บทที่ 2

ทฤษฎีและความเป็นมาเกี่ยวกับการกรอง

2.1 <u>กลไกในการกรอง [Mechanisms of filtration]</u>

เครื่องกรอง [Filter] เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายอนุภาคของสารกระจาย (Disperse Phase) เข้ามาไว้บนตัวกลางหรือมาไว้ที่ช่องว่างระหว่างตัวกลาง ปรากฏการณ์นี้แบ่งออกได้เป็น 3 ขั้นตอน คือ

2.1.1) การส่งถ่าย [Transport] เป็นการส่งถ่ายอนุภาคของสารกระจายเข้าสัมผัสกับตัวกลางซึ่งอยู่นิ่ง ๆ

2.1.2 กลไกการจับอนุภาค [Attachment] เป็นการทำให้อนุภาคของสารกระจายเกาะติดอยู่กับตัวกลาง หรือสิ่งที่ติดอยู่บนตัวกลางก่อนแล้ว

2.1.3) การหลุดออกจากตัวกลาง [Detachment] เป็นการที่อนุภาคของสารกระจายที่เกาะติดกับตัวกลาง หรือสิ่งที่ติดอยู่บนตัวกลางก่อนแล้วเกิดการหลุดออกจากตัวกลาง

2.1.1) <u>การส่งถ่ายอนุภาคเข้ามาสัมผัสกับตัวกลาง</u> กลไกการส่งถ่ายสารกระจายเข้ามาสัมผัสกับตัวกลาง มีความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับ

1) คุณสมบัติและลักษณะของสารแขวนลอย (ขนาด ความหนาแน่น และรูปร่าง)

2) คุณสมบัติและลักษณะของการไหลของสารต่อเนื่อง (ความเร็ว ความหนืด และอุณหภูมิ)

3) คุณสมบัติและลักษณะของตัวกลาง (พื้นที่ผิว ช่องว่างระหว่างตัวกลาง รูปร่าง และขนาด)

จากลักษณะและคุณสมบัติดังกล่าว พอจะสรุปได้ดังนี้

1.1.1) <u>การส่งถ่ายด้วยการแพร่กระจาย</u> (Brownian Diffusion) เกิดขึ้นเนื่องจากการไหลอย่างไม่คงตัวของสารต่อเนื่องและทำให้อนุภาคของสารกระจายเกิดการเบี่ยงเบนไปจากแนวของกระแสน้ำ จนเข้าไปสัมผัสกับตัวกลางในทุกทิศทาง การส่งถ่ายด้วยการแพร่กระจายจะมีความสำคัญเมื่อขนาดของอนุภาคของสารกระจาย มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเล็กกว่า 1 ไมครอน เนื่องจากอนุภาคของสารกระจายขนาดเล็ก ๆ จะไวต่อการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียน (Brownian Movement) ดังรูปที่ 2.1

ประสิทธิภาพในการส่งถ่ายด้วยการแพร่กระจาย (N_D) สามารถหาได้ด้วยสมการ

$$N_D = 0.9\left[\frac{K_B T}{d_E d_P \mu V}\right]^{2/3} \quad \text{....................(2.1.1)}$$

โดยที่ K_B = ค่าคงที่ของโบลซมานน์ (Boltzmann's constant)

= $1.38048 * 10^{-16}$ Erg/K

T = อุณหภูมิสมบูรณ์ (Absolute Temperature)

μ = ความหนืด

d_E = เส้นผ่าศูนย์กลางของอนุภาคของสารกระจาย

d_P = เส้นผ่าศูนย์กลางของตัวกลาง

V = ความเร็วในการไหลของสารกระจายผ่านตัวกลาง

จากสมการ 2.1.1 จะเห็นได้ว่าประสิทธิภาพในการส่งถ่ายด้วยการแพร่กระจายจะมีค่าสูง เมื่อความเร็วในการไหลผ่านมีค่าต่ำ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของตัวกลางที่ใช้และอนุภาคของสารกระจายมีขนาดเล็ก

1.1.2) <u>การส่งถ่ายด้วยการปะทะโดยตรง</u> (Direct Interception) เกิดขึ้นโดยการที่อนุภาคของสารกระจายปะทะกับตัวกลางโดยตรงในขณะที่ผ่านช่องว่างขนาดเล็กของตัวกลาง ดังรูปที่ 2.1 ประสิทธิภาพในการส่งถ่ายด้วยการปะทะโดยตรง (N_I) สามารถหาได้ด้วยสมการ

$$N_I = \frac{3}{2}(d_E/d_P)^2 \quad \text{......................(2.1.2)}$$

จากสมการ 2.1.2 จะเห็นได้ว่าประสิทธิภาพของการปะทะโดยตรง จะขึ้นอยู่กับขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของตัวกลาง และของอนุภาคของสารกระจาย ส่วนอัตราการไหลของสารกระจาย มีผลต่อประสิทธิภาพของกลไกนี้น้อยมาก

1.1.3) <u>การส่งถ่ายด้วยการตกตะกอน</u> (Sedimentation) เกิดขึ้นโดยการที่อนุภาคของสารกระจายตกตะกอนบนผิวของตัวกลาง เนื่องจากอนุภาคของสารกระจาย มีขนาดเล็กกว่าช่องว่างระหว่างตัวกลาง ประสิทธิภาพในการตกตะกอน (N_s) สามารถหาได้ด้วยสมการ

$$N_s = \frac{(\rho_s - \rho) g d_p^2}{\mu v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.3)$$

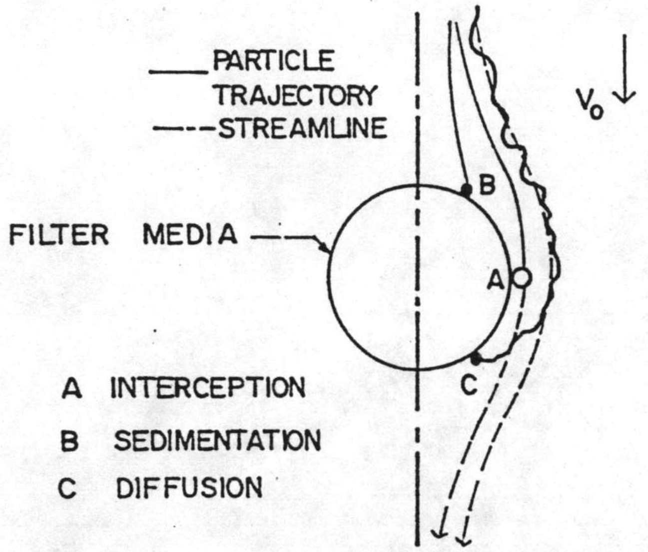
= ความหนาแน่นของอนุภาคของสารกระจาย

= ความหนาแน่นของสารต่อเนื่อง

จากสมการที่ 2.1.3 จะเห็นได้ว่าประสิทธิภาพในการตกตะกอนขึ้นอยู่กับอัตราการไหลของสารต่อเนื่อง และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของตัวกลาง

ประสิทธิภาพในการส่งถ่ายรวม (N_T) สามารถหาได้โดยการรวมประสิทธิภาพในการส่งถ่ายทั้ง 3 อย่าง ดังสมการ

$$N_T = N_D + N_I + N_S$$



<u>รูปที่ 2.1</u> กลไกในการเคลื่อนย้ายอนุภาคของสารกระจายในสารต่อเนื่องเข้าหาสารกรอง

จากสมการที่ 2.1.1 , 2.1.2 และ 2.1.3 จะเห็นได้ว่าขนาดและการกระจายขนาด (Size Distribution) ของอนุภาคของสารกระจายมีความสำคัญต่อกลไกการส่งถ่ายเป็นอย่างมาก ดังรูปที่ 2.1 กล่าวคือเมื่อสารแขวนลอยเล็กกว่า 1 ไมครอน ประสิทธิภาพของการส่งถ่ายจะแปรผกผันกับขนาด นั่นคือการแพร่กระจายทำให้สารขนาดเล็กเคลื่อนที่ได้มากกว่า และมีโอกาสวิ่งเข้าหาตัวกลางได้มากกว่าสารขนาดใหญ่ แต่เมื่อสารแขวนลอยมีขนาดใหญ่กว่า 1 ไมครอน จะมีการแพร่กระจายในระดับโมเลกุลน้อยมากจนไม่มีนัยสำคัญ ขนาดและน้ำหนักของอนุภาคของสารกระจายจะเข้ามามีบทบาทสำคัญ ในการสร้างกลไกแบบตกตะกอน (Sedimentation) และกลไกการปะทะโดยตรง (Direct Interception) ดังนั้นประสิทธิภาพในการเคลื่อนย้ายจึงแปรตรงกับขนาดของอนุภาคของสารกระจาย ดังรูปที่ 2.2 ทั้งนี้เนื่องจากสารขนาดใหญ่มีน้ำหนักมาก และมีปริมาตรมากจึงตกตะกอนหรือติดค้างตัวกลางได้ง่าย จะเห็นได้ว่าสารแขวนลอยที่มีขนาดประมาณ 1 ถึง 5 ไมครอน กรองออกได้ยากกว่าขนาดอื่น

2.1.2) <u>กลไกการจับอนุภาคของสารกระจาย</u> กลไกการจับอนุภาคของสารกระจายเกิดขึ้นได้หลายกรณี คือ

2.1.2.1 การดักอนุภาค (Straining)

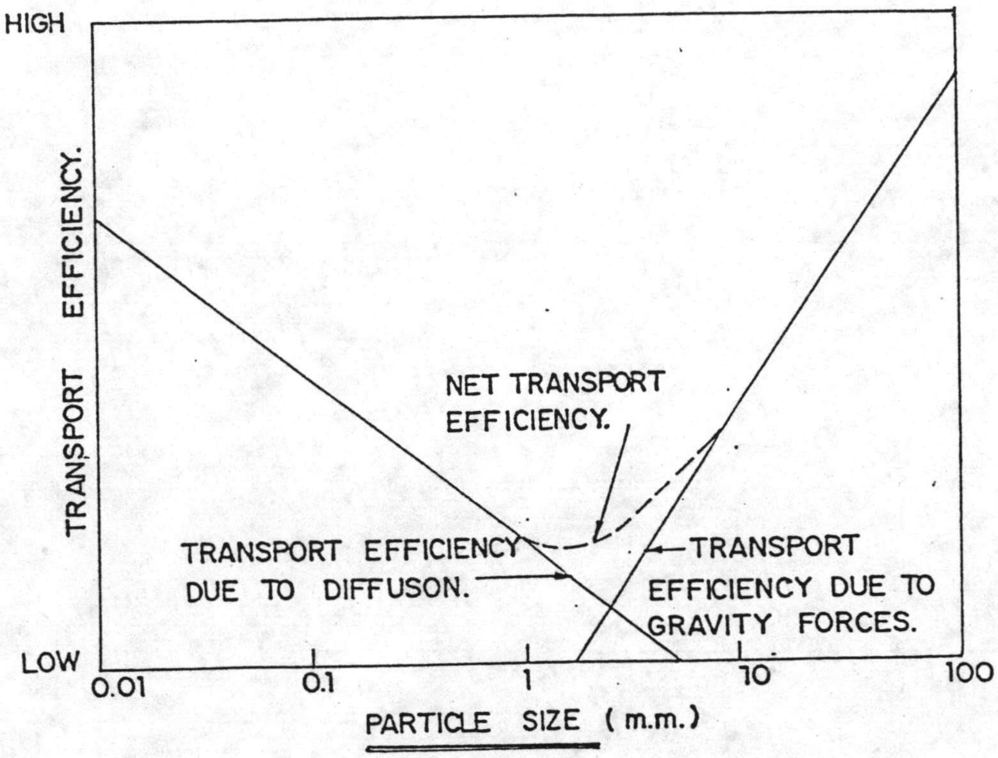
2.1.2.2 การตกตะกอน (Sedimentation)

2.1.2.3 การจับยึด (Adhesion)

2.1.2.4 การดูดติดผิว (Adsorption)

2.1.2.5 การทำลายประจุ (Charge Neutralization)

อนุภาคขนาดใหญ่สามารถแยกออกจากสารกระจายได้ เนื่องจากการตกตะกอนและการเกาะติดอยู่บนตัวกลาง หรืออาจตกค้างอยู่ในช่องว่างระหว่างตัวกลางอย่างไรก็ตามอนุภาคขนาดเล็กหรือคอลลอยด์ ก็สามารถแยกออกจากสารต่อเนื่องได้ เช่นเดียวกันแสดงว่ากลไกทางกายภาพอย่างเดียวไม่น่าจะทำได้ ดังนั้นการแยกอนุภาคขนาดเล็กหรือคอลลอยด์ต้องอาศัยกลไกการดูดติดผิว และการทำลายประจุไฟฟ้าของคอลลอยด์ให้เป็นกลาง การดูดติดผิวเป็นกลไกสำคัญที่ทำให้คอลลอยด์สามารถเกาะจับอยู่บนตัวกลาง หรือบนสิ่งอื่นที่จับบนตัวกลางอยู่ก่อนแล้ว อย่างไรก็ตามตัวกลางและคอลลอยด์มักมีประจุลบทั้งคู่ จึงต้องมีการทำลายประจุไฟฟ้าของสารตัวใดตัวหนึ่งก่อน หรือของทั้งคู่เพื่อมิให้เกิดแรงผลักระหว่างประจุเดียวกัน



<u>รูปที่ 2.2</u> ประสิทธิภาพในการเคลื่อนย้ายอนุภาคของสารกระจายขึ้นอยู่กับขนาดของอนุภาค

จากที่กล่าวมาแล้วพอสรุปได้ว่า การแยกอนุภาคขนาดใหญ่และขนาดเล็กของสารกระจายออกจากสารต่อเนื่องด้วยการกรอง อาศัยกลไก 2 ชุด ซึ่งแตกต่างกัน อนุภาคขนาดใหญ่สามารถตกตะกอนบนตัวกลาง หรือติดค้างอยู่ในช่องว่างระหว่างตัวกลาง ส่วนอนุภาคขนาดเล็กหรือคอลลอยด์ต้องอาศัยแรงที่เกิดจากการแพร่กระจาย (Diffusion Force) และอาศัยกลไกในการดูดติดผิว ซึ่งมีการทำลายประจุลบให้เป็นกลาง และหรือเปลี่ยนประจุลบให้เป็นบวก เป็นกลไกในการแยกออกจากสารกระจาย

2.1.3 <u>การหลุดออกจากตัวกลาง</u> อนุภาคของวัฏภาคกระจายที่เกาะอยู่บนตัวกลางหรือเกาะอยู่ที่สิ่งที่ติดอยู่บนตัวกลางก่อนแล้ว เกิดการหลุดออกจากตัวกลางได้เนื่องจากมีตะกอนบางส่วนเกาะจับอย่างหลวม ๆ บนตัวกลาง เมื่อชั้นตัวกลางมีความฝืดเพิ่มขึ้นหรืออุดตันมากขึ้น แรงที่เกิดจากการไหลของ

สารต่อเนื่องจะมีค่าสูงไปด้วย ทำให้ตะกอนหลุดออกจากตัวกลางได้หรืออาจเกิดขึ้นเนื่องจากพื้นที่ว่างบนตัวกลางถูกใช้ไปจนเกือบหมด ทำให้อนุภาคของสารกระจายมีโอกาสเกาะติดผิวตัวกลางได้น้อย การรั่วของอนุภาคจากชั้นกรองจึงมีมาก

2.2 ปัจจัยที่มีผลต่อการกรอง

ในอดีตที่ผ่านมา ได้มีผู้ทำการวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับผลกระทบต่าง ๆ ที่จะมีผลต่อการกรอง พอจะสรุปได้ดังนี้

2.2.1) ผลกระทบของอัตราการกรอง

Hudson (4) รายงานว่าการที่จะได้ค่าอัตราการกรองที่เหมาะสมสำหรับเครื่องกรองนั้น ต้องพิจารณาค่าต่าง ๆ ดังนี้

1.1 คุณภาพของน้ำที่ผ่านการกรอง

1.2 ลักษณะและคุณสมบัติของน้ำที่จะผ่านเครื่องกรอง

1.3 ขนาดตัวกลางของเครื่องกรอง

1.4 ความลึกและเงื่อนไขต่าง ๆ ของชั้นกรอง

Cleasby & Baumann (10) เสนอแนะว่าอัตราการกรองนั้นขึ้นอยู่กับประเภทของอนุภาคของสารกระจายที่ต้องการจะกรอง และการเตรียมการสำหรับน้ำดิบที่ต้องการจะกรอง

จากการทดลองที่ทำโดยใช้ทั้งถ่านแอนทราไซต์และทรายเป็นตัวกลางในการกรอง สรุปได้ว่านอกจากผลกระทบของอัตราการกรองและความขุ่นของน้ำดิบที่จะกรอง ที่มีผลต่อคุณภาพของน้ำที่ผ่านการกรองแล้ว ยังขึ้นอยู่กับขนาดของตัวกลาง และความพรุนของชั้นตัวกลาง

2.2.2) ผลกระทบของคุณภาพน้ำที่ต้องการจะกรอง

Ives & Oregory (5) เสนอแนะว่ากลไกในการส่งถ่ายของอนุภาคของสารกระจายเข้ากระทบกับตัวกลาง ขึ้นอยู่กับการเดินทางของอนุภาค อนุภาคที่มีขนาดต่างกันจะมีเส้นการเดินทางเข้ากระทบที่แตกต่างกัน

ออกไป Yao (16), Habiban & O'Melia (23) พบว่าอนุภาคที่มีขนาด 1 ไมครอน จะเป็นอนุภาคที่กรองได้ยากที่สุด

Mints (20) และผู้ร่วมงานได้เน้นถึงความสำคัญของการเตรียมเคมีของน้ำก่อนการกรองที่จะให้ได้ผล ต้องมีการเติมปริมาณที่เหมาะสมของสารโคแอกกูแลนท์ (Coagulant) ผลการทดลองของ Mints และผู้ร่วมงานนำไปสู่การใช้งานของคอนแทคฟิลเตอร์ (Contact Filters) ซึ่งเป็นการเติมสารโคแอกกูแลนท์โดยตรงเข้ากับเครื่องกรอง

Jchobanoglons & Jrusdale (15) ได้แสดงถึงความจำเป็นของขบวนการทางเคมีเพื่อที่จะให้เกิดการโคแอกกูเลชั่น และการทำลายเสถียรภาพก่อการกรอง

2.2.3) <u>ผลกระทบของคุณสมบัติของตัวกลาง</u>

Hudson (10) รายงานว่าความสามารถของเครื่องกรองในการกำจัดความขุ่นขึ้นอยู่กับขนาดของตัวกลาง และความพรุนของชั้นตัวกลาง และยังชี้ให้เห็นด้วยว่าความสามารถในการกำจัดความขุ่น เป็นปฏิภาคกลับกับขนาดของตัวกลาง คือถ้าตัวกลางมีขนาดใหญ่จะทำให้ความสามารถในการกรองต่ำ

จากผลการวิจัยได้เสนอแนะว่าความหนาของชั้นตัวกลางมีความสำคัญคือ ชั้นตัวกลางที่หนาจะมีประสิทธิภาพการกรองที่สูงกว่าชั้นตัวกลางที่บางกว่า

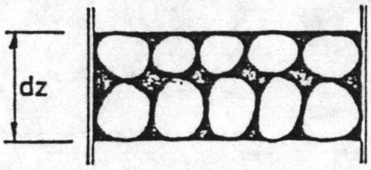
โดยทั่วไปทรายจะเป็นสารที่ใช้เป็นตัวกลางในการกรองเป็นส่วนมาก แต่ในบางกรณีก็มีการใช้ถ่านแอนทราไซด์ ซึ่งมีความหนาแน่นน้อยกว่าและมีความพรุนมากกว่าเป็นตัวกลาง Camp (12) , Ives (5) สรุปว่าเครื่องกรองที่ใช้ทั้งทรายและถ่านแอนทราไซด์เป็นตัวกลาง มีประสิทธิภาพสูงกว่าเครื่องกรองที่ใช้ทรายอย่างเดียว

Mohanka (22) ทำการทดลองโดยใช้เครื่องกรองที่มีชั้นตัวกลางแตกต่างกันหลาย ๆ ชนิดพบว่า จะได้ประสิทธิภาพดีกว่าเครื่องกรองที่มีชั้นตัวกลางเดียว

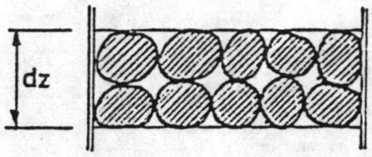
2.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Models)

2.3.1) พื้นฐานเกี่ยวกับชั้นตัวกลาง(28)

พิจารณาชั้นตัวกลาง ที่ระดับความหนาชั้นเล็ก ๆ เมื่อเวลา t=0

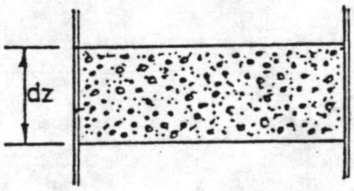


$$\varepsilon_o = \frac{\text{ปริมาตรของช่องว่างที่เกิดขึ้น}}{\text{ปริมาตรทั้งหมด}}$$



$$1-\varepsilon_o = \frac{\text{ปริมาตรของตัวกลาง}}{\text{ปริมาตรทั้งหมด}}$$

เมื่อพิจารณาปริมาตรของสารต่อเนื่องที่ไหลผ่านเครื่องกรองที่ความลึก dz และเวลา t=0 คือ ε_o ซึ่งในสารต่อเนื่องจะประกอบด้วยอนุภาคของสารกระจายและสารต่อเนื่อง นั่นคือ



$$\varepsilon_o = \varepsilon_o y + \varepsilon_o(1-y)$$

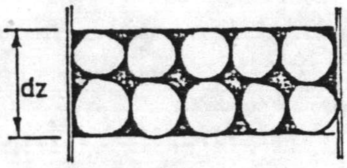
โดยที่ y = ความเข้มข้นของอนุภาคของสารกระจายในสารต่อเนื่อง

$\varepsilon_o y$ = ปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายในสารต่อเนื่อง

$\varepsilon_o(1-y)$ = ปริมาตรของสารต่อเนื่อง

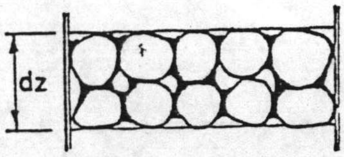
แต่เมื่อพิจารณาชั้นตัวกลางที่ระดับความหนาชั้นเดิม

เมื่อเวลาใด ๆ (t)



ε = ปริมาตรของช่องว่างที่เกิดขึ้น / ปริมาตรทั้งหมด

$\varepsilon < \varepsilon_o$ เนื่องจากมีอนุภาคของสารกระจายบางส่วนค้างอยู่ในช่องว่างของตัวกลาง



$\varepsilon_o - \varepsilon$ = ปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่ค้างอยู่

ปริมาตรของสารต่อเนื่อง ε เมื่อเวลา t ใด ๆ ที่ชั้นความหนานั้นคือ

$$\varepsilon = \varepsilon y + \varepsilon(1-y)$$

พิจารณาปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่ค้างอยู่ในช่องว่างของตัวกลาง $\varepsilon_o - \varepsilon$

$$\varepsilon_o - \varepsilon = \sigma + (\beta - 1)\sigma$$

$$= \beta\sigma$$

โดยที่ σ = ปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายอย่างเดียวที่ตกค้าง (Deposit)

$(\beta-1)$ = ปริมาตรของสารต่อเนื่องที่อยู่รอบ ๆ (Clog) อนุภาคของสารกระจายที่ค้างอยู่

β = ค่าสัมประสิทธิ์การอัดแน่นของอนุภาค

กล่าวโดยสรุปคือ

ε_o = ความพรุน (Porosity) ของเครื่องกรองที่เวลา t=0

ε = ความพรุน (Porosity) ของเครื่องกรองที่เวลา t ใด ๆ

σ = ปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่เกิดการตกค้าง (Deposit)

β = ค่าสัมประสิทธิ์ โดยปกติ >1 เสมอ

2.3.2) สมดุลย์ของมวลสาร

พิจารณาที่ชั้นความหนาตัวกลางของเครื่องกรอง เมื่อมีสารต่อเนื่องไหลผ่านสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

Accumulation speed = Inlet Flow - Outlet Flow

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma+\varepsilon y) = D\frac{\partial y^2}{\partial z^2} - U_m\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{........(2.3.2.1)}$$

โดยที่ $D\frac{\partial y}{\partial z}$ = การไหลแบบแพร่กระจายของอนุภาคสารกระจาย (Diffusion Flow)

$U_m y$ = Barycentric Flow

U_m = ความเร็วของสารต่อเนื่องในเครื่องกรอง

สามารถพิจารณาสมการ 2.3.2.1 ให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ได้โดย

1. การไหลแบบแพร่กระจาย (Diffusion Flow) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ Barycentric Flow จึงตัดทิ้ง

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma+\varepsilon y) = -U_m\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{.........(2.3.2.2)}$$

2. สามารถเขียนสมการ 2.3.2.1 ให้อยู่ใน

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -U_m\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{..........(2.3.2.3)}$$

ค่าการเปลี่ยนแปลงความพรุนของเครื่องกรอง ($\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ ε_o ดังนั้นสมการ 2.3.2.3 จึงเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varepsilon_o \frac{\partial y}{\partial t} = -v_m \frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{..........(2.3.2.4)}$$

3. ค่า $\varepsilon_o y$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ Deposit ดังนั้น

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -v_m \frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{..........(2.3.2.5)}$$

กล่าวโดยสรุปสมการ 2.3.2.5 จะให้ค่าไม่ใกล้ความจริง เมื่อเริ่มต้นขบวนการกรอง แต่จะให้ค่าที่ใกล้ความจริงและรวดเร็วในการคำนวณมากขึ้น เมื่อภายในเครื่องกรองมีค่าการสะสมตัวของอนุภาคเพิ่มมากขึ้น

2.3.3) <u>สมการกลไกของการอุดตัน</u>

ปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่ตกค้างอยู่ในชั้นความหนาของเครื่องกรอง (dz) เป็นปฏิภาคโดยตรงกับปริมาตรของอนุภาคที่ไหลผ่านชั้นความหนานั้น นั่นคือ

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \propto v_m y$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda v_m y \quad \text{..........(2.3.3.1)}$$

$$\lambda = \frac{1}{v_m y} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

โดยที่ λ = โอกาสที่จะเกิดการตกค้างของอนุภาคโดยพิจารณาความหนา หรือเรียกว่าสัมประสิทธิ์ของเครื่องกรอง (Filter Coefficient)

แต่เมื่อพิจารณาปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่ตกค้างในช่วงเวลาใด (dt) จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับปริมาตรของอนุภาคของสารกระจายที่อยู่ภายในช่องว่างของตัวกลางขณะนั้นนั่นคือ

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \propto \varepsilon_y$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda' \varepsilon_y$$

$$\lambda' = \frac{1}{\varepsilon_y}\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad ....(2.3.3.2)$$

โดยที่ = โอกาสที่จะเกิดการตกค้างของอนุภาคโดยพิจารณาเวลา

จากสมการที่ 2.3.3.1 และ 2.3.3.2 จะเห็นได้ว่าทั้งค่า λ และ λ' มีความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับจำนวนอนุภาคที่ตกค้างอยู่ก่อนแล้ว นั่นคือ

$$\lambda = \lambda_0 F(\sigma)$$

โดยที่ λ_0 = โอกาสที่จะเกิดการตกค้างของอนุภาคเมื่อเวลา t = 0 โดยที่เครื่องกรองยังสะอาดอยู่

พิจารณาจากความจริงที่ว่า ถ้าพื้นที่ที่จะให้เกิดการตกค้างมีน้อยลง แสดงว่ารอบ ๆ ตัวกลางถูกปกคลุมไปด้วยอนุภาคของสารกระจายแล้ว โอกาสที่จะเกิดการตกค้างก็จะน้อยลงนั่นคือ จะมีค่าน้อยลง เมื่อค่า มีค่าสูงขึ้น สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างค่า และ ได้โดยการพิจารณา

ที่เวลา t = 0 , ค่า $\sigma = 0$, $\lambda = \lambda_0$, นั่นคือ $F(\sigma) = 1$

ที่เวลา t = ∞, ค่า $\sigma = \sigma_m$, $\lambda = 0$, นั่นคือ $F(\sigma) = 0$

สามารถแปลงความสัมพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปทางคณิตศาสตร์ได้คือ

$$F(\sigma) = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_m}$$

สรุปได้ว่า โอกาสที่จะเกิดการตกค้างของอนุภาคที่เวลาใด ๆ นั้นขึ้นอยู่กับว่ามีการตกค้างอยู่แล้วมากน้อยเพียงใด ถ้ามีการตกค้างอยู่มากแล้ว โอกาสที่จะเกิดการตกค้างก็จะมีน้อยลง

2.3.4) <u>สมดุลย์รวมของระบบ</u>

ปริมาตรทั้งหมดของอนุภาคที่ตกค้างอยู่ในตัวกลางเมื่อเวลาใด ๆ จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับผลต่างของอนุภาคที่เข้ามา กับอนุภาคที่ออกไปจากชั้นตัวกลางนับตั้งแต่เริ่มขบวน การกรอง นั่นคือ

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\lambda \sigma$$

2.3.5) <u>ความเข้มข้นที่ระยะความลึกใด ๆ ในชั้นตัวกลาง</u>

จากสมการ 2.3.2.5 $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -v_m \frac{\partial y}{\partial z}$

และจากสมการ 2.3.3.1 $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda v_m y$

จะได้ว่า $\frac{\partial y}{\partial z} = -\lambda y$

เมื่อเวลา t =0 , $\lambda = \lambda_0$

$$\frac{1}{y} dy = -\lambda_0 dz$$

อินทิกรัลจะได้ว่า $\frac{y}{y_i} = e^{-\lambda_0 z}$

นั่นคือ $Y = y_i e^{(-\lambda_0 z)}$

กล่าวคือสามารถหาค่าความเข้มข้นของสารกระจายที่ความลึกใด ๆ ของชั้นตัวกลางได้ ถ้ารู้ค่าความเข้มข้นเริ่มต้น และค่าสัมประสิทธิ์ของเครื่องกรอง (λ)

2.3.6) <u>ชั้นของความเข้มข้นและการสะสมตัวของอนุภาค</u>

จากสมการพื้นฐานที่สำคัญทั้งสามสมการ คือ

สมดุลย์ของมวลสาร $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -v_m \frac{\partial y}{\partial z}$

สมการกลไกของการอุดตัน $\frac{\partial y}{\partial z} = -\lambda y$ ....(2.3.6.1)

สมดุลย์รวมของระบบ $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\lambda \sigma$ ....(2.3.6.2)

2.3.6.1) <u>ชั้นการสะสมตัวของอนุภาค</u>

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\lambda \sigma$$

$$\frac{1}{\sigma} d\sigma = -\lambda dz = -\lambda_o F(\sigma) dz$$

$$\int_{\sigma_i(t)}^{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{\sigma F(\sigma)} = -\lambda_o \int_0^z dz$$

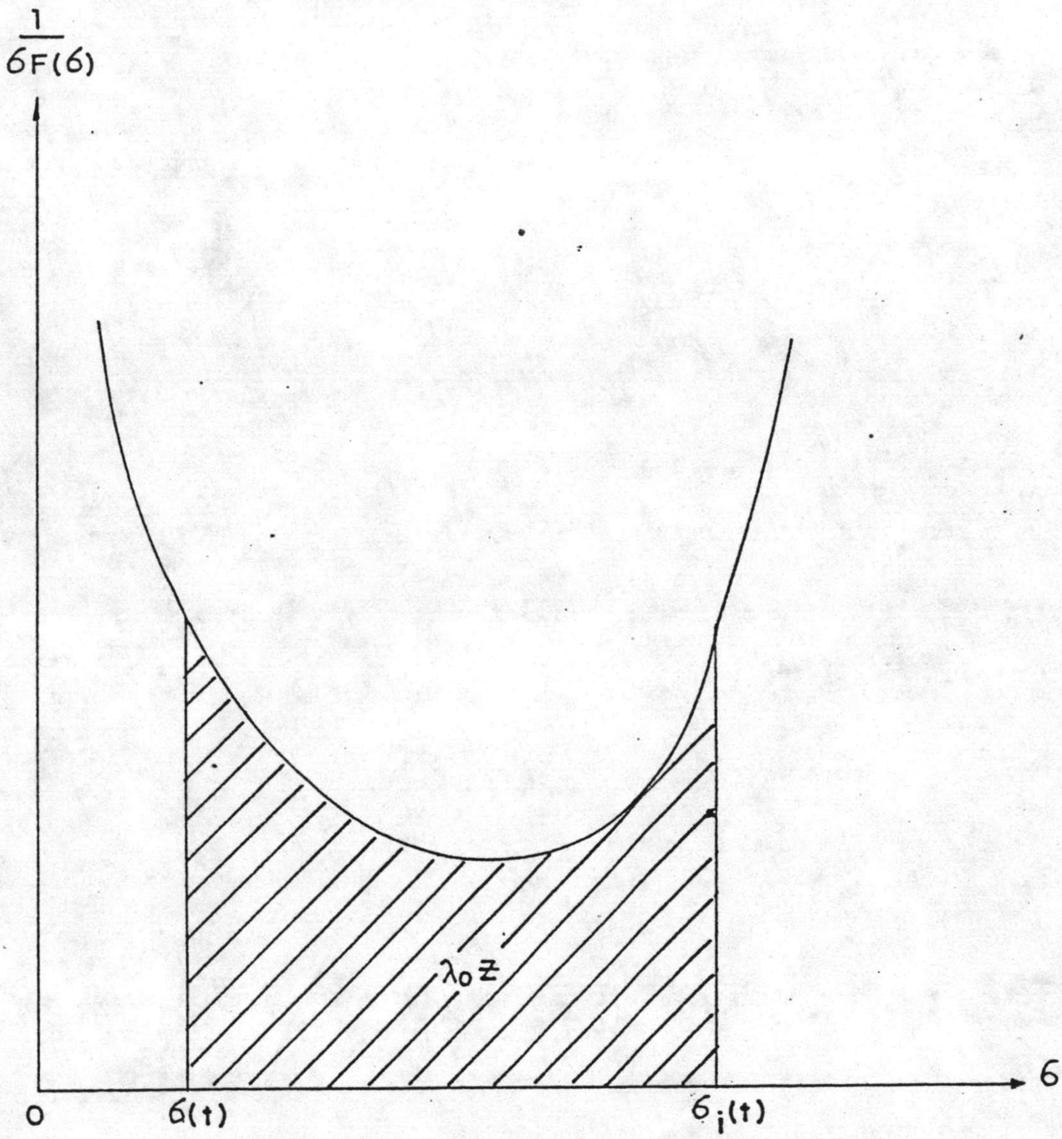
$$\int_{\sigma_i(t)}^{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{\sigma F(\sigma)} = -\lambda_o z$$

โดยที่ z = ความลึกของชั้นกลาง ที่มีค่า $\sigma(t)$

$\sigma(t)$ = การสะสมตัวของอนุภาคที่ความลึก z

$\sigma_i(t)$ = การสะสมตัวของอนุภาคที่ชั้นตัวกลางบนสุด

λ_o = สัมประสิทธิ์เครื่องกรอง



<u>รูปที่</u> 2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{\sigma F(\sigma)}$ กับ σ

จะเห็นได้ว่าต้องรู้สมการของฟังก์ชั่น F(σ) จึงจะสามารถหาค่าชั้นการสะสมตัวของอนุภาคได้

2.3.2.6) ชั้นความเข้มข้นของอนุภาค

เมื่อรวมสมการ 2.3.6.1 และ 2.3.6.2 จะได้ว่า

$$-\lambda = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)$$

$$\int_{y_i(t)}^{y(t)} \frac{1}{y}\,dy = \int_{\sigma_i(t)}^{\sigma(t)} \frac{1}{\sigma}\,d\sigma \quad (= -\lambda z)$$

$$\ln \frac{y(t)}{y_i(t)} = \ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_i(t)}$$

นั่นคือ $y/y_1 = \sigma/\sigma_i$

โดยที่ σ_i = การสะสมตัวของอนุภาคที่ชั้นบนสุดของตัวกลาง

σ = การสะสมตัวของอนุภาคที่ความลึก z ของตัวกลาง

y_1 = ความเข้มข้นที่ชั้นบนสุดของตัวกลาง

y = ความเข้มข้นที่ความลึก z ของตัวกลาง

2.3.7 การสะสมตัวของอนุภาคที่ชั้นบนสุดของตัวกลาง (σ_i)

จากสมการสมดุลย์ของมวลสารและสมการกลไกของการอุดตันจะได้ว่า

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda v_m y = \lambda_0 F(\sigma) v_m y$$

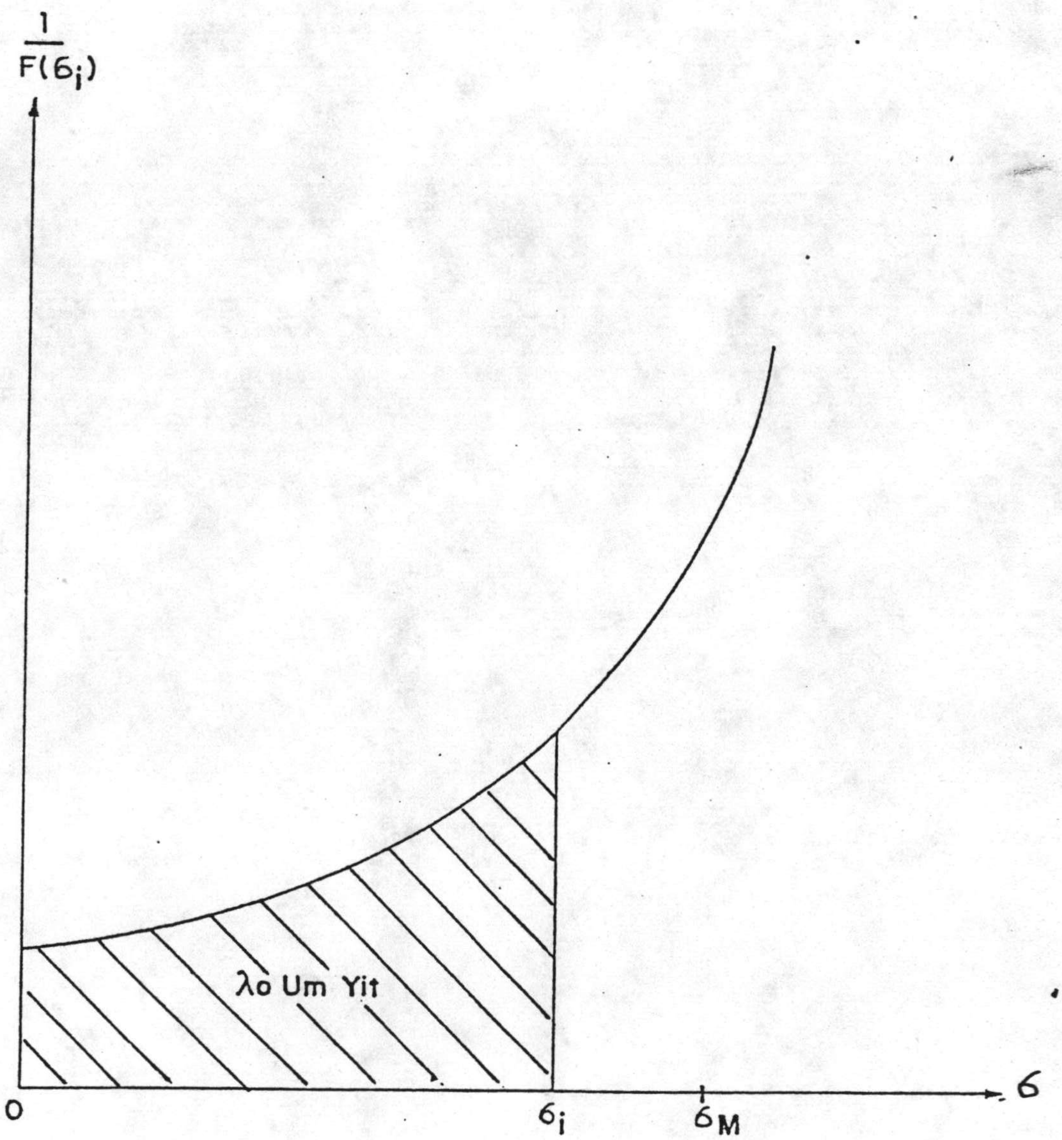
$$\frac{\partial \sigma}{F(\sigma)} = \lambda_0 v_m y \partial t$$

ที่ชั้นบนสุดของตัวกลาง Z = 0 จะได้ว่า $\sigma = \sigma_i$

$Y = Y_1$

$$\frac{d\sigma_i}{F(\sigma_i)} = -\lambda_o U_m y_i\, dt$$

$$\int_0^{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{F(\sigma_i)} = \lambda_o U_m y_i t$$



รูปที่ 2.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{F(\sigma_i)}$ กับ σ

2.3.8) ความสัมพันธ์ระหว่าง λ และ σ

จากสมการที่ว่า $\frac{dy}{dz} = -\lambda y$

$= \phi(y, \sigma,$ ตัวแปรทางสถิติของแบบจำลอง)

ได้มีผู้ทำการวิจัยหลายท่านได้ทำการทดลองและศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การกรอง และค่าการสะสมตัวจำเพาะของอนุภาค โดยสรุปได้ดังนี้

ผู้ทำการวิจัย	ประเภทของอนุภาค	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
Iwasaki (1937)	อนุภาคโดด (Discrete)	$\lambda = \lambda_0 + c.\sigma$
Oronatski (1955)	อนุภาคโดด (Discrete)	$\lambda = \lambda_0 - c\sigma$
Mintz (1960)	อนุภาคกลุ่ม (Flocculant)	$-\frac{\partial y}{\partial z} = b^*c - a\sigma/c$
Maroudas (1964)	อนุภาคโดด (Discrete)	$\lambda = \lambda_0(1 - \sigma/\sigma_u)$
Ives (1962-1969)	อนุภาคโดด (Discrete)	i) $\lambda = \lambda_0 + c\sigma - \phi\sigma^2/(f_0 - \sigma)$
		ii) $\lambda = \lambda_0 + c\sigma - b\sigma^2$
		iii) $\lambda = \lambda_0 (1+\frac{B}{f_0}\sigma)^x (1-\frac{\sigma}{f_0})^y (1-\frac{\sigma}{\sigma_u})^2$
Sakthivadivel (1966)	อนุภาคโดด (Discrete)	$\lambda = \lambda_0 + c\sigma$
Heertjes (1967)	อนุภาคกลุ่ม (Flocculant)	$\lambda = \lambda_0 - c\sigma$
Litwiniszyn (1967)	---	$-\frac{\partial y}{\partial z} = k_1(f_0 - \sigma)c - k_2\sigma$
Wright (1973)	อนุภาคกลุ่ม (Flocculant)	$\lambda = \lambda_0(1 - \sigma/\sigma_u)$

ตารางที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง λ และ σ ของผู้ทำการวิจัยในอดีต

2.3.9) <u>แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของความเข้มข้นของเครื่องกรอง</u>

จากการศึกษาชั้นตัวกลางในการกรอง โดยทำการศึกษาระหว่างความเข้มข้นของสารแขวนลอย ที่เวลาต่าง ๆ กัน จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับความเข้มข้นของสารแขวนลอย ตามสมการของ Bohart-Adams Equation (25) ดังนี้

$$C/C_o = [e^{\ln(e^{K_aN_oL/V-1}) - K_aC_ot} + 1]^{-1} \quad ....(2.3.9.1)$$

หรือ
$$C_o/C = [e^{\ln(e^{K_aN_oL/V-1}) - K_aC_ot} + 1] \quad ....(2.3.9.2)$$

โดยที่ C = ความเข้มข้นของสารแขวนลอยเมื่อเวลาใด ๆ ,มก/ล

C_o = ความเข้มข้นของสารแขวนลอยก่อนเข้า ,มก/ล

K_a = สัมประสิทธิ์การเกาะตัวของอนุภาค ,(มก/ล นาที)$^{-1}$
(Attachment Rate Coefficient)

N_o = สัมประสิทธิ์การสะสมตัวของสารแขวนลอยบนชั้นตัวกลาง
(Storage Coefficient) ,มก/ล

L = ความลึกของชั้นตัวกลาง , มม

V = อัตราความเร็วในการกรอง ,มม/นาที

t = ระยะเวลาใด ๆ ในการกรอง ,นาที

เมื่อความสูงของชั้นตัวกลาง (L) มีค่ามาก ๆ จากสมการที่ 2.3.9.2

$$\ln(C_o/C-1) = \ln(e^{K_aN_oL/V-1} - K_aC_ot)$$

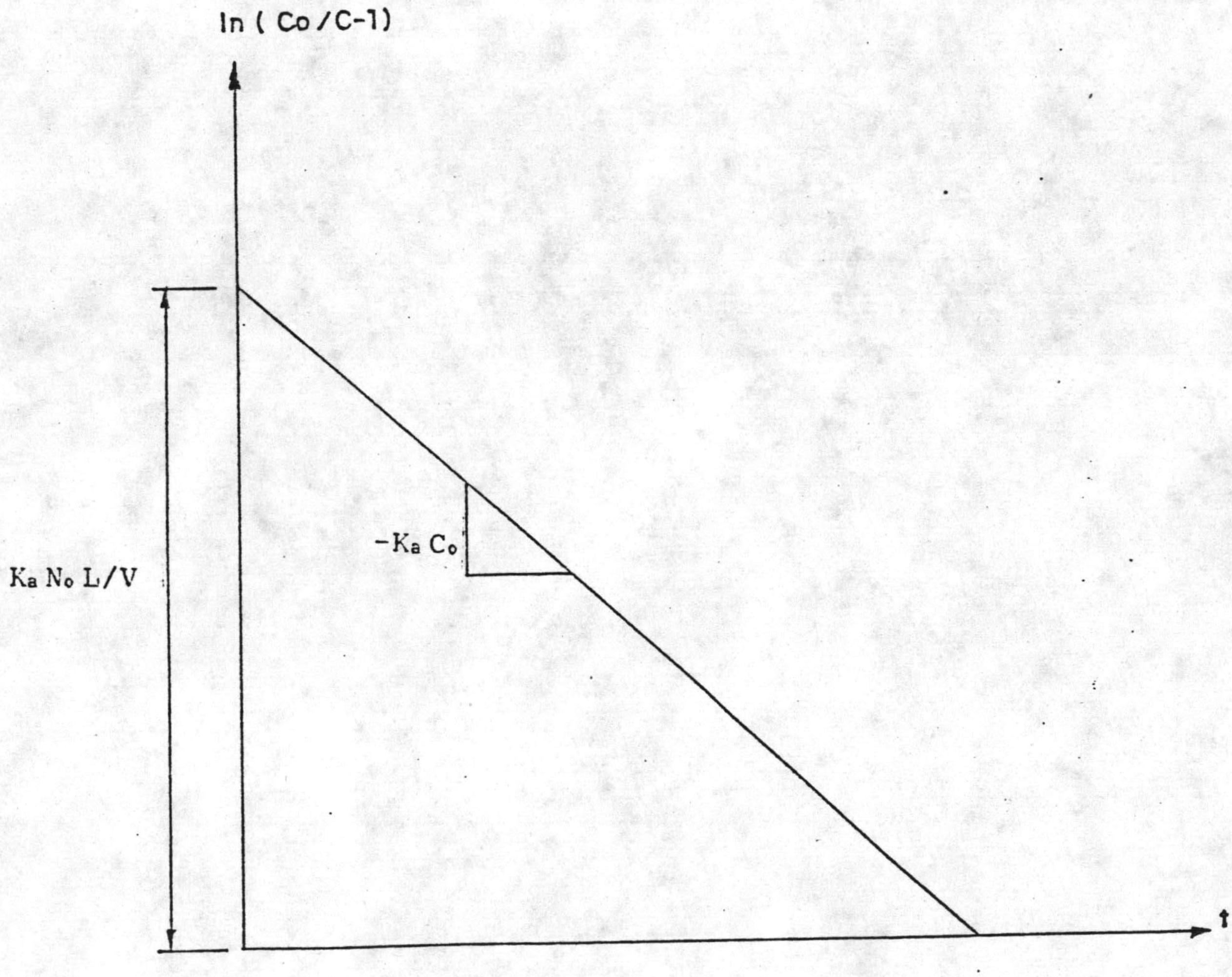
$$= \frac{K_aN_oL}{V-1} - K_aC_ot$$

$$= \frac{K_aN_oL}{V} - K_aC_ot$$

$(K_aN_oL/V >> 1)$

นั่นคือ $\ln(C_o/C-1) = \frac{K_a N_o L}{V} - K_a C_o t$ ....(2.3.9.3)

จากสมการที่ 2.3.9.3 สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการเส้นตรง ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงกราฟระหว่างค่า ln(C₀/C-1) กับ t

2.4 แบบจำลองการสูญเสียความสูงน้ำ

จากสมการของดาร์ซี (Darcy 's Equation) กล่าวว่า

$$H_o = (L/K_p)V = SV \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

โดยที่ H_o = การสูญเสียความสูงน้ำของเครื่องกรองที่สะอาด ,ม

K_p = สัมประสิทธิ์การซึมผ่านได้ ,ม/ชม

L = ความลึกของเครื่องกรอง ,ม

V = ความเร็วในการไหลผ่าน ,ม³/ม².ชม

S = สัมประสิทธิ์ความเร็วในการสูญเสียความสูงน้ำ ,ชม

จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างการสูญเสียความสูงน้ำของเครื่องกรองที่สะอาดกับความเร็วในการไหล มีลักษณะเป็นเส้นตรง โดยมีค่าความชัน = L/K_p

การสูญเสียความสูงน้ำของเครื่องกรองที่สะอาด ขึ้นอยู่กับลักษณะทางกลศาสตร์น้ำของเครื่องกรองสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ Kozney ดังนี้

$$H_o/L = \left(\frac{K_o}{g}\right)(\nu)(v)\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\left(\frac{6}{\psi d_p}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2.4.2)$$

โดยที่ K_o = ค่าสัมประสิทธิ์ Kozney

g = อัตราการเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก, ซม/วินาที²

ψ = รูปทรงของตัวกลาง (Sphericity)

d_p = ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของตัวกลาง ,ซม

ε = ความพรุนของตัวกลาง (Porosity)

ν = ความหนืดคินีมาติค (Kinematic Viscosity) ของสารต่อเนื่อง ,ซม²/วินาที

v = ความเร็วในการไหลผ่าน ,ซม/วินาที

จากสมการที่ 2.4.1 $S = H_o/V = L/K_p$ ......(2.4.3)

จากค่า S ที่ระดับต่าง ๆ ของชั้นตัวกลาง สามารถหาค่า K_p ที่ระดับต่าง ๆ ของชั้นตัวกลาง

จากสมการของ Mints (20) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการสูญเสียความสูงน้ำกับค่าการสะสมตัวจำเพาะ ดังนี้

$$H/H_o = 1+K\bar{\sigma} \qquad ....(2.4.4)$$

โดยที่ H = การสูญเสียความสูงน้ำที่เวลาใด ๆ ,ม

H_o = การสูญเสียความสูงน้ำเมื่อเครื่องกรองสะอาด ,ม

K = ค่าสัมประสิทธิ์

$\bar{\sigma}$ = ค่าเฉลี่ยการสะสมตัวจำเพาะ

2.5 การประยุกต์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการทดลอง

2.5.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์การกรอง (Filter Coefficient , λ)

การหาค่า λ นี้ตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่า ค่า λ คงที่ทั้งชั้นตัวกลางที่กำลังพิจารณาในขณะเวลาที่เก็บตัวอย่าง จากสมการกลไกของการอุดตัน

$$\frac{dy}{dz} = -\lambda y$$

จะได้ว่า $$\ln \frac{(y_z,t)}{(y_{z-\Delta z},t)} = -\lambda \Delta Z$$

$$\lambda = \frac{-1}{\Delta z} \ln \frac{(y_z,t)}{(y_{z-\Delta z},t)}$$

โดยที่ y_z, t = ความเข้มข้นที่ส่วนล่างของชั้นตัวกลางที่พิจารณา

$y_{z-\Delta z}, t$ = ความเข้มข้นที่ส่วนบนของชั้นตัวกลางที่พิจารณา

2.5.2 <u>การหาค่าการสะสมตัวจำเพาะของอนุภาค</u>

จากสมการสมดุลย์ของมวลสาร จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma + \varepsilon y) = -U_m \frac{\partial y}{\partial z} + D\frac{\partial y^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + U_m \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

โดยที่ $\varepsilon = \varepsilon_0 - \sigma$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\varepsilon_0 - \sigma)\frac{\partial y}{\partial t} + U_m \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\sigma(z,t) - \sigma(z,t-\Delta t)}{\Delta t} + \left[\varepsilon_0 - \sigma(z,t-\Delta t)\right]\left[\frac{y(z,t) + y(z-\Delta z,t)}{2} - \frac{y(z,t-\Delta t) + y(z-\Delta z,t-\Delta t)}{2}\right]$$

$$+ \frac{U_m}{\Delta z}\left[\frac{y(z-\Delta z,t) + y(z-\Delta z,t-\Delta t)}{2} - \frac{y(z,t) + y(z,t-\Delta t)}{2}\right] = 0$$

ค่า $\left[\varepsilon_0 - \sigma(z,t-\Delta t)\right]\left[\frac{y(z,t) + y(z-\Delta z,t)}{2} - \frac{y(z,t-\Delta t) + y(z-\Delta z,t-\Delta t)}{2}\right]$

มีค่าน้อยมากตัดทิ้งได้

นั่นคือ $\sigma(z,t) - \sigma(z,t-\Delta t) = \frac{\Delta t}{\Delta z} U_m \left[\frac{y(z-\Delta z,t) + y(z-\Delta z,t-\Delta t)}{2} - \frac{y(z,t) + y(z,t-\Delta t)}{2}\right]$

สามารถเขียนได้เป็น $\bar{\sigma} = 100\,\Delta t V \Delta C / L$ ....(2.5.1)

โดยที่ Δt = ระยะเวลาที่เริ่มถึงเวลาที่หา ($t_n - t_o$) ,ชม

V = อัตราการกรอง ,$ม^3/ม^2$-ชม

L = ความลึกของชั้นกรอง ,ชม

ΔC = ความแตกต่างของความเข้มข้นตั้งแต่เริ่มต้นถึงขณะที่เก็บตัวอย่าง ,ปริมาตร/ปริมาตร