธ์ใหม่ได้โดย (EI - Metwally and Chen, 1989)

6.1 สติฟเนสสัมพัทธ์ทางแนวแกน อาศัยหลักการของ Central difference เราสามารถคำนวณหาค่าได้ดังนี้

$$EA = \Delta P / \Delta \varepsilon = (P_2 - P_1) / \Delta \varepsilon \quad (2.55)$$

โดยที่ P_1 และ P_2 คือ แรงในแนวแกนที่สอดคล้องกับความเครียด $[\varepsilon_m - (1/2)\Delta\varepsilon]$ และ $[\varepsilon_m + (1/2)\Delta\varepsilon]$ ตามลำดับโดยที่ค่าความโค้งคงที่ ε_m คือ ความเครียดจากแรงในแนวแกน ณ สภาวะที่น้ำหนักบรรทุกกระทำขณะนั้น $\Delta\varepsilon$ คือ ผลต่างของความเครียดโดยกำหนดให้มีค่าน้อย ๆ เช่น 1×10^{-5}

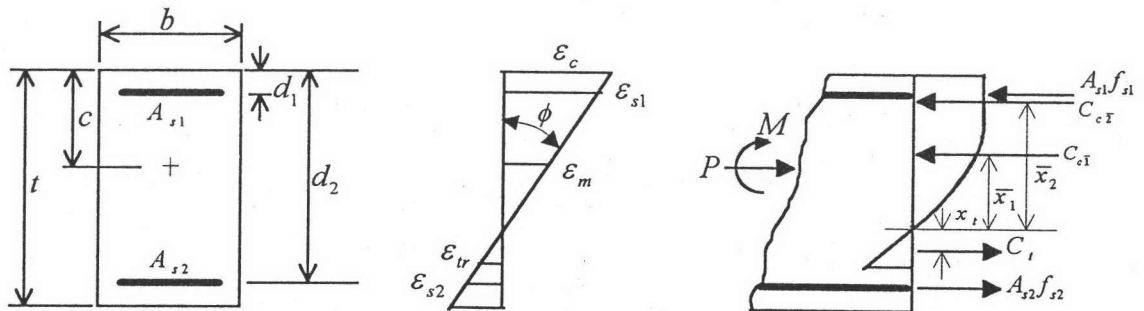
6.2 สถิติในสลิ้มมีทิศทางแรงดัด อาศัยหลักการของ Central difference เราสามารถคำนวณหาค่าได้ดังนี้

$$EI = \Delta M / \Delta \phi = (M_2 - M_1) / \Delta \phi \quad (2.56)$$

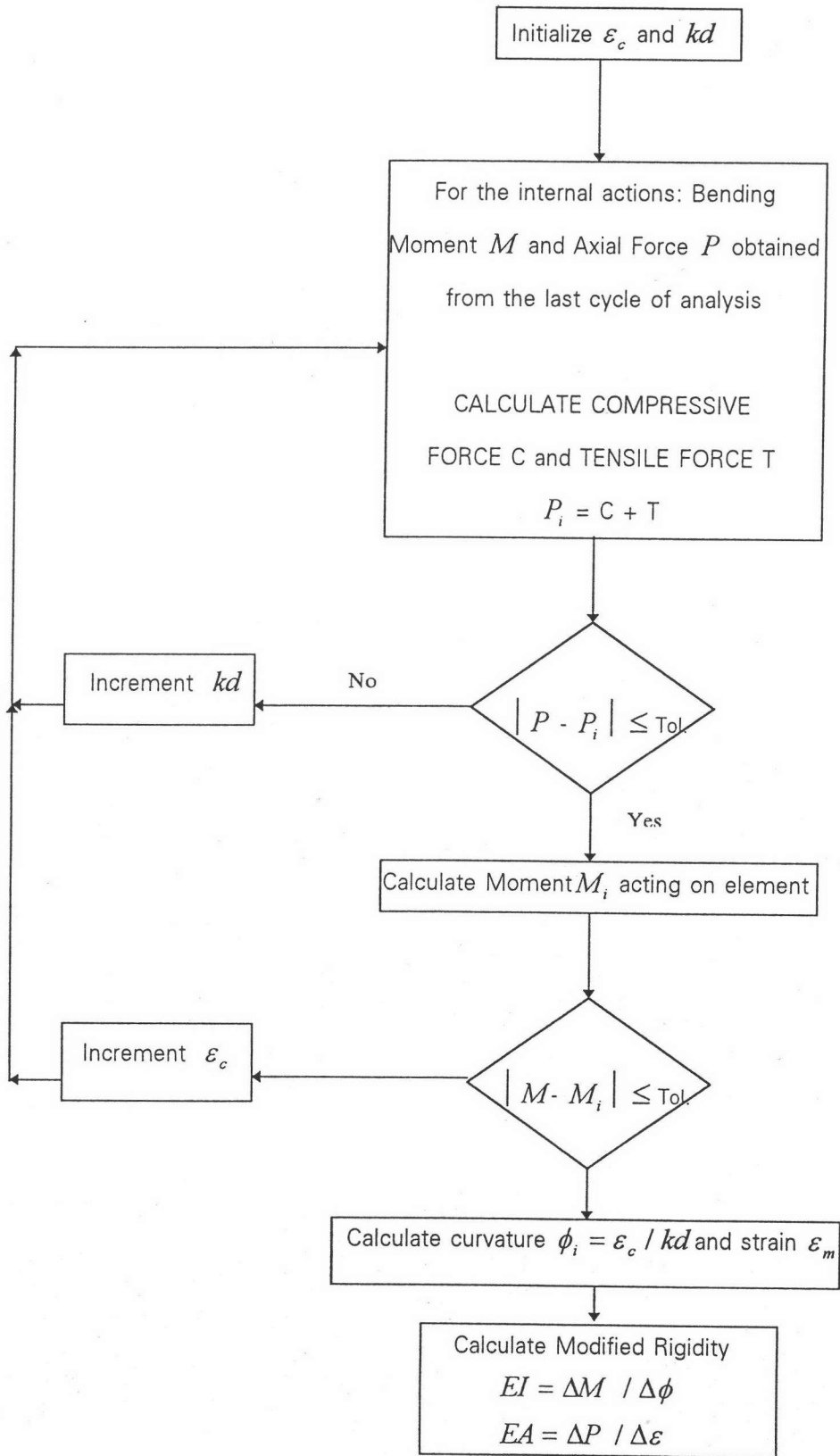
โดยที่ M_1 และ M_2 คือ โมเมนต์ที่สอดคล้องกับความโค้ง $[\phi - (1/2)\Delta\phi]$ และ $[\phi + (1/2)\Delta\phi]$ ตามลำดับโดยที่ค่าความเครียดของแรงในแนวแกนมีค่าคงที่

ϕ คือ ความโค้ง ณ สภาวะที่น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำขณะนั้น

$\Delta\phi$ คือ ผลต่างของความโค้งโดยกำหนดให้มีค่าน้อย ๆ เช่น 1×10^{-5}



รูปที่ 2.7 แสดงการกระจายความเครียด-การกระจายหน่วยแรงของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก

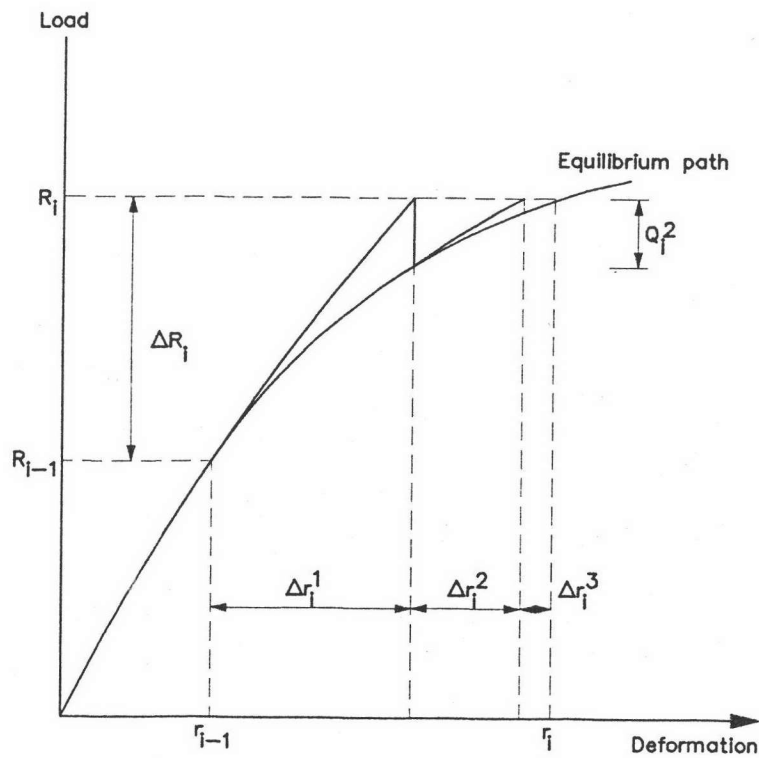


Tol.= pre-defined
permissible error

รูปที่ 2.8 แผนผังแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด

สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าความเค้นของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยคำนึงถึงผลของการแตกร้าว

จากวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างตามหัวข้อที่กล่าวผ่านมาเป็นการวิเคราะห์หาค่าความเค้นของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยคำนึงถึงผลของการแตกร้าว หากจะทำการปรับปรุงเพื่อให้วิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กได้ถูกต้องมากขึ้นก็จำเป็นที่จะต้องมีการปรับปรุง โดยรวบรวมขั้นตอนการวิเคราะห์หน้าตัดและการวิเคราะห์หาค่าความเค้นของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กเข้าด้วยกัน แสดงได้ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การวิเคราะห์หาค่าความเค้นของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก (Chen and Lui ,1991)

ขั้นตอนการวิเคราะห์จะกระทำดังนี้

1. ที่ขั้นตอนใด ๆ ที่น้ำหนักบรรทุกทุกมีค่าเป็น R_{i-1} หาแรงภายในของชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนที่ละชิ้นส่วน
2. นำผลของแรงภายในที่ได้ไปปรับปรุงค่าสตีเฟนของชิ้นส่วน

3. ทำการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสสัมพัทธ์ของโครงสร้างโดยวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง
4. เพิ่มน้ำหนักบรรทุกทุกชั้นเป็น R_i
5. ทำการวิเคราะห์ด้วยอีลาสติคอันดับที่สองโดยการกำจัดแบบเกาส์เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายใน แล้วหาผลต่างระหว่างแรงภายในชั้นตอนที่ $i-1$ และ ชั้นตอนที่ i ได้เวกเตอร์ของแรงคงค้างในการทำซ้ำรอบแรก
6. คำนวณค่ายูคลีเดียมนอร์มของเวกเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced force vector) โดยคำนวณได้จากสมการ (Bathe and Wilson, 1976)

$$\|Q\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} \quad (2.57)$$

เมื่อ $\|Q\|_e =$ ยูคลีเดียมนอร์มของเวกเตอร์ $\{Q\}$
 $q_i =$ สมาชิกของเวกเตอร์ $\{Q\}$
 $n =$ จำนวนของดีกรีของความอิสระ

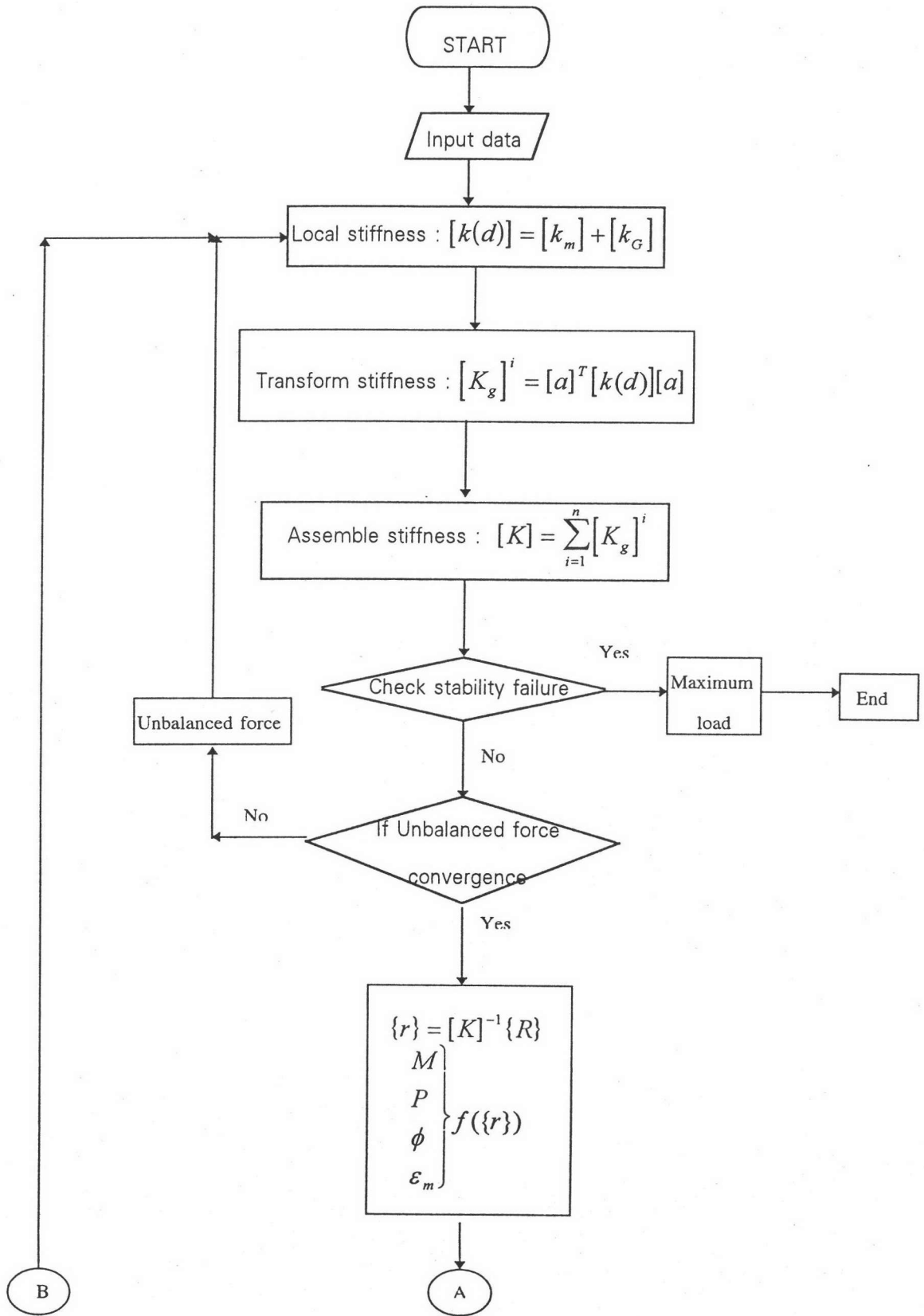
7. เปรียบเทียบค่ายูคลีเดียมนอร์มของแรงคงค้างกับยูคลีเดียมนอร์มของแรงเริ่มต้นโดยงานวิจัยนี้ใช้เงื่อนไขการลู่ออกค่าตอบดังนี้ (Zienkiewics and Taylor, 1991)

$$\|Q\|_e \leq \frac{0.1}{100} \|\Delta R\|_e \quad (2.58)$$

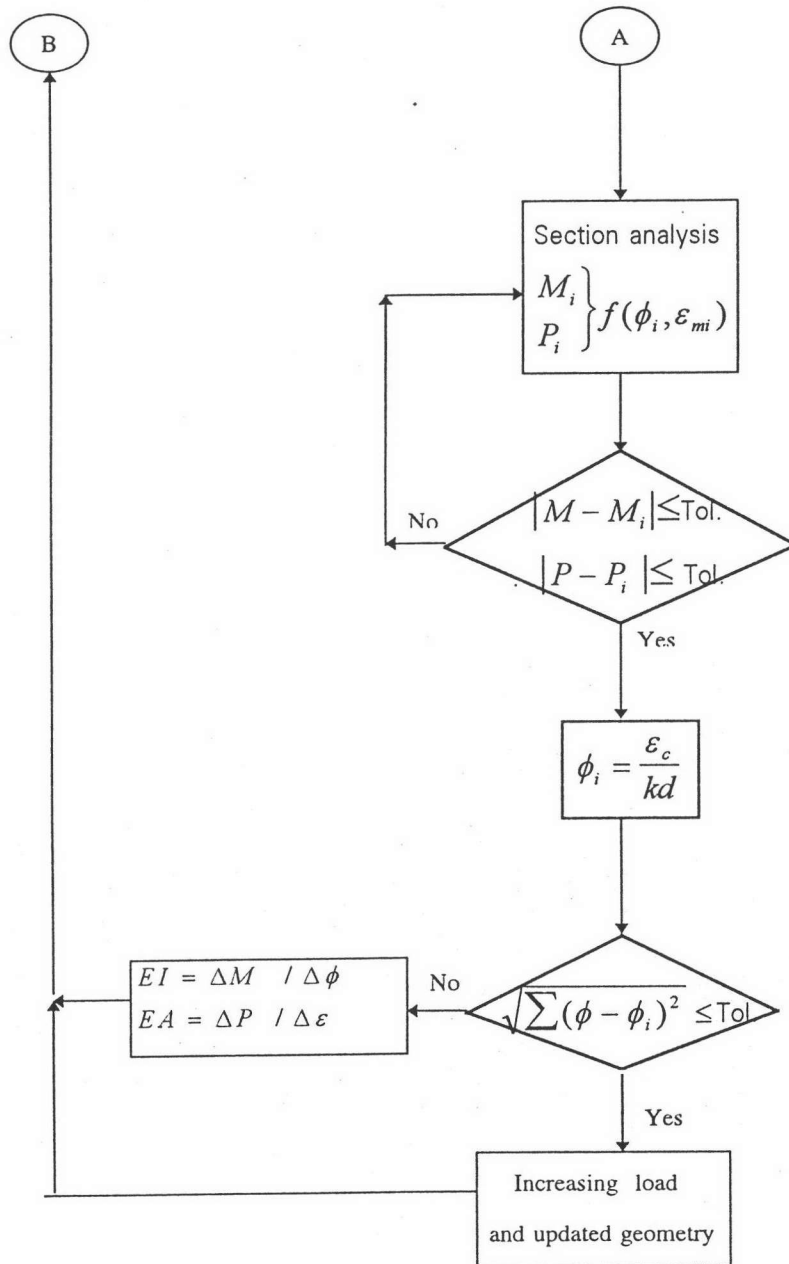
หากค่ายูคลีเดียมนอร์มของแรงคงค้างเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.58) ก็จะทำในชั้นตอนที่ 8 ต่อไป แต่ถ้าหากค่ายูคลีเดียมนอร์มไม่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.58) จะต้องกระทำในชั้นตอนที่ 1 ถึง 7 ใหม่โดยให้เวกเตอร์ของแรงกระทำคือเวกเตอร์ของแรงคงค้าง

8. จากวิธีการวิเคราะห์หน้าตัด คำนวณหาความโค้ง (Curvature) ในแต่ละหน้าตัดที่ทำให้ค่าของแรงในแนวแกนและโมเมนต์ที่สอดคล้องกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์อีลาสติคอันดับที่สอง แล้วเปรียบเทียบค่าความโค้งที่ได้กับรอบการคำนวณที่แล้ว ถ้าเท่ากันก็ทำในชั้นตอนที่ 9 ต่อไป แต่ถ้าไม่เท่ากันจะต้องปรับปรุงค่าสติฟเนสทางแนวแกนและสติฟเนสทางแรงดัดใหม่ดังสมการ (2.55) และ (2.56) ตามลำดับ จากนั้นกลับไปทำในชั้นตอนที่ 1 ถึง 8 ใหม่

9. คำนวณหาตำแหน่งจุดต่อที่เปลี่ยนไปของโครงสร้าง เพื่อเป็นตำแหน่งอ้างอิงทางเรขาคณิตของโครงสร้างใหม่แล้วทำการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น R_{i+1} เป็นขั้นตอนถัดไป
10. หลังจากการกำจัดแบบเกาส์ของส่วนเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างทุกครั้งจะต้องทำการตรวจสอบเสถียรภาพของโครงสร้างโดยการตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง ถ้าโครงสร้างมีเสถียรภาพค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สติฟเนสจะมีค่ามากกว่าศูนย์ แต่ถ้าหากค่าดีเทอร์มิแนนท์น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โครงสร้างจะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งเสถียรภาพของโครงสร้างจะหมดไป



รูปที่ 2.10 แสดงแผนภูมิขั้นตอนการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้



รูปที่ 2.10(ต่อ) แสดงแผนภูมิขั้นตอนการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้