



บรรณานุกรม

ภาษาไทยหนังสือ

- เดโช สวานานนท์. จิตวิทยาสำหรับครู-ผู้ปกครอง. กรุงเทพมหานคร : โอเดียนสโตร์, พิมพ์ครั้งที่ 4, 2514.
- บุญเชิด ภิญโญนันตพงษ์. การวัดและประเมินผลการศึกษา. ภาควิชาพื้นฐานทางการศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2518.
- ประคอง กรรณสุด. สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์. (ฉบับปรับปรุงแก้ไข) กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์บรรณกิจ, 2528.
- พิตร ทองชื่น. หลักการวัดผล. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์, 2524.
- ไพศาล ทวีพานิช. การวัดผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2526.
- ยุพิน พิพิธกุล. การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร : กรุงเทพมหานครการพิมพ์, 2519.
- _____. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524.
- สุชา จันท์เอม และสุรางค์ จันท์เอม. การวัดทางจิตวิทยาและการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แพรวพทยา วังบูรพา, 2518.
- สุชาติ รัตนกุล และพิทักษ์ รัชพลเดช. วิธีสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2515.
- สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. การปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

อนันต์ ศรีโสภณ. การวัดและการประเมินผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์
ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

บทความ

กิติยวดี บุญชื้อ. "บทบาทของการบ้านต่อการเรียน." วิทยาสาร 21 (มกราคม 2523) : 10

ก่อ สวัสดิพิพาณิชย์. "เทปปรุณปรารุกถา." เอกสารประกอบการประชุมวิชาการครั้งที่ 1
เรื่อง การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย ณ คณะแพทยศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 26-27 เมษายน 2522.

ทรงศักดิ์ บุญสิทธิ์. "การบ้านกับผู้ปกครอง." ครูศาสตร์ภาคการศึกษา. 24-30
มิถุนายน 2516.

ประชุมสุข อาชวอำรุง. "การทดสอบสัมฤทธิ์ผล." การประชุมวิชาการครั้งที่ 1 ณ
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 26 กุมภาพันธ์-2 มีนาคม 2516.

ประเทิน มหาพันธ์. "การให้การบ้าน." ประชาศึกษา 6 : 277-292 มกราคม 2512.

ประสาร มาลากุล ณ อยุธยา. "การบ้านในทรรศนะของผู้ปกครอง ศูนย์ศึกษา 12
(มีนาคม 2508) : 43.

ไพศาล หวังพานิช. "การสอบเพื่อปรับปรุงการเรียนการสอน." พัฒนาวิทย์ผล 14
สำนักงานทดสอบทางการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2521.

รัตนา ศิริพานิช. "เรื่องน่ารู้เกี่ยวกับการให้การบ้าน." คุรุปริทัศน์ (6) 25-31
มิถุนายน 2519.

ละเมียด ลิ้มอักษร. "การบ้าน." ศูนย์ศึกษา 12 (พฤศจิกายน 2508) : 59-63.

วรรณพร ภิมยร์น. "ข้อคิดเกี่ยวกับการให้การบ้าน." ประชาศึกษา 31(6) :
13-17 มกราคม 2523.

สมาน แสงมะลิ. "การบ้าน" ประชาศึกษา 16(9) เมษายน 2508 : 523-527.

สุดา บุญยไวโรจน์. "การใ้ทำงานนักเรียนในระดับประถมศึกษา." ประชาศึกษา 31(8) : 9-13 มีนาคม 2523.

สุรัชย์ ขวัญเมือง. "วิธีสอนและการวัดผลในวิชาคณิตศาสตร์." เอกสารนิเทศการศึกษา : ฉบับที่ 214 หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมการฝึกหัดครู, 2522.

สุรัตน์ ศิลปอนันต์. "การบ้าน." มิตรครู 16(9) 22 พฤษภาคม 2517.

ลำอ่าง สีหาพงษ์. "มอบการบ้านให้นักเรียนอย่างไรจึงเหมาะสม." วิจัยสนเทศ กองวิจัยทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ปีที่ 8 ฉบับที่ 88 มกราคม 2531.

เอกสารอื่น ๆ

ติลก บุญเรืองรอด. "ผลของการใช้การสอนแบบต่าง ๆ ต่อผลสัมฤทธิ์ผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิจัยการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2515.

นवलศรี เห็นสุข. "ผลของการอธิบายก่อนและหลังทำการบ้าน และหลังการตรวจซึ่งมีต่อเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2525.

นิภา เล็กบัวรุ่ง. "พฤติกรรมการสอนของครูประถมศึกษาในจังหวัดสมุทรสาคร เกี่ยวกับการกำหนดงานให้นักเรียน และการทบทวนเมื่อจบบทเรียน." วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2510.

ไพฑูริย์ บุญวัฒนวิบูลย์. "ผลของเวลาและการตรวจแบบฝึกหัดต่อผลสัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิจัยการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2517.

มยุ ผิวหอม. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติในวิชาคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการให้การบ้านและไม่ให้การบ้าน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1." วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521.

ยุทิน พิพิธกุล ปนิตา ศิริกุลวิเชฐ กรรณินาร์ อีรเวชเจริญชัย และครุฑพร สิงห์ศิริ.

"เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งเรียนด้วยการตรวจแบบฝึกหัดโดยครู และด้วยตนเองจากการเฉลยคำตอบของครู." , 2528.

วุฒิชัย ศรีวสุชากุล. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความคงทนของการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยทุกสัปดาห์กับกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยทุกบทเรียน." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิตศึกษามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2530.

ศรีสุดา ศิริสิทธิ์. "ความคิดเห็นของครูและผู้ปกครองต่อการให้การบ้านนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 3 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิตศึกษามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

สมบูรณ์ ลินถาวร. "ผลการทำแบบฝึกหัด การทดสอบย่อย และการสอนสิ่งที่บกพร่องที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์." ปริญญาโทการศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521.

สุทิน เนียมพลับ. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 ที่มีการสอบรวมครั้งเดียวกับการสอบหลาย ๆ ครั้ง." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิตศึกษามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

สุวรรณดี นิมมานทีสุทธิ์. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ระหว่างการทำแบบฝึกหัด และการทดสอบย่อยหลังเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิตศึกษามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524.

สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. "อิทธิพลของการทดสอบย่อยที่มีต่อการเรียนรู้ในเนื้อหาวิชาบางประการในวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่มีสมรรถภาพในการเรียนแตกต่างกัน." วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2512.

ภาษาต่างประเทศ

หนังสือ

Beggs, Donald L. and Lewis, Ernest L. Measurement and Evaluation in the School. Boston : Houghton Mifflin Co., 1975.

Bloom, Benjamin S., Hastings, Thomas J. and Madaus, George F. Handbook on Formation and Summation Evaluation of Student Learning. New York : McGraw-Hill Book Company, 1971.

Chase, Clinton I., Measurement for Educational Education. 2nd.ed New York : Addison-Wesley Publishing Co., 1978.

Ebel, Robert L., Essential of Educational Measurement. Engle Wood Cliffs N.J. : Prentice Hall, 1972.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York : McGraw-Hill Book Co., 1966.

Good, Carter V. Dictionary of Education. 3 rd. ed. New York : McGraw-Hill Book Company, 1973.

Gronlund, Norman E. Measurement and Evaluation in Teaching. 3 rd ed. New York : Mcmillan Publishing Co., 1976.

Krulik, Stephen, and Weise, Ingrid B. Teaching Secondary School Mathematics. Philadelphia : W.B. Saunders Company, 1975.

Leedy, P.D., Practical Research Planning and Design. 3 nd.ed. N.Y. : Macmillan Publishing. 1980.

Mehrens, William A. and Lehmann Irvin J. Standardized Test in Education. 2 nd ed. New York. : Holt & Rinehart and Winston, 1975.

- National Council of Teachers of Mathematics. The Teaching of Secondary School Mathematics. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1970.
- Noll, V.H. and Scannell, D.P. Introduction to Educational Measurement, 3 rd.ed. Boston : Houghton Mifflin, 1972.
- Ostle, Bernard. Statistics in Research : Basic Concepts and Techniques for Research Workers. 2 nd. ed. Culcutta : The IOWA State University Press, 1966.
- Page, G. Terry, Thomas J.B. and Marshel, Alan R. International Dictionary of Education. New York : Nichol Publishing Company, 1977.
- Phillips, E. Lakin, and Wiener, Danial N. Discipline Achievement and Mental Health 2 nd. ed. Englewood Cliff, N.J. : Prentice-Hall, INC., 1972.
- Schorling, Raleigh, The Teaching of Mathematics. Michigan : The Ann Arbor Press, 1963.
- Smith, F.M. and Adam, S., Essential Measurement for the Classroom Teacher. 2 nd. ed. N.Y. Harper & Row Publishers, 1972.
68 : 253-255, March, 1975.
- Stanley, Julian C. Measurement in Today's School. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, In
- Strang, Ruth. Guided Study and Homework. Washington D.C. : The National Education Association, 1960.

Webster, & New Twentieth Century Dictionary Second Edition. William Collins Publishers, Inc., 1979.

ערכות

Doane, Bradford Sayles. "The Effects of Homework and Locus of Control on Arithmetic Skills Achievement in Fourth-Grade Students." Dissertation Abstracts International. 33 (April 1973) : 5548-A.

Eakins, Dawin J. and Others, " The Effects of an Instructional Test-Taking Units on Achievement Test Scores." The Journal of Educational Research. 69 : (November-December 1976) : 67-71.

Fiel, Ronald L. and Oksy, James R, "The Effects of Formative Evaluation and Remediation on Mastery of Intellectual Skills," The Journal of Educational Research. 68 : 253-255, March, 1975.

Gay, Lorraine R. and Gallagher, Paul D., "The Comparative Effectiveness of Tests Versels Written Exercises." The Journal of Educational Research. 69 : 59-61, March, 1976.

Harris, Virgil Williams. "Effects of Peer Tutoring Homework and Consequence upon the Academic Performance of Elementary School Children." Dissertation Abstracts International. 33(May 1972) : 6175-A.

Hansen, David Williams. "An Investigation of the Effects of Required Homework on Achievement in College Mathematics." Dissertation Abstracts International. 33 : (December 1972) : 2814-5-A.

Martens, N. "Effects of Arithmetic Homework upon the Attitude of Third Structures." School Science and Mathematics. 68 : 657-662, October, 1968.

Sally, Ovariza. "Homework Exercise." English Language Teaching Journal 3 (April 1978) : 213.

การพิจารณา

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ



รายนามผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจแบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

1. รองศาสตราจารย์พรหมทิพย์ มีามณี
รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร
2. รองศาสตราจารย์กรรณิกา กวีกเพชญ์
รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรพรรณ ตันบรรจง
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ภาคผนวก ข
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

บันทึกการสอน

เรื่อง

"ภาคตัดกรวย"

คาบที่ 1
วงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้

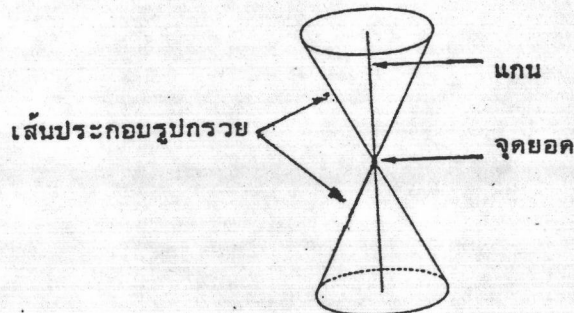
เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกชื่อรูปทรงเรขาคณิตที่เกิดจากระนาบตัดกรวยกลมในลักษณะต่าง ๆ ได้
2. บอกนิยามของวงกลมได้
3. หาความสัมพันธ์ เขียนเซตของความสัมพันธ์ และหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมี r หน่วยได้
4. หาความสัมพันธ์ เขียนเซตของความสัมพันธ์ และหาสมการซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม ซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$ รัศมี r หน่วยได้

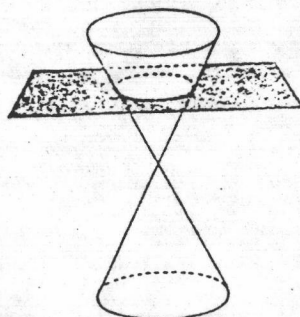
เนื้อหา

ภาคตัดกรวย (Conic Section)

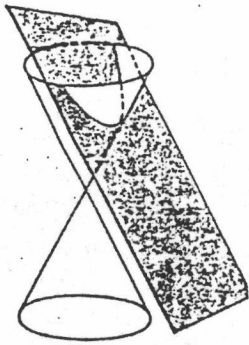
บทนี้กล่าวถึงวงกลม พาราโบลา วงรี และ ไฮเพอร์โบลา เส้นโค้งเหล่านี้เรียกว่า "ภาคตัดกรวย" (Conic Section) เพราะเส้นโค้งเหล่านี้เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงคู่หนึ่งด้วยระนาบ ซึ่งกรวยกลมตรงมีลักษณะดังรูป



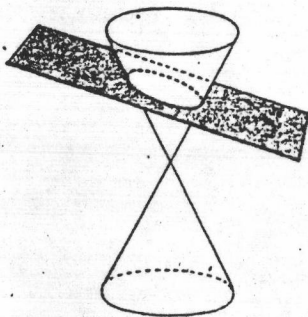
จุดยอดจะแบ่งกรวยกลมตรงออกเป็นสองส่วน ซึ่งอยู่คนละข้างของจุดยอด



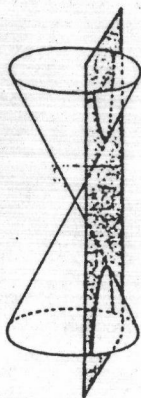
วงกลม เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวย



พาราโบลา เกิดจากการตัดกรวยกลมตรง
ด้วยระนาบที่ขนานกับ เส้นประกอบรูปกรวย



วงรี เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วย
ระนาบที่ตัดกรวยเพียงส่วนเดียว โดยที่
ระนาบนั้นไม่ขนานกับ เส้นประกอบรูปกรวย
และไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย



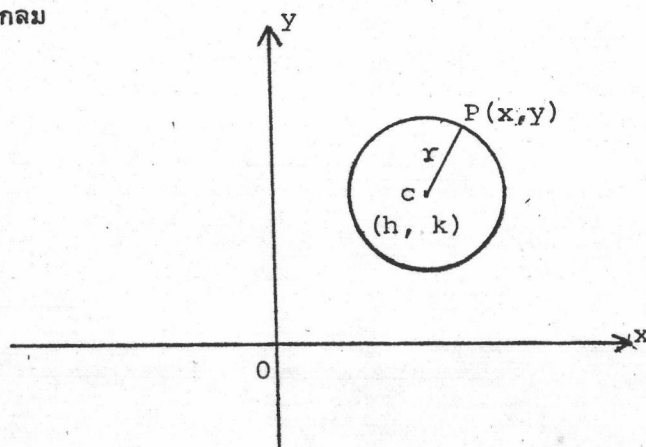
ไฮเพอร์โบลา เกิดจากการตัดกรวยกลมตรง
ด้วยระนาบที่ตัดทั้งสองส่วนของกรวย

วงกลม (Circle)

นิยาม วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และเรียกระยะทางที่เท่ากันว่า รัศมี ของวงกลม

ให้ $c(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมี r หน่วย และ $p(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม



$$\begin{aligned} \text{จากนิยามจะได้ } CP &= r \\ CP &= \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมี r หน่วยคือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$ แทนค่า $h = 0, k = 0, r = 4$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 16\}$$

$$\text{สมการของวงกลมคือ } x^2 + y^2 = 16$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 4)$ และรัศมีเท่ากับ 3

หน่วย

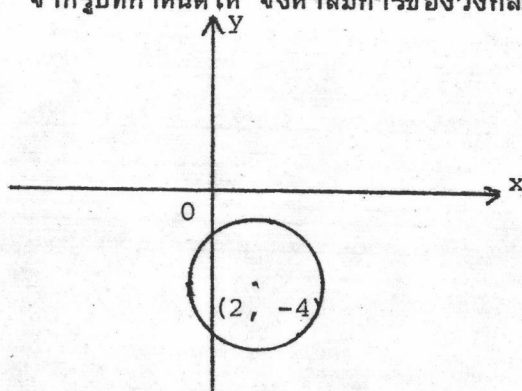
วิธีทำ สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมี r หน่วยคือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

แทนค่า $h = -3, k = 4, r = 3$ จะได้สมการของวงกลมคือ

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

ตัวอย่างที่ 3 จากรูปที่กำหนดให้ จงหาสมการของวงกลม



วิธีทำ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -4)$ และรัศมี 3 หน่วย

จาก $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทนค่า $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

สมการของวงกลมจากรูปที่กำหนดให้ คือ

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, -3)$ และรัศมี 2 หน่วย

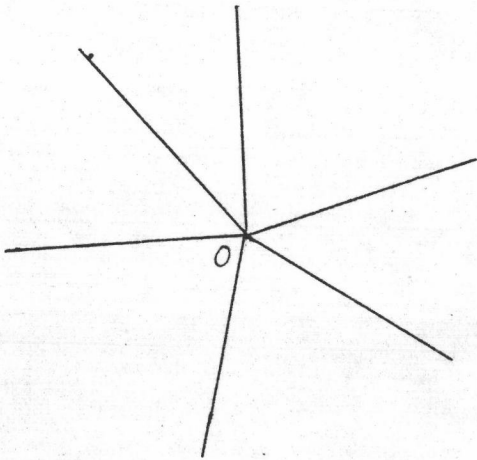
สื่อการเรียนการสอน

1. กรวยกลมสำเร็จรูปที่แสดงถึงการตัดด้วยระนาบ
2. วงเวียน
3. แผนภูมิการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูใช้การสาธิตประกอบคำถาม โดยชี้สื่อการสอนสำเร็จรูปให้นักเรียนดูว่า ถ้าตัดกรวยกลมด้วยระนาบจะเกิดพื้นที่รูปหน้าตัดอย่างไรบ้าง ให้นักเรียนเป็นผู้สรุป
2. ให้นักเรียนเขียนรูปบนกระดาษกราฟที่แจกให้ โดยครูกำหนดจุดคงที่อยู่ที่ $(0, 0)$ แล้วให้นักเรียนหาจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทาง 3 หน่วยเท่ากัน ดังรูป



ให้นักเรียนสังเกตดูว่ามีจุดกี่จุด และให้นักเรียนพิจารณาว่าทางเดินของจุดทุกจุดบนระนาบเป็นรูปอะไร โดยให้นักเรียนใช้วงเวียนเขียนรูปวงกลม และบอกนิยามของวงกลม แล้วครูคิดแผนภูมินิยามของวงกลมให้นักเรียนดู

3. ครูคิดแผนภูมิ ซึ่งว่าครูวงกลมที่มีแกน x และแกน y มีจุดศูนย์กลางที่จุด $C(h, k)$ ครูใช้การถามตอบจนได้สูตรสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมี r หน่วยคือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

4. ครูยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง ให้ทำความเข้าใจและสมการที่มีกราฟเป็นวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีมาให้

4.1 ตัวอย่างที่ 1 ครูเป็นผู้อธิบาย และใช้คำถามประกอบ

4.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดโจทย์แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด และให้นักเรียน 1 คน ออกมาทำบนกระดาน

4.3 ตัวอย่างที่ 3 ครูกำหนดโจทย์เป็นรูปวงกลมมาให้ ให้นักเรียนทุกคน ลองหาสมการของวงกลม

ขั้นสรุป

- 1 . ครูสรุปนิยามของวงกลม โดยการให้คำถามแล้วคิดแผนภูมินิยามของวงกลมให้นักเรียนอ่านอีกครั้งหนึ่ง
- 2 . ถามขั้นตอนในการหาความสัมพันธ์และการเขียนกราฟของวงกลม

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
<ol style="list-style-type: none"> 1 . สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2 . ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 	<ol style="list-style-type: none"> 1 . นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2 . นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%

คาบที่ 2

วงกลม (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. เขียนสมการของวงกลมให้อยู่ในรูปทั่วไปได้
2. หาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมได้ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์หรือสมการของวงกลมให้อยู่ในรูปทั่วไปให้

เนื้อหา

1. การหาสมการของวงกลมในรูปทั่วไป

จากความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมีเท่ากับ

$$r \text{ หน่วย คือ } \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \}$$

พิจารณาสมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0 \quad \text{--- (P)}$$

ให้ $D = -2h, E = -2k$ และ $F = h^2 + k^2 - r^2$

สมการ (P) เขียนใหม่ได้เป็น

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เป็นสมการของวงกลมซึ่งอยู่ในรูปทั่วไป

2. การหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากสมการแบบต่าง ๆ

2.1 สมการของวงกลมที่อยู่ในรูปมาตรฐาน $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จุดศูนย์กลาง คือ (h, k) รัศมี = r หน่วย

2.2 สมการของวงกลมที่อยู่ในรูปทั่วไป $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

รัศมีของวงกลม $= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, 5)$ รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ จากสมการ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทนค่า $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 4^2$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$$

สมการของวงกลม คือ $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของวงกลมที่มีรัศมีเป็นสองเท่า และมีจุดศูนย์กลางเดียวกัน

กับวงกลม ซึ่งเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{ (x, y) / x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \}$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

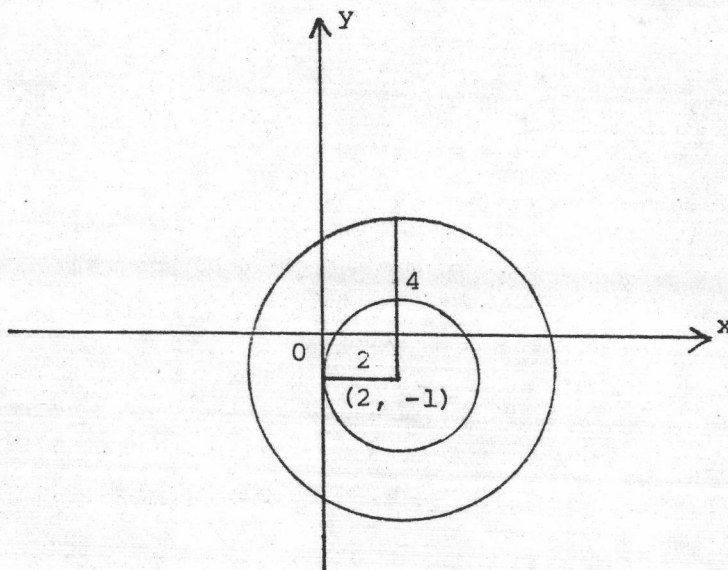
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1 = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ รัศมี

เท่ากับ 2 หน่วย

ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ $\{ (x, y) / (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2 \}$ และมีกราฟดังนี้



ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 9 + 1 = 9$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$$

ดังนั้น สมการของวงกลมที่กำหนดให้ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, -1)$ และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

ข้อสังเกต

1. สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ต้องเท่ากัน
2. เครื่องหมายระหว่าง x^2 และ y^2 เป็นบวกเสมอ
3. ความยาวของรัศมีต้องไม่เป็นศูนย์และไม่เป็นจำนวนจินตภาพ
4. ไม่มีพจน์ xy ประกอบอยู่ในสมการนั้น

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

สื่อการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนนิยามของวงกลม และสูตรของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)
2. ครูทบทวนเรื่องสมการกำลังสองสมบูรณ์ โดยใช้การถาม-ตอบ ซึ่งครูกำหนดสมการมาให้ แล้วให้นักเรียนทำให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์ เช่น $x^2 - 4x - 5 = 0$ ให้

นักเรียนออกมาเขียนบนกระดาน

$$\text{จะได้ } (x^2 - 4x + 4) - 5 = 4$$

$$(x - 2)^2 - 9 = 0$$

ขั้นสอน

1. ครูเขียนสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมี r หน่วย บนกระดาน ดังนี้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

แล้วใช้การถาม-ตอบ จนได้สมการของวงกลมในรูปทั่วไป คือ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2. ครูยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง ดังนี้

2.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของวงกลมกำหนดจุดศูนย์กลาง และรัศมีให้ โดยครูเป็นผู้อธิบาย และใช้คำถามประกอบ

2.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูเขียนโจทย์บนกระดานให้หาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม โดยกำหนดสมการของวงกลมในรูปทั่วไปมาให้ แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด แล้วเรียกออกมาทำบนกระดาน 1 คน

2.3 ตัวอย่างที่ 3 ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ให้เขียนกราฟของวงกลมโดยกำหนดความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมมาให้ ให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปการหาสมการของวงกลมให้อยู่ในรูปทั่วไป
2. ถามขั้นตอนในการหา จุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม เมื่อกำหนดสมการของวงกลมในรูปทั่วไปมาให้

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดชุด 3.1 ข้อ 1, 2, 4	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้อง 65% กลุ่มที่ 2 ทดสอบย่อย นักเรียนทำถูกต้อง ประมาณ 76% กลุ่มที่ 3 ทดสอบย่อย (1) ทำถูกต้อง 87%

คาบที่ 3

วงกลม (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมได้ เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและ เส้นสัมผัสได้
2. หาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ได้
3. หาจุดตัดของวงกลมกับแกน x หรือแกน y ได้

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (5, 1)

และสัมผัสเส้นตรง $2x + y - 6 = 0$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{รัศมีของวงกลม} &= \frac{|2(5) + 1(1) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{สมการวงกลมที่ต้องการคือ} \quad (x-5)^2 + (y-1)^2 &= (\sqrt{5})^2 \\ (x-5)^2 + (y-1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$$

$$\text{ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ } \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ที่จุด

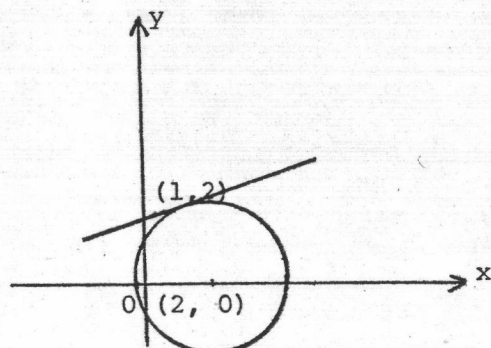
(1, 2)

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad x^2 + y^2 - 4x - 1 &= 0 \\ (x^2 - 4x + 4) + y^2 &= 5 \\ (x - 2)^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (2, 0)

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (1, 2) และ (2, 0) คือ $\frac{2 - 0}{1 - 2} = -2$

ความชันของเส้นสัมผัสคือ $-\frac{1}{2}$



$$\text{สมการของเส้นสัมผัส คือ } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$2y - 4 = -x + 1$$

$$x - 2y - 5 = 0$$

ตัวอย่างที่ 3 กราฟของวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ จะตัดแกน x

ที่จุดใด

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = 25$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

ถ้ากราฟตัดแกน x แสดงว่า $y = 0$

$$(x - 4)^2 + (0 + 3)^2 = 25$$

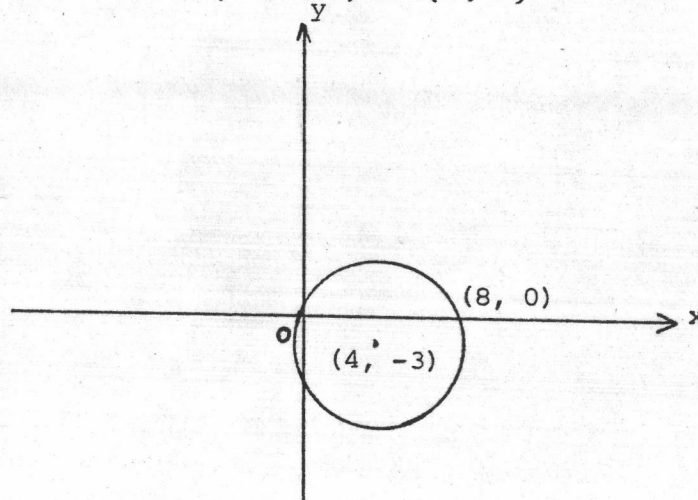
$$x^2 - 8x + 16 + 9 = 25$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$$x = 0, 8$$

วงกลมตัดแกน x ที่จุด $(0, 0)$ กับ $(8, 0)$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม สัมผัสแกน x ที่จุด $(2, 0)$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนเรื่อง การหาสมการเส้นตรง

จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง ตัดแกน x ที่จุด $(-2, 0)$ และ

ตัดแกน y ที่จุด $(0, 8)$ ความชันของเส้นตรงเส้นนี้ $= \frac{8 - 0}{0 - (-2)} = 4$
สมการเส้นตรงคือ $y - 0 = 4(x + 2)$

2. ทบทวนเรื่อง การหาระยะทางจากจุดไปตั้งฉากกับเส้นตรง โดยใช้สูตร

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง

1.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยกำหนดจุดศูนย์กลาง และเส้นสัมผัสมาให้ โดยครูเป็นผู้อธิบายและใช้คำถามประกอบ

1.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ให้หาสมการของเส้นสัมผัสของวงกลม โดยกำหนดสมการของวงกลม และจุดสัมผัสมาให้แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด

1.3 ตัวอย่างที่ 3 ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ให้หาจุดตัดแกน x หรือแกน y โดยกำหนดสมการของวงกลมมาให้ แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด

ขั้นสรุป

1. ครูสรุป การหาความสัมพันธ์ของวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลม และเส้นสัมผัสมาให้

2. ถามนักเรียนว่า ขั้นตอนในการหาระยะของวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลม และเส้นสัมผัสให้

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 4)$ และสัมผัสกับแกน y

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1 . สิ่ง เกิดจากการตอบคำถาม ของนักเรียน 2 . ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 . ดูจากการทำแบบฝึกหัดชุด 3 .1 หน้า 76 ข้อ 7 , 3 , 5 , 6 4 . ดูจากการทดสอบย่อย	1 . นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2 . นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3 . กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 62% 4 . กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 74% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 73%

คาบที่ 4

วงกลม (ต่อ)

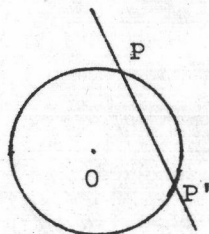
จุดประสงค์

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

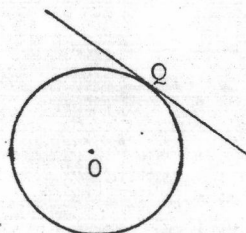
1. หาจุดตัดระหว่างวงกลมกับเส้นตรงได้
2. หาจุดตัดระหว่างวงกลมกับวงกลมได้เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ หรือสมการของวงกลมมาให้

เนื้อหา

1. การตัดกันของวงกลมกับเส้นตรงมี 2 กรณี คือ
 - 1.1 วงกลมตัดเส้นตรง จะเกิดจุดตัด 2 จุด (รูป ก)
 - 1.2 วงกลมสัมผัสเส้นตรง จะเกิดเป็นจุด 1 จุด คือ จุดสัมผัส



รูป 1



รูป 2

2. การตัดกันของวงกลม 2 วง มี 2 กรณี คือ
 - 2.1 วงกลมตัดกับวงกลม จะเกิดจุดตัด 2 จุด (รูป 1)
 - 2.2 วงกลมสัมผัสกับวงกลม สัมผัสภายในหรือภายนอกจะเกิดจุด 1 จุด คือ จุดสัมผัส (รูป 2)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดตัดของกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) / x - 2 = 0\}$
และ ความสัมพันธ์ $\{(x, y) / x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0\}$

วิธีทำ จาก $x - 2 = 0$ เป็นสมการเส้นตรง คือ $x = 2$

และ $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ เป็นสมการของวงกลม

แทนค่า $x = 2$ ในสมการวงกลมจะได้

$$4 + y^2 - 4 + 3y = 0$$

$$y(y + 3) = 0$$

$$y = 0, -3$$

จุดตัดของเส้นตรง $x = 2$, วงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ คือ

$(2, 0), (2, -3)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ และวงกลม
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$$\text{วิธีทำ } x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \quad \text{_____ (2)}$$

$$(1) - (2) \quad 2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

แทน $x = 3$ ลงใน (1)

$$9 + y^2 - 6 + 4y = 0$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$(y + 3)(y + 1) = 0$$

$$y = -3, -1$$

จุดตัดของวงกลมทั้งสอง คือ $(3, -3)$ และ $(3, -1)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของวงกลม ซึ่งสัมผัสเส้นตรง $3x - 4y + 17 = 0$
และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 11 + 4 + 9 = 24$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 24$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้ คือ $(2, -3)$

วงกลมที่ต้องการ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -3)$

รัศมีคือ ระยะทางจากจุด C ถึงเส้นตรง L เท่ากับ

$$= \frac{|3(2) - 4(-3) + 17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{35}{5} = 7$$

สมการของวงกลมที่ต้องการ คือ

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

สื่อการเรียนการสอน

1. วงเวียน
2. ไม้บรรทัดยาว

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ทบทวนเรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียน เขียนวงกลมบนกระดาน แล้วลากเส้นตรงให้ผ่านวงกลม

แล้วถามนักเรียนในชั้นว่าจะเกิดจุดตัดที่จุด

2. ครูให้นักเรียนออกมาเขียนวงกลม แล้วลากเส้นตรงสัมผัสวงกลม แล้วใช้
การถาม-ตอบ

3. ให้นักเรียนทุกคนวาด วงกลม 2 วง ตัดกันในลักษณะต่าง ๆ บนกระดาษกราฟ
แล้วให้นักเรียนสรุปว่าได้การตัดกันของวงกลม 2 วง กี่กรณี

4. ครูให้ตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง

4.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลม โดยครูเป็นผู้อธิบาย

4.2 ตัวอย่างที่ 2 ให้หาจุดตัดของวงกลม 2 วง โดยกำหนดสมการของ
วงกลมทั้งสองมาให้ โดยครูใช้การถาม-ตอบ จนนักเรียนสามารถหา
จุดตัดได้

4.3 ตัวอย่างที่ 3 ให้หาสมการของวงกลม ซึ่งสัมผัสเส้นตรงและมีจุด
ศูนย์กลางร่วมกับวงกลมที่กำหนดสมการมาให้ โดยครูใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปการตัดกันของวงกลมกับ เส้นตรง และการตัดกัน ของวงกลมกับวงกลม
2. ครูถามนักเรียนว่า ขั้นตอนในการเรียนวงกลม 2 วงตัดกัน เมื่อกำหนด
สมการรูปทั่วไป ของวงกลมทั้งสองมาให้

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 70%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดชุด 3.1 หน้า 77 ข้อ 7, 8, 9 และ 11	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 78%
4. ดูจากการทำสอมย่อ	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 75% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 73%

คาบที่ 5

พาราโบลา

จุดประสงค์การเรียนรู้

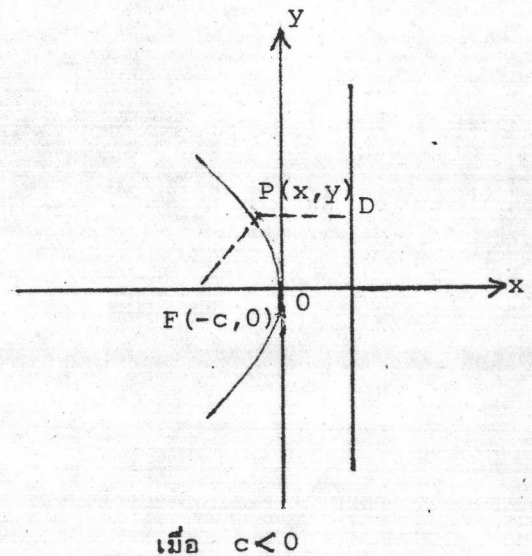
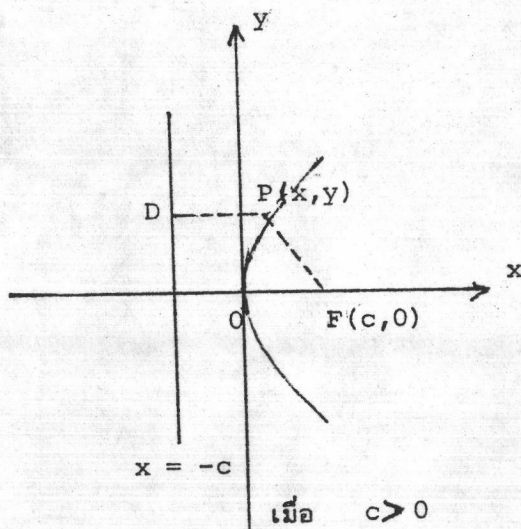
เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของพาราโบลาได้
2. ทหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้ เมื่อกำหนดจุดยอดและจุดโฟกัสให้
3. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้

เนื้อหา

2.1 พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทาง เท่ากัน เสมอ

2.2 ส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา



เส้นตรงคงที่ที่กำหนดให้ เรียกว่า โคเรกตริกซ์

จุดคงที่ที่กำหนดให้ เรียกว่า โฟกัส ของพาราโบลา

เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับโคเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา

จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า จุดยอดของพาราโบลา

สำหรับสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(c, 0)$

โคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน x เป็นแกนของพาราโบลา

หาได้ ดังนี้

จากรูป จุด $F(c, 0)$ คือ โฟกัส

เส้นตรง $x = -c$ คือ โคเรกทริกซ์

1. สมการของพาราโบลา ที่มีจุดยอดคงอยู่ที่ $(0, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(c, 0)$

โคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน x เป็นแกนของพาราโบลา หาได้ดังนี้

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

D เป็นโพรเจกชันของจุด P บนโคเรกทริกซ์

จากนิยาม จะได้ $|PF| = |PD|$

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = |x - (-c)|$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

$$y^2 = 4cx$$

นั่นคือ $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลา ที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(c, 0)$

โคเรกทริกซ์คือเส้นตรง $x = -c$ และมีแกน x เป็นแกนของพาราโบลา

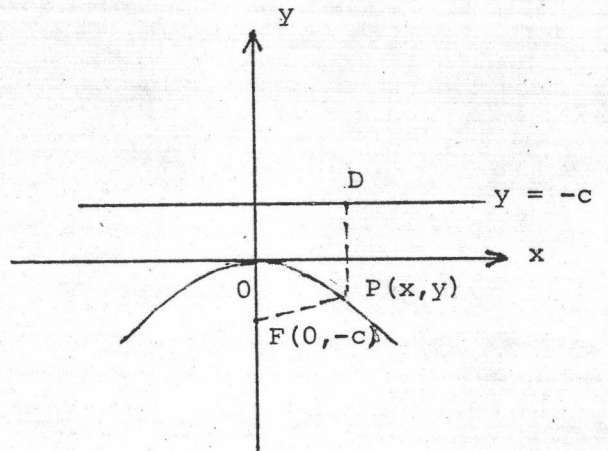
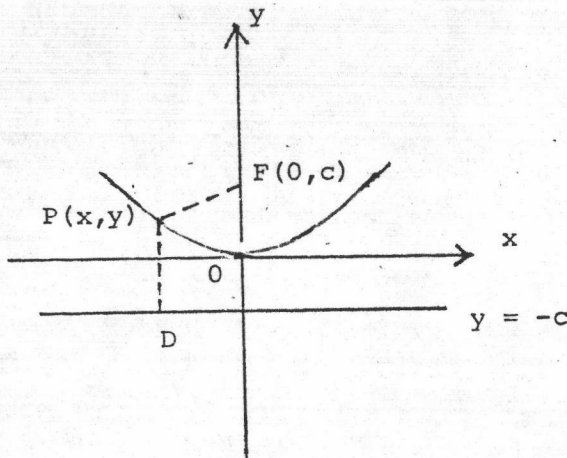
ข้อสังเกต

ถ้า $c > 0$ $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟเปิดทางขวา

$c < 0$ $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟเปิดทางซ้าย

2. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดคงอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, c)$

โคเรกทริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน y เป็นแกนของพาราโบลา หาได้ดังนี้



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$D(x, -c)$ เป็นโปรเจกชันของจุด P บนโคเรกตริกซ์

แกน y เป็นแกนของพาราโบลา

$$\begin{aligned} \text{จากนิยาม } |PF| &= |PD| \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= |y - (-c)| \end{aligned}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} x^2 + (y-c)^2 &= (y+c)^2 \\ x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= y^2 + 2cy + c^2 \\ x^2 &= 4cy \end{aligned}$$

นั่นคือ $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, c)$

โคเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน y เป็นแกนของพาราโบลา

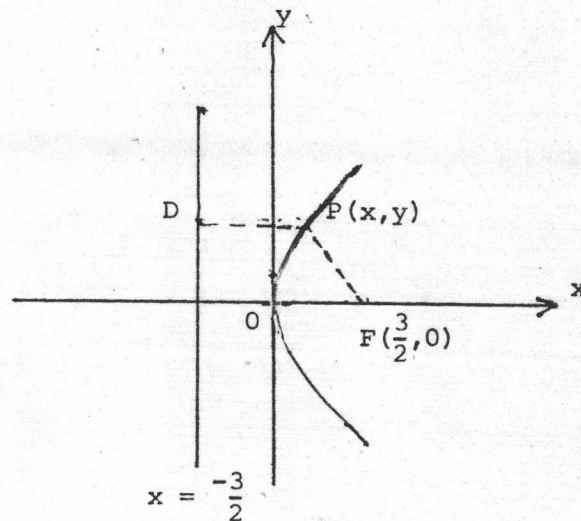
ข้อสังเกต

ถ้า $c > 0$ $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟหงายขึ้น

$c < 0$ $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีกราฟคว่ำลง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ของกราฟพาราโบลา ซึ่งมีจุด $(\frac{3}{2}, 0)$ เป็นโฟกัสและมีเส้นตรง $x + \frac{3}{2} = 0$ เป็นโคเรกตริกซ์

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } y^2 &= 4cx \\ &= 4\left(\frac{3}{2}\right)x \\ y^2 &= 6x \end{aligned}$$

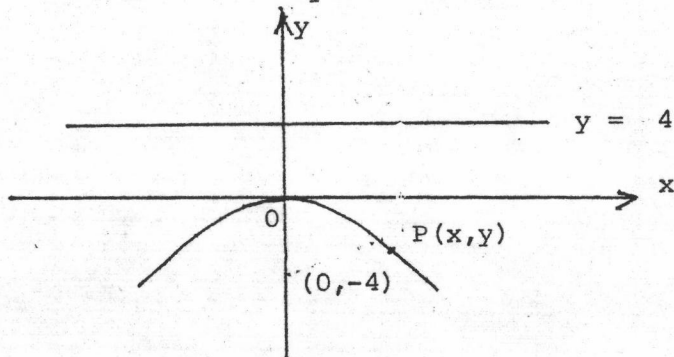
ความสัมพันธ์ของกราฟพาราโบลา คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 6x\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุด $(0, -4)$ เป็นโฟกัสและมีเส้นตรง $y = 4$ เป็นไดเรกทริกซ์

วิธีทำ จากสูตร $x^2 = 4cy$

$$= 4(-4)y$$

$$x^2 = -16y$$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุด $(0, -\frac{5}{2})$ เป็นโฟกัส และมีเส้นตรง $y = \frac{5}{2}$ เป็นไดเรกทริกซ์

สื่อการเรียนการสอน

1. สื่อการสอนสำเร็จรูป
2. แผนภูมิ รูปพาราโบลา ซึ่งมี
 - 2.1 แกนของพาราโบลายาวนานกับแกน x
 - 2.2 แกนของพาราโบลายาวนานกับแกน y

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูให้นักเรียนดูสื่อสำเร็จรูป คือ กรวยกลมตรงที่ถูกตัดด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวย แล้วถามนักเรียนว่าจะได้รูปอะไร

ขั้นตอน

1. ครูกำหนดจุดคงที่และเส้นตรงคงที่ในระบบพิกัดฉากให้แล้วให้นักเรียนหาทางเดินของจุดใด ๆ บนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ และเส้นตรงคงที่เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ ครูใช้คำตามประกอบการอธิบาย แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของพาราโบลา แล้วให้นักเรียนดูแผนภูมินิยาม

2. ครูให้นักเรียนดูแผนภูมิรูปพาราโบลา แล้วบอกชื่อส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา

3. ครูยกตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง เพื่อหาความสัมพันธ์และสมการที่มีกราฟเป็นพาราโบลา เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลาให้ดังนี้

3.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา โดยกำหนดจุดโฟกัสและสมการโคเรคทริกซ์ให้ โดยครูเป็นผู้อธิบายและใช้คำตามประกอบ

3.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดโจทย์ให้หาสมการของพาราโบลา โดยกำหนดจุดโฟกัสและสมการโคเรคทริกซ์ให้ โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนดูแผนภูมินิยามของพาราโบลาอีกครั้งหนึ่ง
2. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของพาราโบลา เมื่อกำหนดจุดโฟกัส และสมการโคเรคทริกซ์ให้

การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัดชุด 3.1 หน้า 77 ข้อ 13, 14 และ 15	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 73%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 75%
	กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 73%

คาบที่ 6พาราโบลาจุดประสงค์

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการโคเรคตริกซ์ได้
เมื่อกำหนดความสัมพันธ์หรือสมการของพาราโบลาให้

เนื้อหา

การหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการโคเรคตริกซ์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดสมการของพาราโบลา $x^2 = -10y$ จงหาจุดโฟกัส และสมการโคเรคตริกซ์

วิธีทำ

$$x^2 = -10y$$

$$= 4\left(\frac{-10}{4}\right)y$$

$$= 4\left(\frac{-5}{3}\right)y$$

$$c = \frac{-5}{2} \quad \text{กราฟของพาราโบลาจะคว่ำลง}$$

$$\text{จุดโฟกัส คือ } \left(0, \frac{-5}{2}\right)$$

$$\text{สมการของโคเรคตริกซ์ คือ } y = -c = -\left(\frac{-5}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 2 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ แกน x เป็นแกนของพาราโบลา
และผ่านจุด $(-2, 5)$ จงหา

(1) สมการของพาราโบลา

(2) จุดโฟกัส และสมการของโคเรคตริกซ์

วิธีทำ

(1) สมการของพาราโบลาคือในรูป $y^2 = 4cx$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด $(-2, 4)$

$$4^2 = 4c(-2)$$

$$16 = -8c$$

$$c = -2$$

$$\begin{aligned}\text{สมการของพาราโบลา คือ } y^2 &= 4(-2)x \\ &= -8x\end{aligned}$$

(2) จุดโฟกัส คือ $(-2, 0)$

$$\text{สมการของไดเรกทริกซ์ คือ } x = -c = -(-2) = 2$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการของไดเรกทริกซ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = -6x\}$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการของไดเรกทริกซ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = -6x\}$
2. พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ แกน y เป็นแกนสมมาตร และผ่านจุด $(1, -3)$ จงหาสมการของพาราโบลารูปนี้

สื่อการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูถามนิยามของพาราโบลาให้นักเรียนตอบ
2. ครูทบทวนสูตรของสมการพาราโบลา เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน x และแกน y

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง การหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการไดเรกทริกซ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ หรือสมการของพาราโบลาให้ ดังนี้

1.1 ตัวอย่างที่ 1 ครูกำหนดโจทย์ คือ สมการของพาราโบลาให้หาจุดโฟกัส และสมการของไดเรกทริกซ์ โดยครูเป็นผู้อธิบายและใช้คำถามประกอบ

1.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดโจทย์ คือ จุดยอดของพาราโบลาแกนของพาราโบลา และจุดที่กราฟของพาราโบลามาน แล้วให้หาสมการของพาราโบลา จุดโฟกัส และสมการไดเรกทริกซ์ ให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด แล้วส่งตัวแทนออกมาเขียนบนกระดาน

- 1.3 ตัวอย่างที่ 3 ครูกำหนดโจทย์ คือ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา ให้หาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการโคเรคตริกซ์ โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

ครูสรุปการหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการของโคเรคตริกซ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ หรือสมการของพาราโบลาให้

การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม-ตอบ	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 70%
3. ทำแบบฝึกหัดชุด 3.2 หน้า 87 ข้อ 1, 2 และ 3	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 83%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 71% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 70%

คาบที่ 7

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

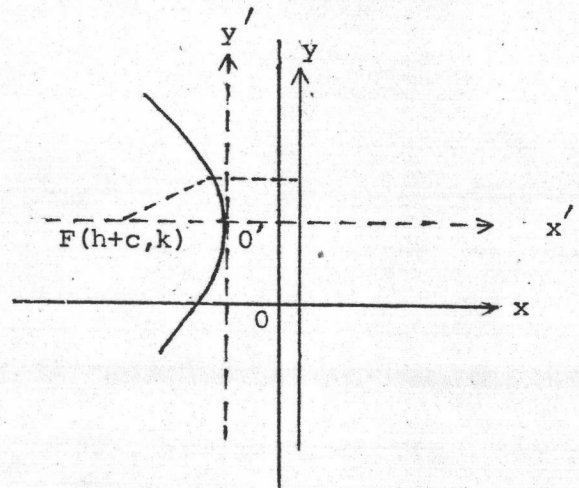
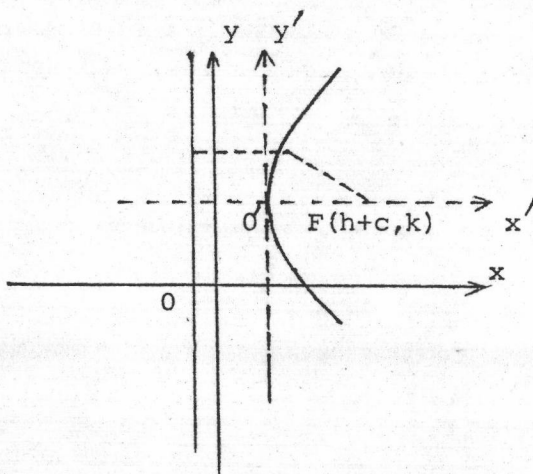
1. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้ เมื่อกำหนดจุดยอด จุดโฟกัส หรือสมการโคเรกตริกซ์ให้

2. หาจุดยอด จุดโฟกัส สมการของโคเรกตริกซ์ และแกนของพาราโบลาได้ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของพาราโบลาให้

เนื้อหา

หาสมการของพาราโบลา ซึ่งจุดยอดไม่ได้อยู่ที่จุด $(0,0)$

1. เมื่อแกนของพาราโบลานานกับแกน x กำหนดจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(h + c, k)$ สมการของโคเรกตริกซ์ คือ $x = h - c$



ย้ายแกนให้จุด $O(0, 0)$ เลื่อนไปที่จุด $O'(h, k)$

ระยะระหว่างจุดยอดกับจุดโฟกัสเท่ากับ c หน่วย

ดังนั้น สมการของพาราโบลาในแกนใหม่ คือ

$$(y')^2 = 4cx'$$

$$x' = x - h \text{ และ } y' = y - k$$

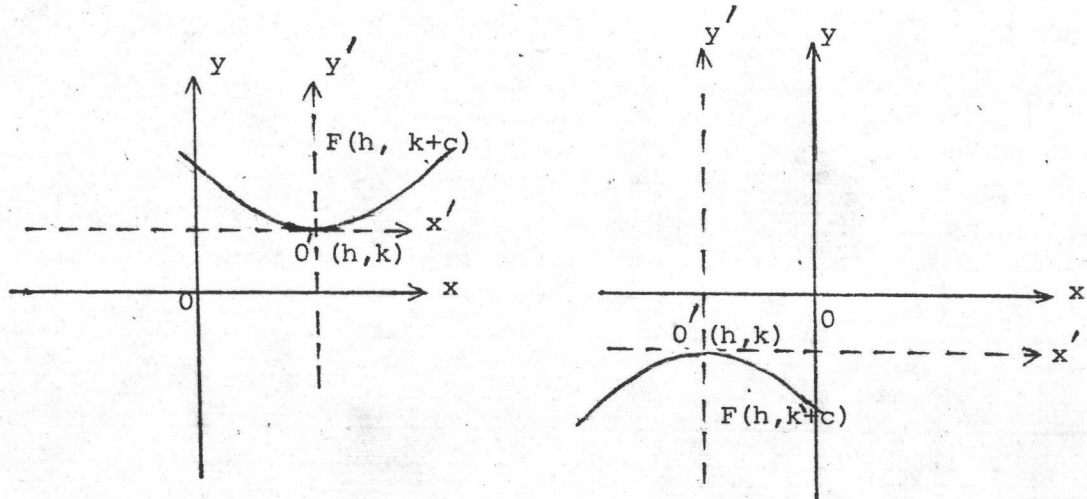
ดังนั้น สมการของพาราโบลาในแกนเดิม คือ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

ถ้า $c > 0$ พาราโบล่าจะเปิดทางขวา

ถ้า $c < 0$ พาราโบล่าจะเปิดทางซ้าย

2. เมื่อแกนของพาราโบลานานกับแกน y



ย้ายแกนให้จุด $O(0, 0)$ เลื่อนไปที่จุด $O'(h, k)$ และ $(h, k+c)$ เป็นจุด
โฟกัส จะได้สมการของโคเรคตริกซ์ คือ $y = k - c$

ระยะทางระหว่างจุดยอดกับจุดโฟกัส เท่ากับ c หน่วย

สมการของพาราโบล่าในแกนใหม่ คือ $(x')^2 = 4cy'$

เนื่องจาก $x' = x - h$ $y' = y - k$

ดังนั้น สมการของพาราโบล่าในแกนเดิม คือ

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

ถ้า $c > 0$ พาราโบล่าจะหงายขึ้น

ถ้า $c < 0$ พาราโบล่าจะคว่ำลง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของพาราโบล่า ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ และโฟกัสที่
จุด $(1, 3)$

วิธีทำ แกนของพาราโบลานานกับแกน x

ดังนั้น สมการของพาราโบล่าอยู่ในรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จุดยอดอยู่ที่ (h, k) และโฟกัสอยู่ที่จุด $(h + c, k)$

จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(1, 3)$

จะได้ $h = -2, k = 3$ และ $h + c = 1$

$$c = 1 + 2 = 3$$

สมการของพาราโบลา คือ $(y - 3)^2 = 4(3)(x + 2)$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดสมการของพาราโบลา $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$ จงหา

- (1) จุดยอด
- (2) จุดโฟกัส
- (3) สมการของไดเรกทริกซ์
- (4) เขียนกราฟของพาราโบลา

วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$

$$\text{จะได้ } (x - 4)^2 = 4(-2)(y + 1)$$

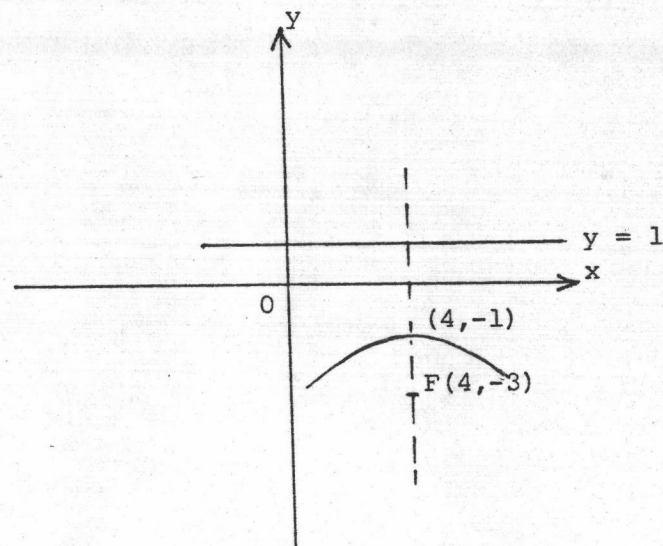
$$\text{ดังนั้น } h = 4, k = -1, c = -2$$

(1) จุดยอด คือ $(4, -1)$

$$(2) \quad c = -2$$

จุดโฟกัส คือ $(h, k + c) = (4, -1 - 2) = (4, -3)$

(3) สมการของไดเรกทริกซ์ คือ $y = k - c = -1 + 2 = 1$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 2)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(4, 2)$

สื่อการเรียนการสอน

แผนภูมิ แสดงการย้ายแกนของพาราโบลา

กิจกรรมการเรียนการสอนขั้นนำ

ครูทวนการหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ โดยใช้การถาม-ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูคิดแผนภูมิ ซึ่งแสดงจุดยอดอยู่ที่ (h, k) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน x ครูใช้การถาม-ตอบ จนนักเรียนสรุปสูตรได้ คือ

$$1.1 \quad (y - k)^2 - 4c(x - h)$$

$$1.2 \quad \text{สมการโคเรคทริกซ์ คือ } x = h - c$$

$$1.3 \quad \text{จุดโฟกัส คือ } (h + c, k)$$

2. ครูคิดแผนภูมิ ซึ่งแสดงจุดยอดอยู่ที่ (h, k) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน y ครูให้นักเรียนลองทำ แล้วสรุปดังนี้

$$2.1 \quad (x - h)^2 = 4c(y - k)$$

$$2.2 \quad \text{จุดโฟกัส คือ } (h, k + c)$$

$$2.3 \quad \text{สมการโคเรคทริกซ์ คือ } y = k - c$$

3. ครูยกตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง ดังนี้เพื่อหาสมการของพาราโบลา จุดยอดจุดโฟกัส และสมการองโคเรคทริกซ์ ดังนี้

3.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของพาราโบลา โดยกำหนดจุดยอด และจุดโฟกัส ครูเป็นผู้อธิบาย และใช้คำถามประกอบ

3.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดโจทย์เป็นสมการของพาราโบลาให้หาจุดยอดจุดโฟกัส สมการโคเรคทริกซ์ และเขียนกราฟของพาราโบลา โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปการหาสมการของพาราโบลา เมื่อกำหนดจุดยอด และจุดโฟกัสให้

2 . ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของทราโบลา โดยใช้การถาม-ตอบ แล้ว
ครูสรุปให้อีกครั้งหนึ่ง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1 . ลัง เกิดจากการถาม-ตอบ 2 . ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 . ทำแบบฝึกหัด 3.2 หน้า 88 ข้อ 3 , 4 และ 4 . ดูจากการทดสอบย่อย	1 . นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2 . นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3 . กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 81% 4 . กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 80% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 85%

คาบที่ 8

วงรี (Ellipse)

จุดประสงค์

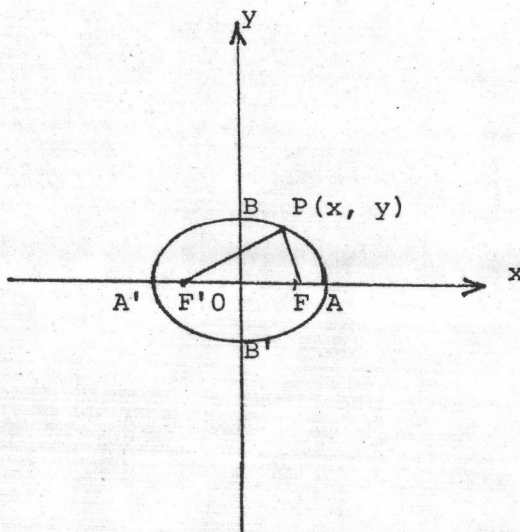
เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของวงรีได้
2. หาสมการทั่วไปของวงรีได้ เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและจุดยอดให้
3. หาจุดโฟกัสและจุดยอดได้ เมื่อกำหนดสมการทั่วไปของวงรีให้

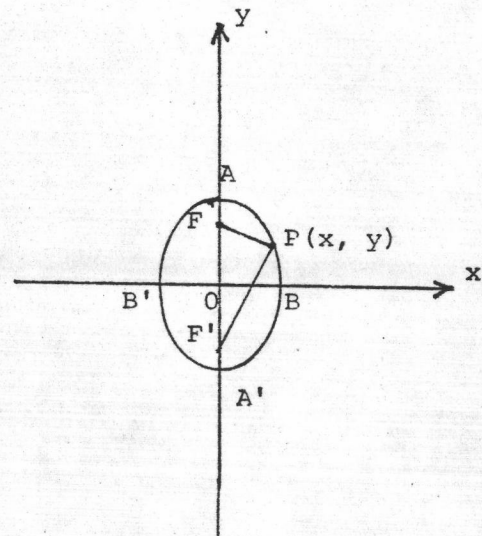
เนื้อหา

วงรี เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตัดกรวยเพียงส่วนเดียว โดยที่ระนาบนั้นไม่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวย และไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย

นิยามวงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่



(ก)



(ข)

ส่วนประกอบของวงรี

จุด A และจุด A' เรียกว่า จุดยอด

จุด $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ ในรูป (ก) และ $F(0, c)$, $F'(0, -c)$

ในรูป (ข) คือ จุดโฟกัสของวงรี โดยที่ $|FF'| = 2c$

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี จากนิยามวงรี

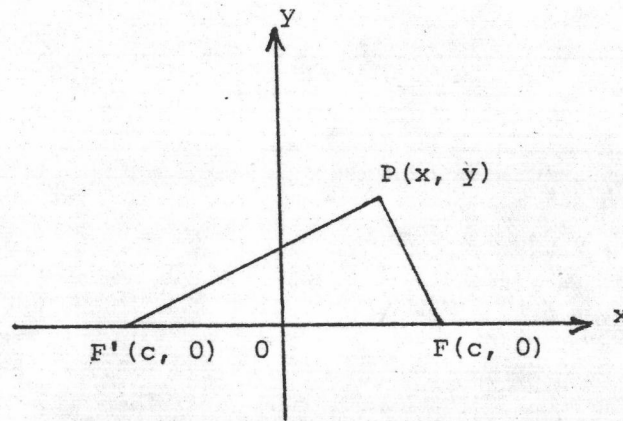
$|PF| + |PF'|$ เท่ากับค่าคงที่ ซึ่งมากกว่า $2c$ ให้ค่าคงที่เป็น $2a$ จะได้

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

จุด $(0, 0)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงรี

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองเรียกว่า แกนเอก (major axis) ของวงรี ($|AA'| = 2a$)

ส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลางของวงรีและมีจุดปลายอยู่บนวงรี เรียกว่า แกนโท (minor axis) ของวงรี ($|BB'| = 2b$)



ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ระยะระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2c$

จากนิยาม $|PF| + |PF'|$ เท่ากับค่าคงที่ซึ่งมากกว่า $2c$

ให้ $2a$ เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\begin{aligned} |PF'| + |PF| &= 2a \quad \text{โดยที่ } 2a > 2c \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง และจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\ x^2 + 4cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx^2 + c^2 + y^2 \\ 4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

หารด้วย $-4a$ ทั้งสองข้าง

$$-\frac{cx}{a} + a = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ a^2 - c^2 &= \left(x^2 - \frac{cx^2}{a^2}\right) + y^2 \\ a^2 - c^2 &= \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 \\ a^2 - c^2 &= \frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2} + y^2 \end{aligned}$$

หารด้วย $a^2 - c^2$ ทั้งสองข้าง

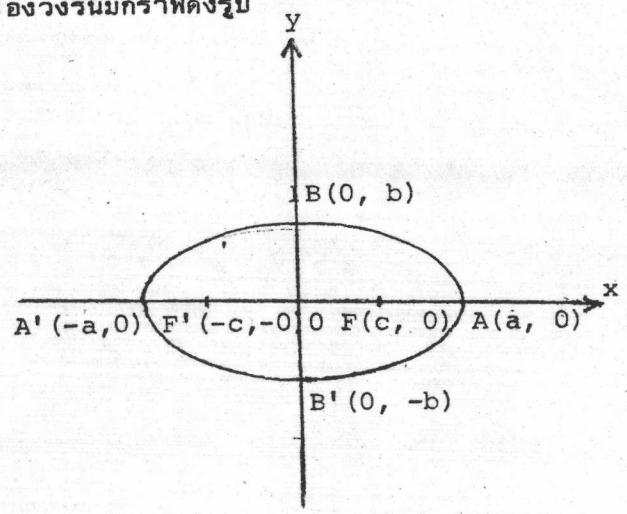
$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$$

$0 < c < a$ ดังนั้น $a^2 - c^2$ เป็นจำนวนบวก

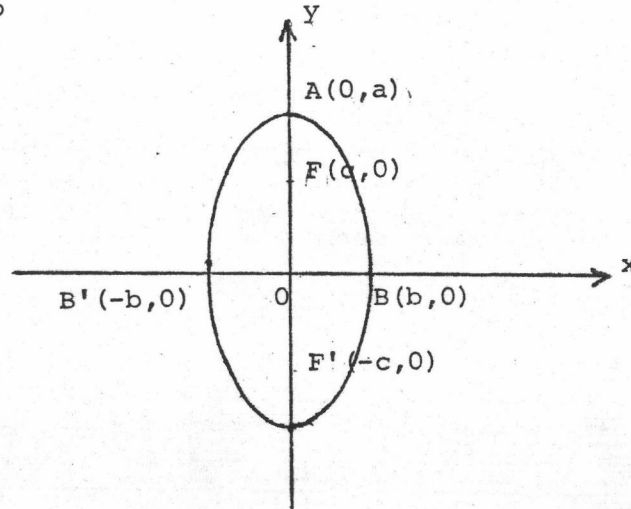
ให้ $a^2 - c^2 = b^2$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a^2 > b^2$$

สมการของวงรีนี้มีกราฟดังรูป



ทำนองเดียวกันจะได้ว่า วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน y ที่จุด $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$
 มีสมการเป็น $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a^2 > b^2$ และมีกราฟดังรูป



จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุด $(3, 0)$ และ $(-3, 0)$ เป็นจุดโฟกัส
 และมีผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ 10 หน่วย

วิธีทำ จากสมการวงรีซึ่งมีแกนเอกอยู่บนแกน x คือ

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ 2a &= 10, \quad a = 5, \quad c = 3 \\ \text{หาค่า } b &\because b^2 = a^2 - c^2 \\ &= 25 - 9 = 16 \\ b &= \pm 4 \end{aligned}$$

แทนค่า a, b ในสมการวงรี จะได้

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดความสัมพันธ์ $\{(x, y) / 16x^2 + 9y^2 = 144\}$ จงหาจุดยอด

โฟกัส และเขียนกราฟของวงรี

วิธีทำ จาก $16x^2 + 9y^2 = 144$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$$

$$a = 4, b = 3$$

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

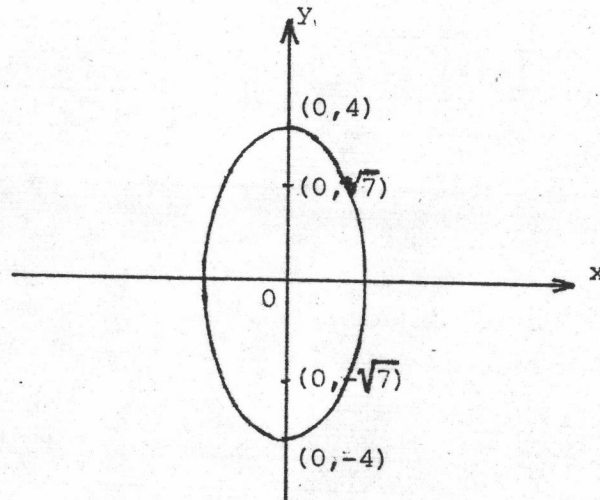
$$= 16 - 9 = 7$$

$$c = \pm\sqrt{7}$$

จากสมการวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน y และมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $F(0, \sqrt{7})$ และ $F'(0, -\sqrt{7})$

จุดยอดอยู่ที่ $A(0, 4)$ และ $A'(0, -4)$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -4)$ และผลบวกคงตัวเท่ากับ 12

สื่อการเรียนการสอน

1. แผนภาพรูปวงรี
2. แผนภูมิรูปวงรี

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เช่นตัวอย่าง จงหาระยะทางระหว่าง

จุด $A(a_1, b_1)$ และจุด $B(a_2, b_2)$ จะได้

$$AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

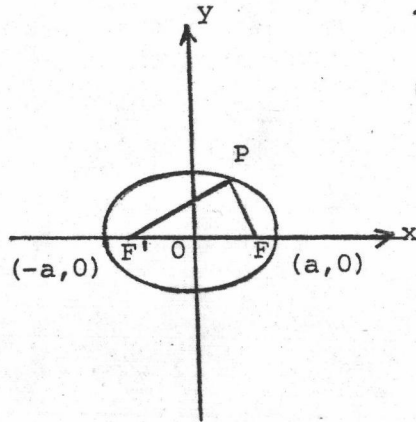
ขั้นตอน

1. ครูดิทรูปวงรี และเขียน $|PF'| + |PF| = 2a$ บนกระดาน

โดยที่ $2a > 2c$

แล้วใช้วิธีถ้าม-ตอบ จนนักเรียนสรุปได้ว่า

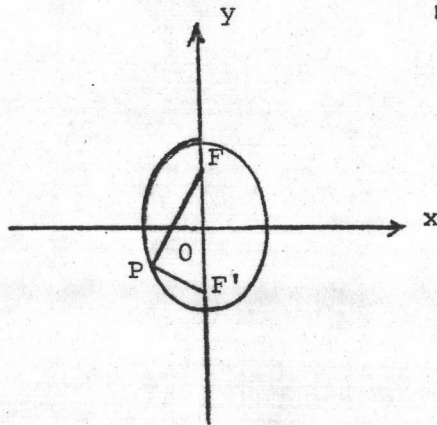
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ครูดิแฉนภูมิรูปวงรี และเขียน $|PF'| + |PF| = 2a$ บนกระดาน

แล้วใช้วิธีถ้าม-ตอบ จนสรุปได้ว่า

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$



2. ครุยกตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง คือ การหาสมการของวงรีเมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีให้ และการหาจุดโฟกัส จุดยอดของวงรี เมื่อกำหนดสมการทั่วไปของวงรีให้

2.1 ตัวอย่างที่ 1 ครูกำหนดใจทย์ คือ จุดโฟกัส 2 จุด และผลบวกของ

ระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง ให้หาสมการของวงรี โดยครูเป็นผู้อธิบายและใช้คำถามประกอบ

2.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดใจทย์ คือ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีให้หา

จุดยอด จุดโฟกัส และเขียนกราฟของวงรี โดยให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันคิด

ขั้นสรุป

- 1 . ครุคิดแผนภูมินิยามของวงรีให้นักเรียนดูอีกครั้งหนึ่ง
- 2 . ครูสรุปการหาสมการของวงรี เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและจุดยอดให้
- 3 . ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของวงรี เมื่อกำหนดจุดโฟกัส และจุดยอดมาให้

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
<ol style="list-style-type: none"> 1 . สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2 . ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 . ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.2 หน้า 91 ข้อ 5, 7 และ 8 4 . ดูจากการทดสอบย่อย 	<ol style="list-style-type: none"> 1 . นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2 . นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3 . กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 70% 4 . กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 68% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 83%

คาบที่ ๑

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาสมการของวงรีได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีให้
2. หาจุดโฟกัส จุดยอด และส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีได้ เมื่อกำหนดสมการของวงรีให้

เนื้อหา

1. การหาสมการของวงรี เมื่อกำหนดส่วนประกอบอื่น ๆ ของวงรีให้ เช่น กำหนดแกนเอกหรือแกนโท และจุดโฟกัสหรือจุดยอดมาให้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ แกนโทยาว 6 หน่วย โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, 0)$

วิธีทำ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, 0)$ แสดงว่าแกนเอกอยู่บนแกน x แกนโทยาว

6 หน่วย คือ $2b = 6$ $b = 3$

$$b = 3, c = 4$$

$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$a = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{สมการของวงรีคือ } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2. กำหนดความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี และให้นักเรียนหาจุดยอด จุดโฟกัส และเขียนกราฟวงรี

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดความสัมพันธ์ $\{(x, y) / 9y^2 + 4x^2 = 36\}$ ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี จงหาจุดโฟกัส แกนเอก แกนโท จุดยอดและเขียนกราฟวงรี

วิธีทำ จาก $9y^2 + 4x^2 = 36$

นำ 36 หารตลอด

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$$

แกนเอก คือ $a = 3$ แกนโท คือ $b = 2$

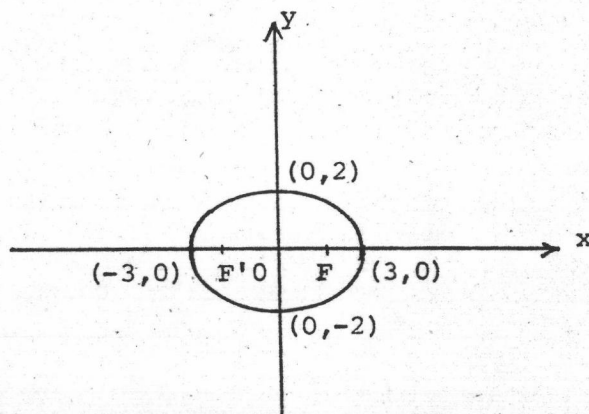
$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$c^2 = 9 - 4 = 5$$

$$c = \pm 5$$

จากสมการจะได้ว่าวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน x จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

และแกนโทอยู่บนแกน y โฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดสมการของวงรีว่า $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ จงหาจุดตัดแกน x และแกน y

จุดโฟกัส และเขียนกราฟวงรี

วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

จะได้ $a = 4, b = 3$

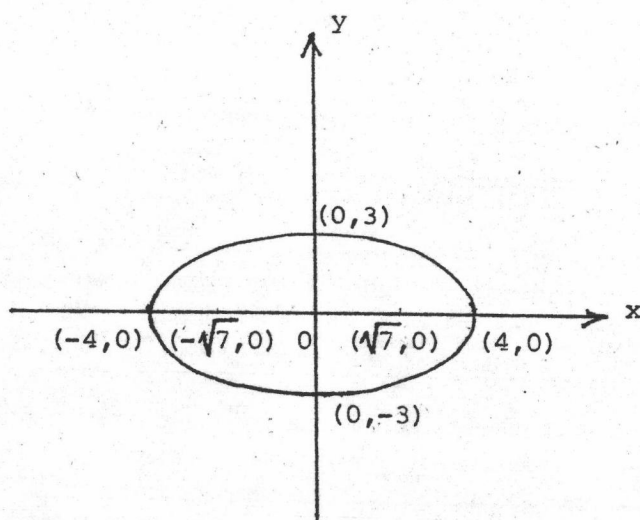
แสดงว่าแกนเอกขนานกับแกน x จุดตัดแกน x อยู่ที่ $(\pm 4, 0)$

แกนโทขนานกับแกน y จุดตัดแกน y อยู่ที่ $(0, \pm 3)$

หาค่า c

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= b^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \\ &= 16 - 9 \\ &= 7 \\ c &= \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y ยาว 6 หน่วย และครึ่งแกนโทยาว 2 หน่วย

สื่อการเรียนการสอน

แผนภูมิรูปวงรี

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนสมการรูปทั่วไปของวงรี เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ โดยใช้คำถาม-ตอบ ดังนี้

1. เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน x จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2$$

2. เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y จะได้

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2$$

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง เพื่อหาสมการของวงรีเมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี และหาจุดยอด จุดโฟกัส แกนเอก และแกนโท เมื่อกำหนดสมการของวงรีมาให้

1.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของวงรี เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางแกนโท และจุดโฟกัสมาให้ โดยครูเป็นผู้อธิบาย และใช้คำถามประกอบ

1.2 ตัวอย่างที่ 2 ครูกำหนดความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี ให้หาจุดโฟกัส จุดยอด แกนเอก แกนโท และเขียนกราฟของวงรี โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

1.3 ตัวอย่างที่ 3 ครูกำหนดสมการของวงรี ให้หาจุดตัดแกนทั้งสอง และจุดโฟกัส รวมทั้งเขียนกราฟของวงรี โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูถามขั้นตอนในการหาจุดยอด จุดโฟกัส เมื่อกำหนดสมการของวงรีมาให้

2. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของวงรี เมื่อกำหนดสมการของวงรีมาให้

การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 75%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.3 หน้า 103 ข้อ 1, 2 และ 3	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 76%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 75%
	กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 68%

คาบที่ 10

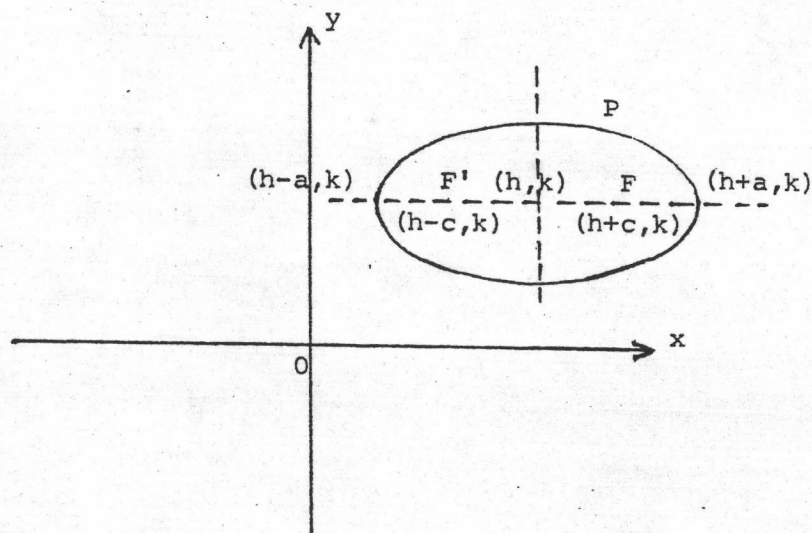
จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. ทาลมการวงรีได้เมื่อกำหนดส่วนประกอบของวงรีให้
2. บอกส่วนประกอบของวงรีได้เมื่อกำหนดสมการของวงรีให้

เนื้อหา

การหาสมการวงรีที่จุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$



วงรีนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h - c, k)$ และ $(h + c, k)$

ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ มีสมการ

อยู่ในรูป

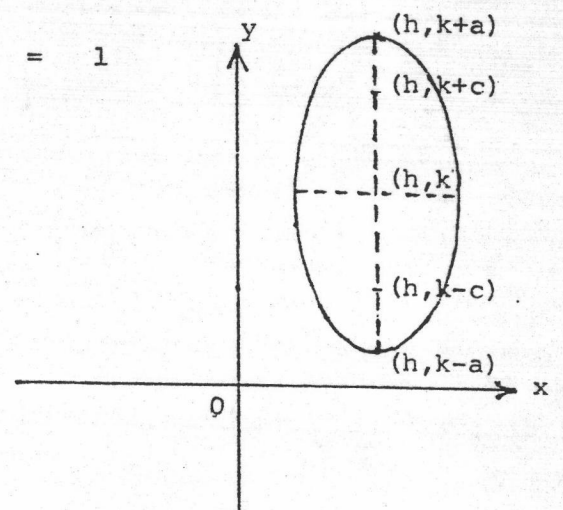
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ถ้าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(h, k - c)$ และ $(h, k + c)$

จะมีสมการ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงรี เมื่อโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, 5)$ แกนเอกยาว 12 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, 2)$

วิธีทำ แกนเอกผ่านจุด $(4, 5)$ และ $(4, 2)$ แสดงว่าแกนเอกขนานกับแกน y

แกนเอกยาว 12 หน่วย คือ $3a = 12$ $a = 6$

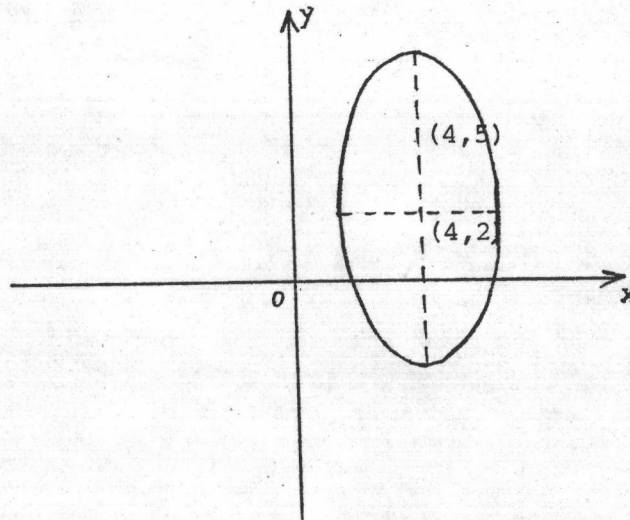
และ $k + c = 5$

$$c = 5 - 2 = 3$$

$$\text{หา } b \quad b^2 = a^2 - c^2$$

$$= 36 - 9 = 27$$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $\frac{(y - 2)^2}{36} + \frac{(x - 4)^2}{27} = 1$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด และความยาวของแกนทั้งสอง พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรีที่มีสมการเป็น $4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 6y + 9) = -61 + 16 + 81 = 36$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

จากสมการของวงรี แสดงว่าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(2, -3)$ และ

$a^2 = 9$, $b^2 = 4$ แกนเอกขนานกับแกน x

$$\begin{aligned}
 a^2 - c^2 &= b^2 \\
 c^2 &= a^2 - b^2 \\
 &= 9 - 4 = 5 \\
 c &= \pm\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(2 + \sqrt{5}, -3)$ และ $(2 - \sqrt{5}, 3)$

จุดยอดอยู่ที่ $(2 + 3, -3)$ และ $(2 - 3, -2)$ หรือ $(5, -3), (-1, -3)$

แกนเอกคือ $2a = 6$

แกนโทคือ $2b = 4$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส และความยาวของแกนทั้งสองของวงรีที่มีสมการ
เป็น $16(x + 1)^2 + 9(y - 5)^2 = 144$

สื่อการเรียนการสอน

แผนภาพของวงรีซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมี

1. แกนเอกขนานกับแกน x
2. แกนเอกขนานกับแกน y

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนสมการของวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ โดยใช้วิธีถาม-ตอบ

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการหาสมการของวงรีในรูปมาตรฐาน โดยให้นักเรียนดูแผนภาพ
รูปวงรี ซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่จุด $(0, 0)$ ใช้วิธีถาม-ตอบ จนนักเรียนสามารถสรุปสูตร
ทั่วไปของวงรีได้ คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} &= 1 \\
 \text{และ} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

2. ครูยกตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง ให้หาสมการของวงรีเมื่อกำหนดจุดโฟกัสหรือส่วนประกอบอื่น ๆ ของวงรีให้ และให้หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี เมื่อกำหนดสมการของวงรีให้

2.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของวงรี โดยกำหนดจุดโฟกัส จุดศูนย์กลาง และความยาวของแกนเอกมาให้ ครูใช้วิธีอธิบายแสดงเหตุ-ผลประกอบการถาม-ตอบ

2.2 ตัวอย่างที่ 2 ให้หาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด และความยาวของแกนทั้งสองของวงรี โดยกำหนดสมการของวงรีให้ ให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปสูตรของวงรี ซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$
2. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของวงรี

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.3 หน้า 104 ข้อ 4, 5 และ 6	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 67%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 68%
	กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 80%

คาบที่ 11

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

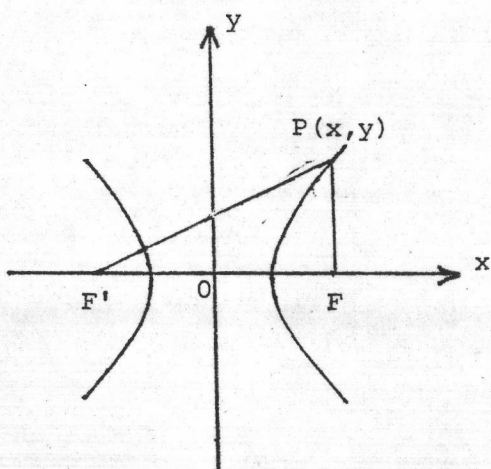
จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

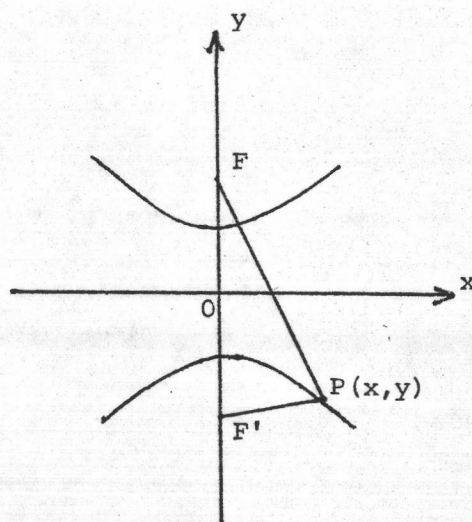
1. บอกนิยามของไฮเพอร์โบลาได้
2. หาสมการของไฮเพอร์โบลาได้ เมื่อกำหนดจุดคงที่ให้ 2 จุด และระยะคงที่ซึ่งเป็นผลต่างของระยะทางระหว่างจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่ทั้งสองให้
3. หาจุดโฟกัส จุดยอด จุดศูนย์กลาง ของกราฟไฮเพอร์โบลาได้ เมื่อกำหนดสมการของไฮเพอร์โบลาให้

เนื้อหา

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่



(ก)



(ข)

จากรูป (ก) และรูป (ข)

จุด F และ F' เรียกว่า จุดโฟกัส

ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา

จะได้ $||PF'| - |PF|| = k$, k เป็นค่าคงที่

ค่าของ $||PF'| - |PF||$ ต้องมีค่าน้อยกว่า $|FF'|$ เสมอ

คือค่าคงที่ จะต้องมิต่ำกว่าระยะระหว่างโฟกัสทั้งสอง

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัส เรียกว่า จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบล่า

จุดที่ไฮเพอร์โบล่าตัดกับเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัส เรียกว่า จุดยอดของไฮเพอร์โบล่า

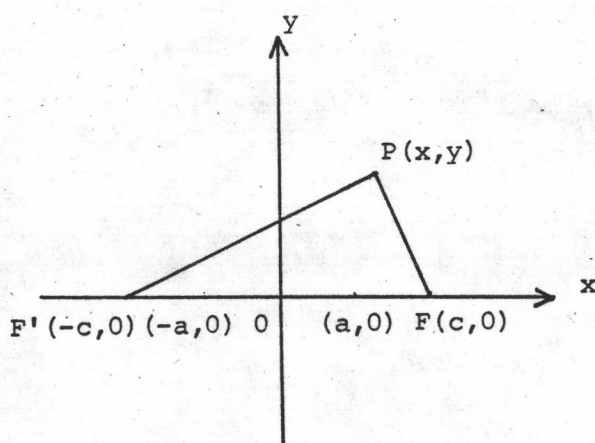
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า แกนตามขวางของไฮเพอร์โบล่า

ซึ่งยาว $2a$

เส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบล่า

เรียกว่า แกนสังยุค (conjugate axis) ซึ่งยาว $2b$

การหาสูตรทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบล่า



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่า

ระยะระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2c$

จากนิยาม $||PF'| - |PF||$ จะเท่ากับค่าคงที่ ซึ่งน้อยกว่า $2c$

ให้ $2a$ เป็นค่าคงที่ดังกล่าวเมื่อ $a < c$

ดังนั้น $||PF'| - |PF|| = 2a$ โดยที่ $2a < 2c$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง และจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$(x^2 + 2cx + c^2) + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + (x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$\text{หารด้วย } 4a \text{ ทั้งสองข้าง } \frac{cx}{a} - a^2 = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

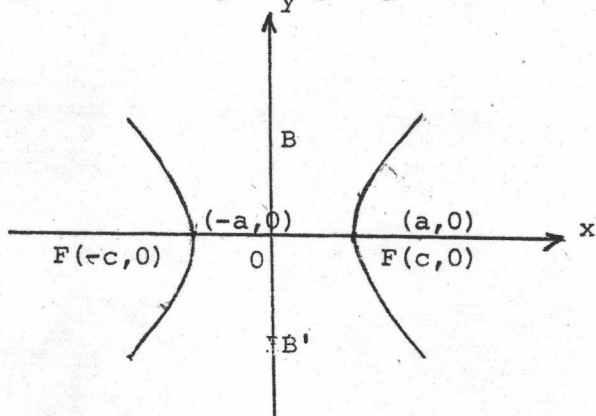
$$\frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

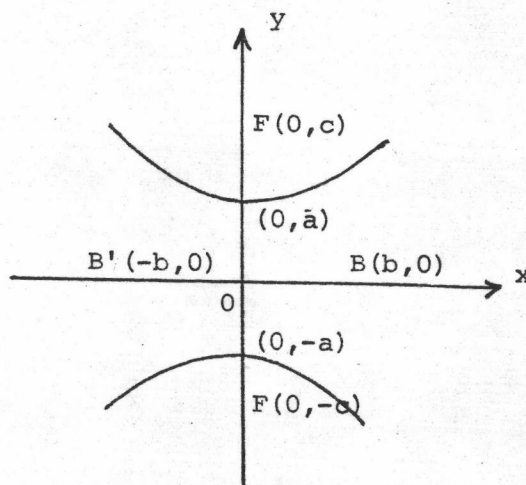
$$\frac{c^2 x^2 - a^2 x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{(c^2 - a^2) x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$



รูป (1)



รูป (2)

เนื่องจาก $0 < a < c$ ดังนั้น $c^2 - a^2$ เป็นจำนวนบวก

ให้ $c^2 - a^2 = b^2$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ และมีผลต่าง

คงที่เท่ากับ $2a$ มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$

และสมการนี้มีกราฟดังรูป (1)

จากรูปจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเรียกว่า จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือ

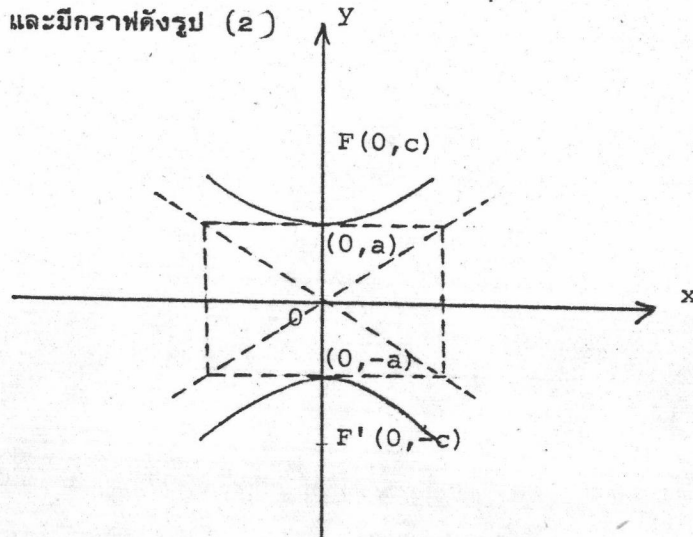
จุด $(0, 0)$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าไฮเพอร์โบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -c)$ และ $(0, c)$

และผลต่างคงที่เป็น $2a$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$

และมีกราฟดังรูป (2)



ข้อสังเกต

1. ถ้าลากเส้นผ่านจุดยอดให้ขนานกับแกนสังยุค และลากเส้นตรงผ่านจุดปลายของแกนสังยุคขนานกับแกนตามขวาง จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป เส้นตรงที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะช่วยให้การเขียนกราฟง่ายขึ้น เนื่องจากกราฟของไฮเพอร์โบล่าจะอยู่ในขอบเขตของเส้นตรง 2 เส้นนี้ และจะเห็นว่าปลายเส้นโค้งไฮเพอร์โบล่าจะโค้งเข้าหาเส้นตรงทั้งสอง แต่จะไม่ตัดเส้นตรงทั้งสองนั้น

ดังนั้นในการเขียนกราฟไฮเพอร์โบล่า จะสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวก่อน แล้วลากเส้นตรงในแนวเส้นทแยงมุมเพื่อช่วยในการเขียนกราฟ

2. ในกรณีที่ไฮเพอร์โบลามีความยาวของแกนสังยุคเท่ากับความยาวของแกนตามขวาง เรียกไฮเพอร์โบล่าชนิดนี้ว่า ไฮเพอร์โบล่ามุมฉาก เช่น ไฮเพอร์โบล่าที่มีสมการเป็น

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{หรือ} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่าไปยังจุด $(3, 0)$ และ $(-3, 0)$ เท่ากับ 4

วิธีทำ $2a = 4 \quad a = 2$

$c = 3$

หาค่า $b \quad b^2 = c^2 - a^2$
 $= 3^2 - 2^2$
 $= 9 - 4 = 5$

สมการของไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดสมการ $9x^2 - 16y^2 = 144$ จงหาจุดยอด และจุดโฟกัส
 ของสมการไฮเพอร์โบลานี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \quad a = \pm 4$$

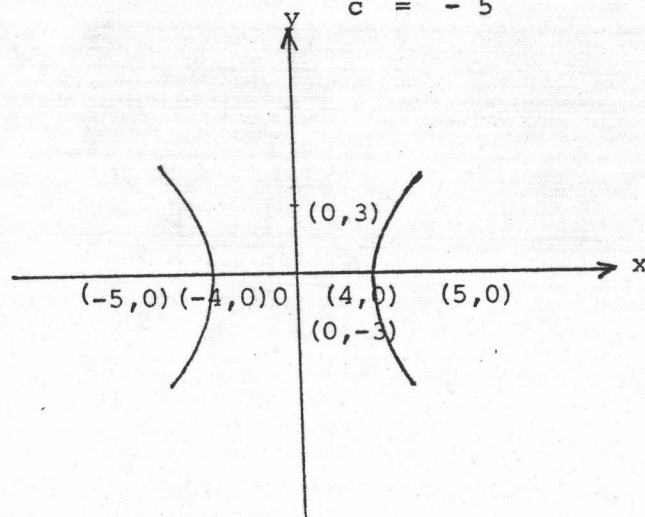
$$b^2 = 9 \quad b = \pm 3$$

$$c^2 = c^2 - a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 16 + 9 = 25$$

$$c = \pm 5$$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่า ไปยังจุด $(0, 5)$ และ $(0, -5)$ เท่ากับ 9

สื่อการเรียนการสอน

1. กรวยกลมตรงสำเร็จรูป
2. แผนภูมิ ของไฮเพอร์โบล่า

กิจกรรมการเรียนการสอน

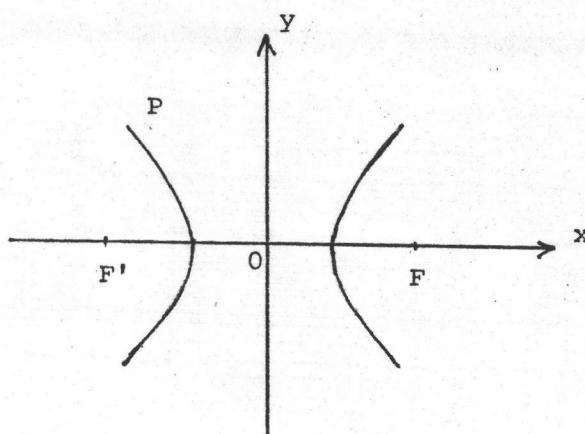
ขั้นนำ

ครูใช้กรวยกลมตรง 2 อัน ซึ่งเป็นสื่อการสอนสำเร็จรูปใช้ต่อกันที่จุดยอด ให้นักเรียนเขียนหน้าตัดซึ่งเกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบทั้งสองส่วนของกรวยลงในกระดาษของทุกคน แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปว่า รูปใดถูก แล้วเขียนรูปที่ถูกลงบนกระดาน ครูถามนักเรียนว่า กราฟรูปนี้เรียกว่าอะไร

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปว่า ไฮเพอร์โบล่า เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตัดทั้งสองส่วนของกรวย

ขั้นสอน

1. ครูคิดแผนภาพ รูปไฮเพอร์โบล่า ในกระดานดังรูป



2. ครูให้ตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า และให้หาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบล่า

2.1 ตัวอย่างที่ 1 ครูกำหนดจุดโฟกัส และผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ให้หาสมการของไฮเพอร์โบลา โดยครูอธิบายและใช้การถามตอบ

2.2 ตัวอย่างที่ 2 ให้หาจุดยอดและจุดโฟกัส พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดสมการของไฮเพอร์โบลาให้ โดยให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปนิยามของไฮเพอร์โบลา โดยการใช้คำถามแล้วคิดแผนภูมินิยามของไฮเพอร์โบลาให้นักเรียนอ่านอีกครั้งหนึ่ง

2. ครูสรุปสูตรของไฮเพอร์โบลา และการใช้สูตร โดยใช้การถามตอบ

3. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 75%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.3 หน้า 104-105 ข้อ 7, 8 และ 9	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 78%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 80% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 73%

คาบที่ 12

ไฮเพอร์โบล่า (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถหาสมการของไฮเพอร์โบล่าได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบล่าให้

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 4)$ และแกนสังยุคยาว 4 หน่วย

วิธีทำ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, 4)$ $c = 4$

แกนสังยุคยาว = 4 หน่วย $2b = 4$ $b = 2$

หา a $b^2 = c^2 - a^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$= 16 - 4 = 12$

สมการไฮเพอร์โบล่าคือ $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-4, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 0)$

วิธีทำ จุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ แสดงว่า $a = 4$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 0)$ แสดงว่า $c = 5$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

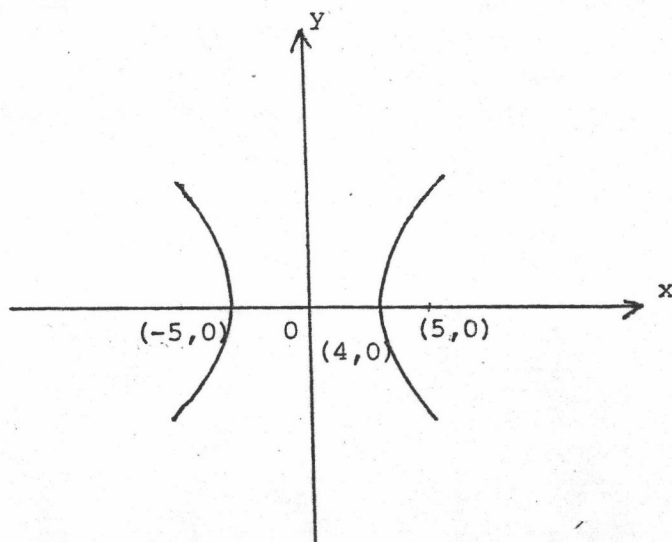
หาค่า b $b^2 = c^2 - a^2$

$= 5^2 - 4^2$

$= 25 - 16 = 9$

สมการของไฮเพอร์โบล่า คือ

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



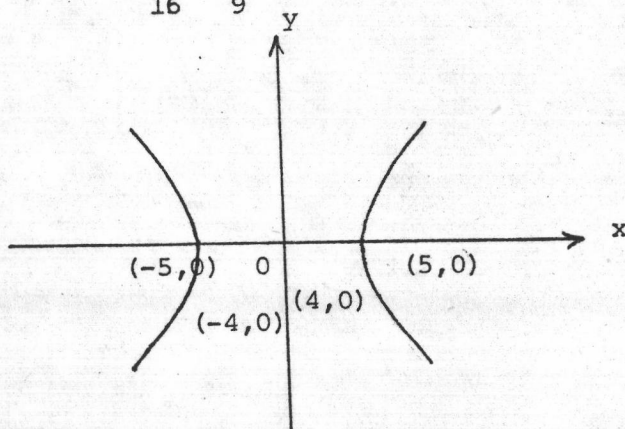
ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ แกนตามขวางขนานกับแกน x ยาว 8 หน่วย และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

วิธีทำ $2a = 8$ $a = 4$

และ $2b = 6$ $b = 3$

สมการของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ ของความสัมพันธ์

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 2 \right\}$$

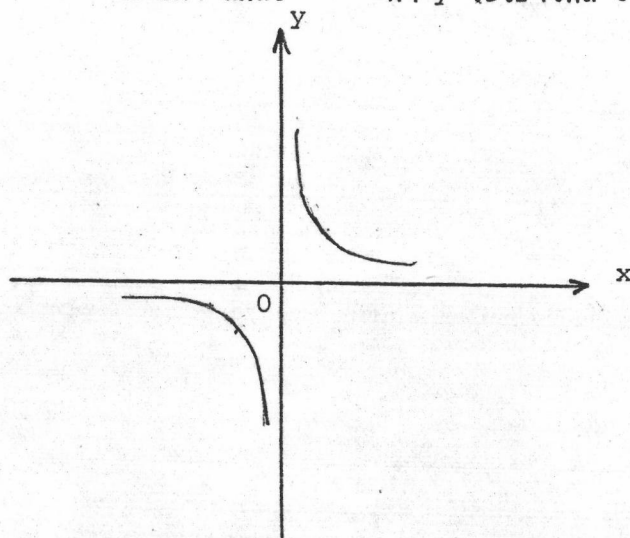
วิธีทำ สร้างตารางของ (x, y) ซึ่งสอดคล้องกับ $xy = 2$

$$y = \frac{2}{x}$$

x	1	2	10	20	30	-1	-2	-10	-20
y	2	1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{30}$	-2	-1	$-\frac{2}{10}$	$-\frac{2}{20}$

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่า y จะเข้าใกล้ 0

x มีค่า ลดลง ค่า y จะเข้าใกล้ 0



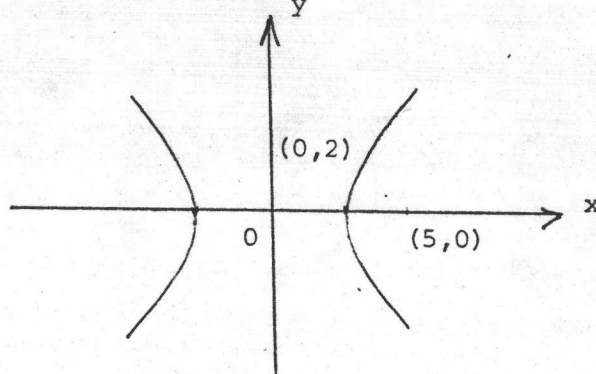
หมายเหตุ ไฮเพอร์โบลามีสมการอยู่ในรูป $xy = k$ เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ถ้า $k > 0$ กราฟของไฮเพอร์โบล่าจะอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และ 3

$k < 0$ กราฟของไฮเพอร์โบล่าจะอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 และ 4

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จากรูปจงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า



สื่อการเรียนรู้การสอน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนนิยามและสูตรของไฮเพอร์โบล่า

ขั้นสอน

1. ครูให้ตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดคส่วนประกอบต่าง ๆ ให้

1.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัส และแกนสังยุคให้ ครูอธิบายและใช้การถาม-ตอบ

1.2 ตัวอย่างที่ 2 ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดจุดยอดจุดหนึ่งและจุดโฟกัสให้ ครูให้นักเรียนลองช่วยกันคิด แล้วส่งตัวแทนออกมาเขียนบนกระดานดำ

1.3 ตัวอย่างที่ 3 ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและความยาวของแกนตามขวางกับแกนสังยุคให้ ครูให้นักเรียนทุกคนลองทำ

1.4 ตัวอย่างที่ 4 ให้เขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ ของความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบล่า ครูให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปการหาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลามาให้โดยการถาม-ตอบ

2. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบล่า แล้วให้นักเรียนช่วย

กันสรุป

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.4 หน้า 117 ข้อ 1 - 4 4. ดูจากการทดสอบย่อย	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 81% 4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 75% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 87%

คาบที่ 13

ไฮเพอร์โบล่า (ต่อ)

จุดประสงค์

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาสมการของไฮเพอร์โบล่า ที่มีจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่จุด $(0, 0)$ ได้
2. หาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอดของไฮเพอร์โบล่าได้ เมื่อกำหนดสมการ

ของไฮเพอร์โบล่าเป็น

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

และ
$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

เนื้อหา

หาสูตรทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบล่า เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) มี 2 กรณี

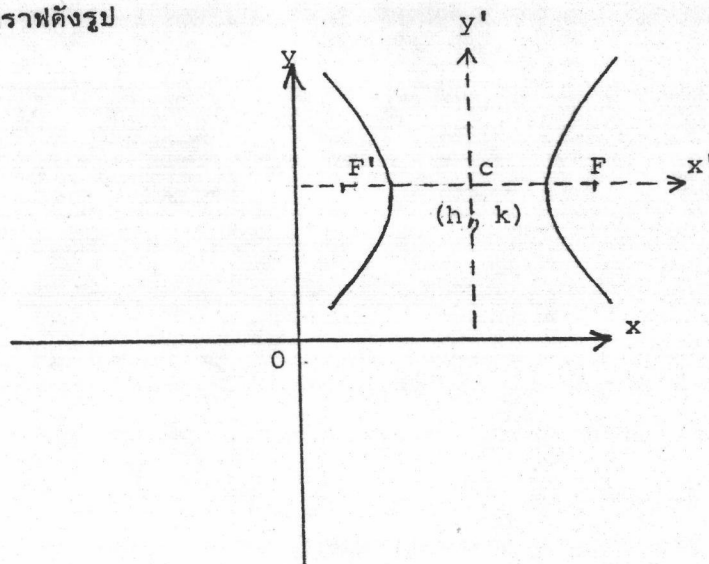
1. แกนตามขวางขนานกับแกน x จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h + c, k)$ และ $(h - c, k)$

และผลต่างของระยะจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่าไปยังโฟกัสทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ

$2a$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{(x - y)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ โดย } b^2 = c^2 - a^2$$

และมีกราฟดังรูป



$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

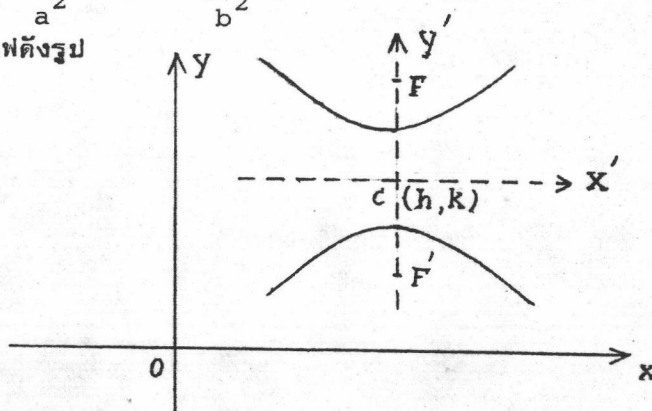
2. แกนตามขวางขนานกับแกน y จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h, k + c)$ และ $(h, k - c)$

และผลต่างของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ $2a$ จะมี

สมการเป็น

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \text{ โดย } b^2 = c^2 - a^2$$

และมีกราฟดังรูป



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาร่วมทั้งเขียนกราฟ เมื่อกำหนดจุดยอด

จุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, 3)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, 3)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

วิธีทำ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

จะเห็นว่าแกนของไฮเพอร์โบลาร่วมกับแกน x

$$\text{จุดยอดอยู่ที่ } (1, 3) \text{ คือ } h + a = 1$$

$$a = 2$$

$$\text{จุดโฟกัสอยู่ที่ } (2, 3) \text{ คือ } h + c = 2$$

$$c = 3$$

$$\text{หาค่า } b \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$\text{แทนค่า } b^2 = 9 - 4 = 5 \text{ โดย } b = \pm \sqrt{5}$$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{5} = 1$$

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2. แกนตามขวางขนานกับแกน y จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h, k + c)$ และ $(h, k - c)$ และผลต่างของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ $2a$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดย } b^2 = c^2 - a^2$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของไฮเพอร์โบลารวมทั้งเขียนกราฟ เมื่อกำหนดจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, 3)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, 3)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

วิธีทำ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

จะเห็นว่าแกนของไฮเพอร์โบลารวมกับแกน x

จุดยอดอยู่ที่ $(1, 3)$ คือ $h + a = 1$

$$a = 2$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2, 3)$ คือ $h + c = 2$

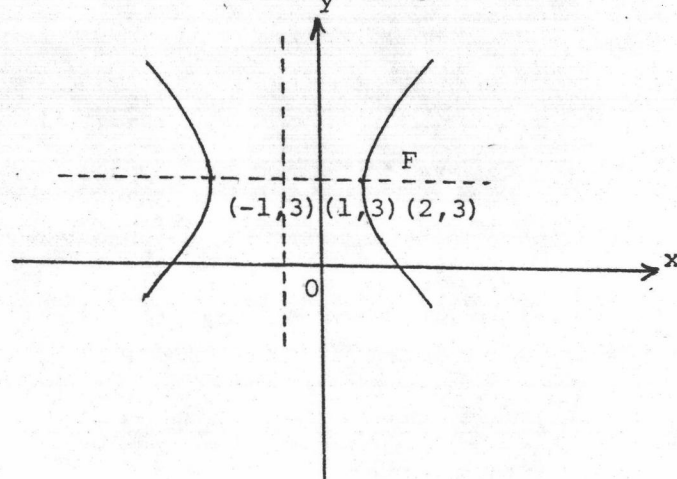
$$c = 3$$

หาค่า b $b^2 = c^2 - a^2$

$$\text{แทนค่า } b^2 = 9 - 4 = 5 \quad b = \frac{\pm}{5}$$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส พร้อมเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา
ที่มีสมการเป็น $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 3)$, $a^2 = 9$, $b^2 = 16$ แกนตามขวาง

ขนานกับแกน y

$$b^2 = c^2 - a^2$$

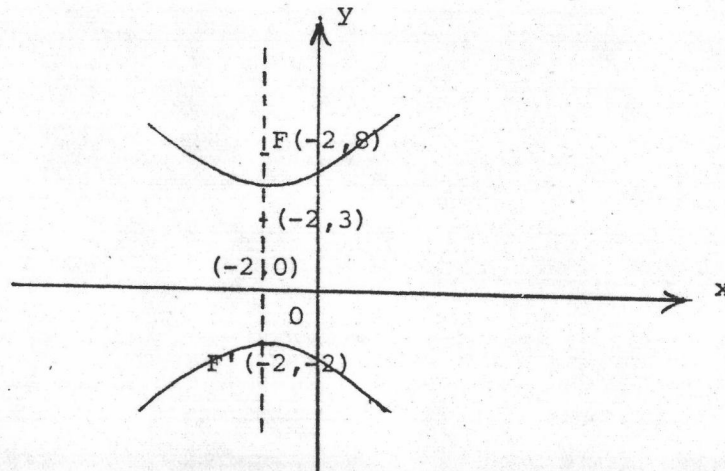
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 9 + 16 = 25$$

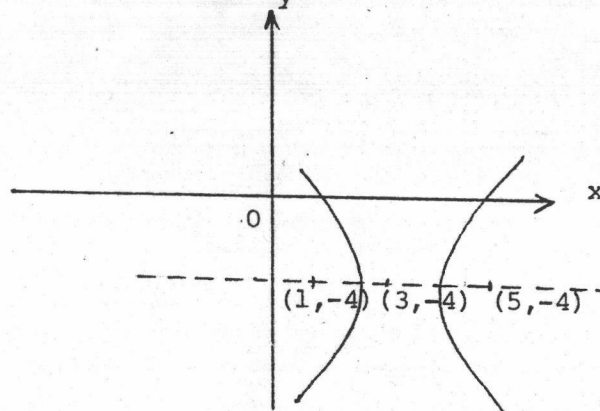
$$c = \pm 5$$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, 3 \pm 5)$ คือ $(-2, -2)$ และ $(-2, 8)$

จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, 3 \pm 3)$ คือ $(-2, 0)$ และ $(-2, 6)$



โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง จากรูปหาสมการไฮเพอร์โบลา



สื่อการเรียนการสอน

แผนภูมิ รูปไฮเพอร์โบล่า

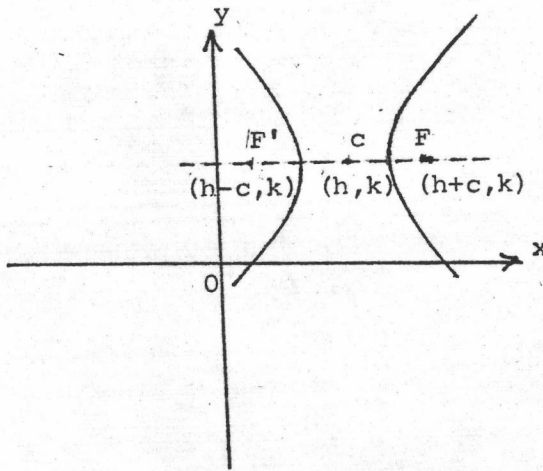
กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

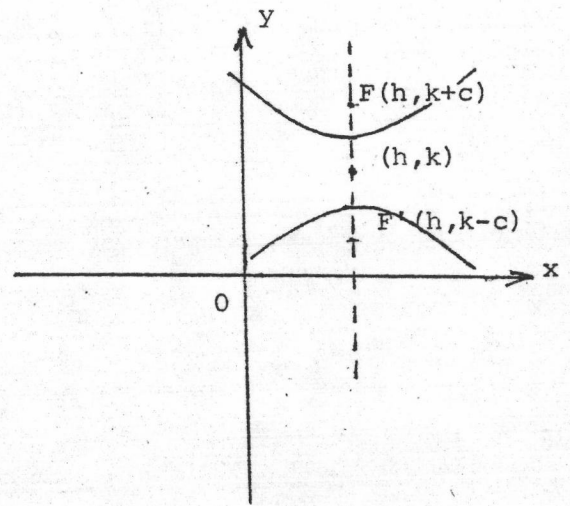
ครูทบทวนการหาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนดูแผนภูมิ ไฮเพอร์โบล่า เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) ตามรูป



รูป 1



รูป 2

2. ครูให้ตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$ และให้หาจุดยอด จุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า

2.1 ตัวอย่างที่ 1 ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดจุดยอดจุดหนึ่ง จุดโฟกัสจุดหนึ่ง และจุดศูนย์กลางให้ ครูอธิบายและใช้การถาม-ตอบ

2.2 ตัวอย่างที่ 2 กำหนดสมการของไฮเพอร์โบล่า ให้หาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบล่า ครูให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปสูตรของสมการไฮเพอร์โบล่า ซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$ โดย

การถามตอบ

2. ครูถามการหาสมการของไฮเพอร์โบลา เมื่อโจทย์กำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ มาให้

3. ครูถามขั้นตอนในการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา จนนักเรียนสามารถสรุปได้

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.4 หน้า 118 ข้อ 6 - 8 4. ดูจากการทดสอบย่อย	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงถูกต้องประมาณ 80% 3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 70% 4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 76% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้องประมาณ 73%

คาบที่ 14

ไฮเพอร์โบล่า (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส และเขียนกราฟคร่าว ๆ ของไฮเพอร์โบล่าที่กำหนดสมการได้ในรูป $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ A, B, C, D และ E เป็นจำนวนจริงใด ๆ ได้

เนื้อหา

$$\text{จากสมการ } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2ky - a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + (b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2) = 0 \quad (*)$$

$$\text{ให้ } A = b^2, B = a^2, C = -2b^2h, D = 2a^2k, E = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$$

จะเขียนสมการ (*) ใหม่ได้เป็น

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

เมื่อ A, B, C, D และ E เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

ไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีสมการ $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

$$\text{จะได้ } 9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 124 + 36 - 16 = 144$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

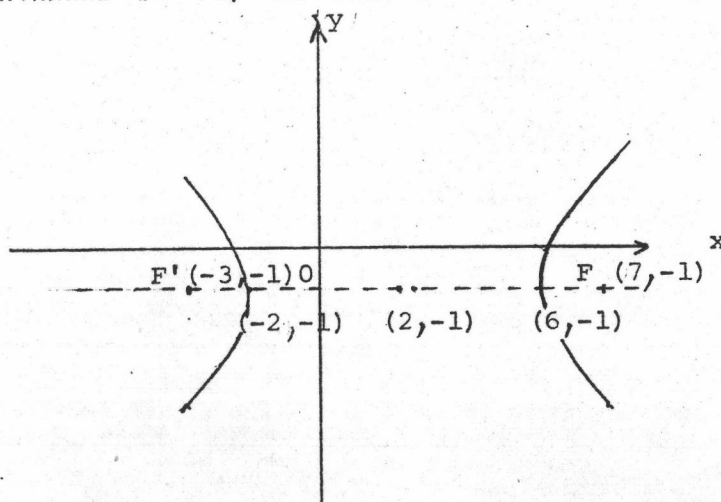
$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

จุดศูนย์กลาง คือ $(2, -1)$, $a = 4$, $b = 3$

จุดยอดคือ $(h \pm a, -1)$ คือ $(2 \pm 4, -1) = (6, -1), (-2, -1)$

$$\begin{aligned}
 \text{หาค่า } c \quad b^2 &= c^2 - a^2 \\
 c^2 &= a^2 + b^2 \\
 &= 16 + 9 = 25 \\
 c &= \pm 5
 \end{aligned}$$

จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, -1)$ จะได้ $(2 \pm 5, -1)$ คือ $(7, -1), (-3, -1)$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 1)$

จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, 1)$ และขนาดครึ่งแกนสังยุคเท่ากับ 4

วิธีทำ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, 1)$

$$h + a = 2$$

$$-4 + a = 2$$

$$a = 6$$

ครึ่งแกนสังยุค คือ $b = 4$

สมการของไฮเพอร์โบล่า คือ

$$\frac{(x + 4)^2}{36} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส ของไฮเพอร์โบล่าที่มีสมการเป็น

$$5y^2 - 4x^2 + 8x + 40y + 44 = 0$$

สื่อการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนสูตรของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งจุดศูนย์กลางไม่ได้อยู่ที่ $(0, 0)$

ขั้นสอน

1. ครูเขียนสูตรของไฮเพอร์โบล่า บนกระดานดำ คือ สูตร

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

แล้วใช้การอธิบายประกอบการถาม-ตอบ จนนักเรียนสรุปสมการของไฮเพอร์โบล่า

รูปทั่วไปได้คือ

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

2. ครูให้นักเรียนลองหาสูตรทั่วไปของไฮเพอร์โบล่า จากสูตร

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

3. ครูให้ตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง ให้หาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส และหาสมการของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบล่าให้

3.1 ตัวอย่างที่ 1 กำหนดสมการของไฮเพอร์โบล่า ให้หาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และจุดโฟกัส พร้อมทั้งเขียนกราฟ ครูอธิบายและใช้การถามตอบ

3.2 ตัวอย่างที่ 2 กำหนดจุดศูนย์กลาง จุดยอด และความยาวครึ่งแกนสังยุค

ให้หาสมการของไฮเพอร์โบล่า. ครูให้นักเรียนทุกคนลองทำ

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปสมการรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบล่า

2. ครูสรุปขั้นตอนในการหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบล่า เมื่อกำหนดสมการของไฮเพอร์โบล่าในรูปทั่วไปให้ โดยการถาม-ตอบ

3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปขั้นตอนในการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบล่า

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1 . สังเกตจากการตอบของนักเรียน 2 . ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 . ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3-4 หน้า 118 ข้อ 9 , 10 และ 12 4 . ดูจากการทดสอบย่อย	1 . นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2 . นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3 . กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้อง ประมาณ 65% 4 . กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 73% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อยถูกต้อง ประมาณ 80%

คาบที่ 15

บททวน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกชื่อรูปทรงเรขาคณิตที่เกิดจากระนาบตัดกรวยกลมในลักษณะต่าง ๆ ได้
2. บอกนิยามและสูตรของวงกลมได้
3. หาสมการของวงกลมได้ เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีให้
4. บอกนิยามและสูตรของพาราโบลาได้
5. หาสมการของพาราโบลาได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีให้
6. บอกนิยามและสูตรของวงรีได้
7. หาสมการของวงรีได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา ให้
8. บอกนิยามและสูตรของไฮเพอร์โบลาได้
9. หาสมการของไฮเพอร์โบลาได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลาให้

เนื้อหา

ครูสรุปสูตรต่าง ๆ ของ "ภาคตัดกรวย" ดังต่อไปนี้

1. วงกลม

นิยาม วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

$$\text{สูตร } 1. (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$2. x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2. พาราโบลา

นิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

$$\text{สูตร } 1. (y - k)^2 = 4c(x - h)$$

จุดยอดอยู่ที่ (h, k)

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h + c, k)$

สมการโคเรกตริกซ์คือ $x = h - c$

แกนของพาราโบลายานานกับแกน x

ถ้าจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จะได้สูตรคือ

$$y^2 = 4cx$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(c, 0)$

สมการโคเรกตริกซ์คือ $x = -c$

แกนของพาราโบลาคือแกน x

สูตรในรูปทั่วไป

$$ay^2 + By + Cx + D = 0$$

$$2. (x - h)^2 = 4c(y - k)$$

จุดยอดอยู่ที่ (h, k)

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h, k + c)$

สมการโคเรกตริกซ์ คือ $y = k - c$

แกนของพาราโบลายานานกับแกน y

ถ้าจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จะได้สูตร

$$x^2 = 4cy$$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, c)$

สมการโคเรกตริกซ์คือ $y = -c$

แกนของพาราโบลาคือแกน y

สูตรในรูปทั่วไป

$$Ax^2 + Bx^2 + Cy + D = 0$$

3. วงรี

นิยาม วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ

ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่

$$1. \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad a^2 > b^2 \quad b^2 = a^2 - c^2$$

มีแกนเอก (2a) ขนานกับแกน x

แกนโท (2b) ขนานกับแกน y

จุดโฟกัสคือ $F'(h - c, k)$ และ $F(h + c, k)$

จุดยอดคือ $A'(h - a, k)$, $A(h + a, k)$

จุดศูนย์กลางคือ (h, k)

ถ้าจุด $(h, k) = (0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2. \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad a^2 > b^2$$

มีแกนเอก (2a) ขนานกับแกน y

แกนโท (2b) ขนานกับแกน x

จุดยอดคือ $A'(h, k - a)$, $A(h, k + a)$

จุดโฟกัสคือ $F'(h, k - c)$, $F(h, k + c)$

จุดศูนย์กลางคือ (h, k)

ถ้าจุด $(h, k) = (0, 0)$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

แกนเอกอยู่บนแกน y และแกนโทอยู่บนแกน x

4. ไฮเพอร์โบล่า

นิยาม ไฮเพอร์โบล่า คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทาง

จากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัว

$$\text{สูตร } 1. \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

แกนตามขวางขนานกับแกน x

โฟกัสอยู่ที่จุด $(h - c, k)$ และ $(h + c, k)$

จุดยอดอยู่ที่ $(h - a, k)$ และ $(h + a, k)$

$$2. \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

แกนตามยาวขนานกับแกน y

โฟกัสอยู่ที่จุด $(h, k + c)$ และ $(h, k - c)$

จุดยอด $(h, k + z)$ และ $(h, k - z)$

สื่อการเรียนการสอน

1. กรวยกลมสำเร็จรูปที่แสดงถึงการตัดด้วยระนาบ
2. แผนภูมิของนิยามและสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

ครูทบทวนการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ โดยถาม-ตอบ แล้วให้นักเรียน
สรุบนิยาม และสูตรของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา แล้วให้นักเรียนดูแผนภูมิ
ของนิยามและสูตร ให้นักเรียนดูอีกครั้งหนึ่ง

การวัดและประเมินผล

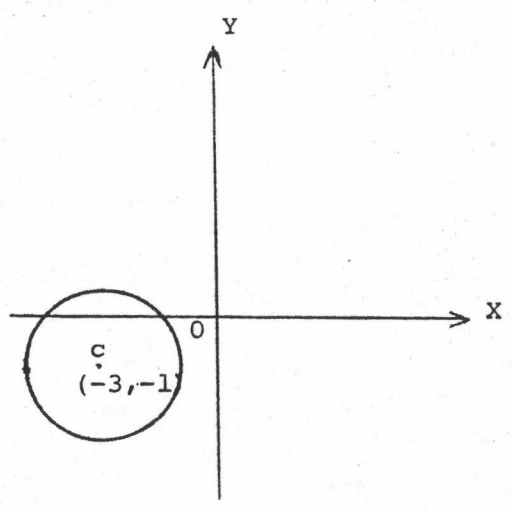
การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 3.4 หน้า 119 ข้อ 13 - 16	3. กลุ่มที่ 1 นักเรียนทำการบ้านถูกต้องประมาณ 80%
4. ดูจากการทดสอบย่อย	4. กลุ่มที่ 2 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อย ทำถูกต้องประมาณ 82% กลุ่มที่ 3 นักเรียนทำข้อทดสอบย่อย ทำถูกต้องประมาณ 79%

แบบทดสอบย่อย วิชา ค.012 เรื่อง "ภาคตัดกรวย"

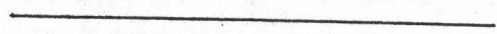
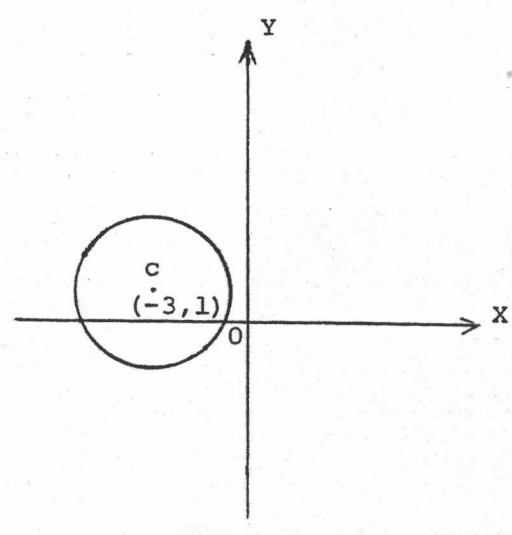
ของ

กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน

п.



v.



คาบที่ 2

1. สมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 4)$ รัศมียาว 2 หน่วย คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ ข. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$

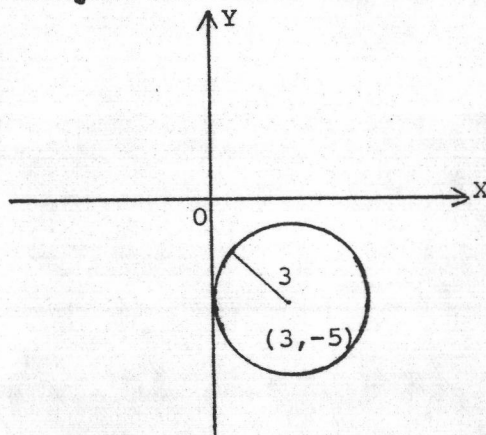
ค. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 29 = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 29 = 0$

2. จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ คือข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(2, -3)$ รัศมี 5 หน่วย ข. จุดศูนย์กลาง $(2, 3)$ รัศมี 5 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(-2, 3)$ รัศมี 5 หน่วย ง. จุดศูนย์กลาง $(-2, -3)$ รัศมี 5 หน่วย

3. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ ตรงกับสมการในข้อใด



ก. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 25 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 25 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$

คาบที่ 3

1. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-1, 1)$ และสัมผัสเส้นตรง $X-2 = 0$ ที่จุด $(2, 1)$ คือสมการในข้อใด
- ก. $X^2 + Y^2 - 2X + 2Y + 7 = 0$ ข. $X^2 + Y^2 + 2X - 2Y - 7 = 0$
- ค. $X^2 + Y^2 + 2X - 2Y + 13 = 0$ ง. $X^2 + Y^2 - 2X - 2Y - 13 = 0$
2. วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีจุด $(3, -4)$ อยู่บนเส้นรอบวง วงกลมนี้จะมีสมการดังข้อใด
- ก. $X^2 + Y^2 - 25 = 0$ ข. $X^2 + Y^2 = 0$
- ค. $X^2 + Y^2 = 16$ ง. $X^2 + Y^2 + 16 = 0$
3. จุดตัดของกราฟของเส้นตรง $Y - 1 = 0$ และวงกลม $X^2 + Y^2 - 5 = 0$ คือข้อใด
- ก. จุด $(2, 1)$ และ $(-2, -1)$ ข. จุด $(2, 1)$ และ $(-2, 1)$
- ค. จุด $(1, 2)$ และ $(1, -2)$ ง. จุด $(-1, 2)$ และ $(1, 2)$
-

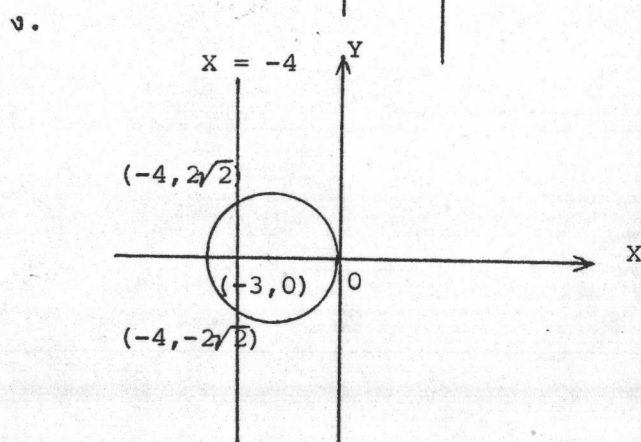
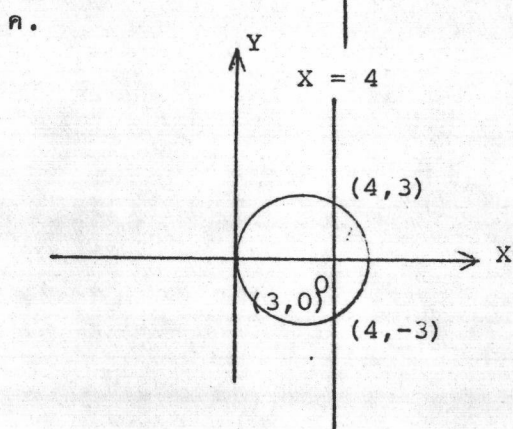
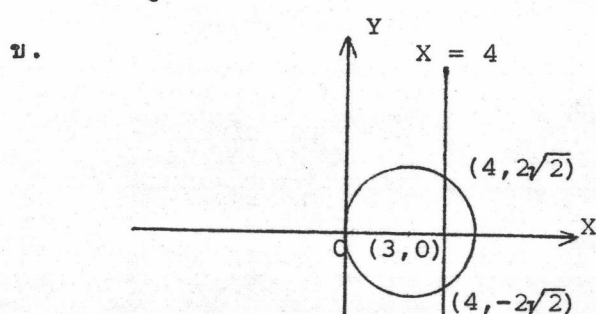
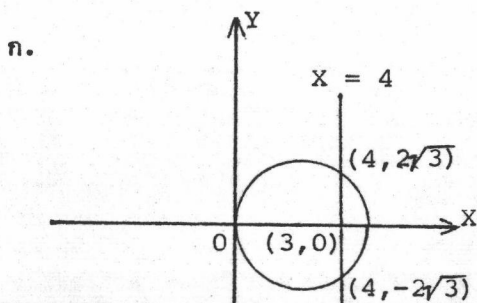
คาบที่ 4

1. วงกลม $X^2 + Y^2 - 4X - 2Y = 0$ และวงกลม $X^2 + Y^2 - 4X - 10Y + 4 = 0$

ตัดกันที่จุดใด

- ก. จุด $(1, -1)$ และจุด $(1, 5)$ ข. จุด $(-1, 1)$ และจุด $(-5, -1)$
 ค. จุด $(1, -1)$ และจุด $(5, -1)$ ง. จุด $(-1, 1)$ และ $(5, 1)$

2. วงกลม $X^2 + Y^2 - 6X = 0$ ตัดกับเส้นตรง $X = 4$ ดังรูปในข้อใด



3. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

- ก. เส้นตรงตัดวงกลมจะเกิดจุดตัด 2 จุด ข. เส้นสัมผัสวงกลมที่จุดที่กำหนดให้จะมี
 ค. วงกลมสัมผัสเส้นตรงจะเกิดจุดสัมผัส 1 จุด ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น
 ง. วงกลมตัดกับวงกลมจะเกิดจุดตัด 2 จุด

คาบที่ 5

1. สมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(4, 0)$ และสมการของไดเรกทริกซ์คือ $X = -4$

คือสมการในข้อใด

ก. $Y^2 = 16X$

ข. $X^2 = 16Y$

ค. $X^2 = -16Y$

ง. $Y^2 = -16X$

2. สมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -3)$ และ $Y = 3$ เป็นสมการไดเรกทริกซ์ คือ

สมการในข้อใด

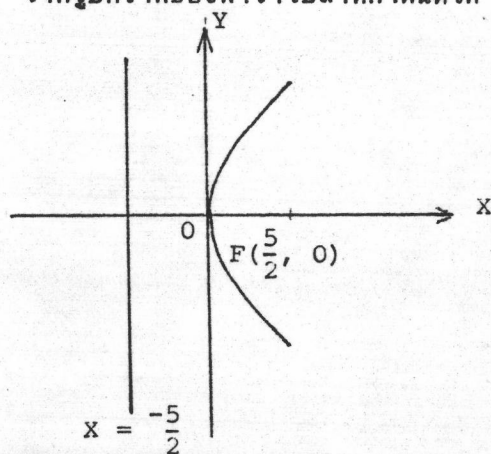
ก. $Y^2 = 12X$

ข. $X^2 = 12Y$

ค. $Y^2 = -12X$

ง. $X^2 = -12Y$

3. จากรูปกราฟของพาราโบลาที่กำหนดให้ ตรงกับสมการในข้อใด



ก. $X^2 = -10Y$

ข. $Y^2 = 10X$

ค. $X^2 = 10Y$

ง. $Y^2 = -10X$

คาบที่ 6

1. จุดโฟกัสและสมการของโคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบลา $Y^2 = 12X$ คือข้อใด

ก. จุด $(0, -3)$ และ $Y = 3$

ข. จุด $(-3, 0)$ และ $X = 3$

ค. จุด $(0, 3)$ และ $Y = -3$

ง. จุด $(3, 0)$ และ $X = -3$

2. จุดโฟกัสและสมการของโคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบลา $X^2 = -18Y$ คือข้อใด

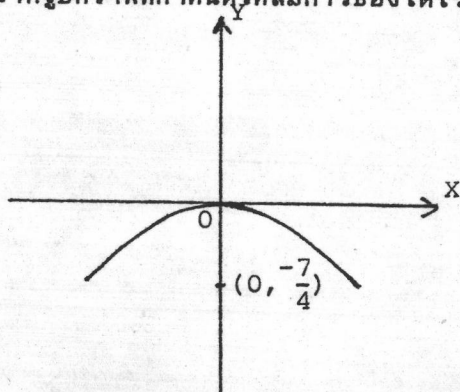
ก. จุด $(-\frac{9}{2}, 0)$ และ $X = \frac{9}{2}$

ข. จุด $(0, \frac{9}{2})$ และ $Y = -\frac{9}{2}$

ค. จุด $(0, -\frac{9}{2})$ และ $Y = \frac{9}{2}$

ง. จุด $(\frac{9}{2}, 0)$ และ $X = -\frac{9}{2}$

3. จากรูปกราฟที่กำหนดให้สมการของโคเรกตริกซ์ คือข้อใด



ก. $Y = -\frac{7}{4}$

ข. $X = \frac{7}{4}$

ค. $X = -\frac{7}{4}$

ง. $Y = \frac{7}{4}$

คาบที่ 7

1. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(4, 3)$ คือสมการในข้อใด

ก. $X^2 - 4X - 8Y - 28 = 0$

ข. $Y^2 + 6Y + 8X - 7 = 0$

ค. $Y^2 - 6Y - 8X + 25 = 0$

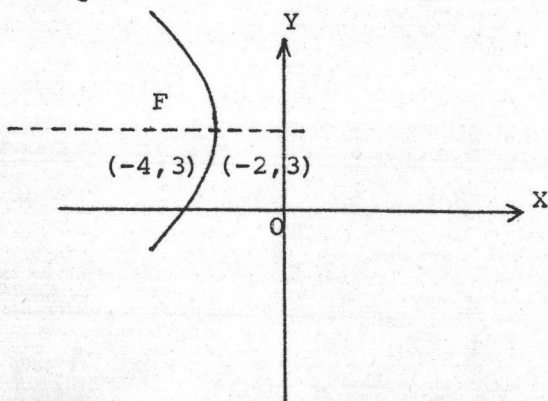
ง. $X^2 + 4X + 8Y - 20 = 0$

2. จุดยอดและจุดโฟกัสของสมการพาราโบลา $X^2 - 6X - 12Y - 15 = 0$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(-3, 2)$ จุดโฟกัส $(-3, 5)$ ข. จุดยอด $(3, 2)$ จุดโฟกัส $(3, 1)$

ค. จุดยอด $(3, -2)$ จุดโฟกัส $(6, -2)$ ง. จุดยอด $(-3, -2)$ จุดโฟกัส $(0, -2)$

3. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ ตรงกับสมการของพาราโบลาในข้อใด



ก. $(Y-3)^2 = -24(X-2)$

ข. $(Y-3)^2 = 24(X+2)$

ค. $(X-2)^2 = 24(Y-3)$

ง. $(X-2)^2 = 24(Y-3)$

คาบที่ 8

1. เมื่อจุดโฟกัสของวงรีอยู่ที่ $(2, 0)$ และ $(-2, 0)$ ผลบวกของระยะจากจุดบนกราฟวงรีไป

ยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 6 สมการวงรีคือข้อใด

ก. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

ข. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

ค. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

ง. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

2. สมการวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ จะมีจุดโฟกัสและจุดยอดตรงกับข้อใด

ก. จุดโฟกัส $(\pm\sqrt{7}, 0)$
จุดยอด $(\pm 4, 0)$

ข. จุดโฟกัส $(0, \pm\sqrt{7})$
จุดยอด $(0, \pm 4)$

ค. จุดโฟกัส $(0, \pm 4)$
จุดยอด $(0, \pm\sqrt{7})$

ง. จุดโฟกัส $(\pm 4, 0)$
จุดยอด $(\pm\sqrt{7}, 0)$

3. สมการวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$, $(4, 0)$ และโฟกัสจุดหนึ่งคือ $(3, 0)$ คือสมการ

ในข้อใด

ก. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

ข. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

ค. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

ง. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

คาบที่ 9

1. สมการวงรีซึ่งตัดแกน X ที่จุด $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 2)$ และ

$(0, 2)$ คือข้อใด

ก. $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{25} = 1$

ข. $4X^2 + 25Y^2 = 100$

ค. $16X^2 + 25Y^2 = 400$

ง. $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{25} = 1$

2. จุดศูนย์กลางวงรีวงหนึ่งอยู่ที่ $(0, 0)$ แกนเอียงยาว 12 หน่วย โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 3)$

สมการวงรีนี้คือข้อใด

ก. $\frac{Y^2}{36} + \frac{X^2}{27} = 1$

ข. $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{27} = 1$

ค. $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ง. $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} = 1$

3. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ แกนเอียงขนานแกน X ยาว 14 หน่วย แกนโทยาว

6 หน่วย คือข้อใด

ก. $\frac{X^2}{49} + \frac{Y^2}{36} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{49} + \frac{X^2}{36} = 1$

ค. $\frac{X^2}{49} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{49} + \frac{X^2}{9} = 1$

4. จุดโฟกัสและจุดยอดของสมการของวงรี $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{20} = 1$ คือข้อใด

ก. จุดโฟกัส $(0, +4)$

ข. จุดโฟกัส $(+4, 0)$

จุดยอด $(0, +6)$

จุดยอด $(-6, 0)$

ค. จุดโฟกัส $(+2\sqrt{5}, 0)$

ง. จุดโฟกัส $(0, +2\sqrt{5})$

จุดยอด $(+4, 0)$

จุดยอด $(0, +6)$

คาบที่ 10

1. สมการวงรีมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 6) แกนเอียงยาว 16 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 4)

คือข้อใด

ก. $\frac{(X-3)^2}{64} + \frac{(Y-4)^2}{48} = 1$

ข. $\frac{(Y-4)^2}{64} + \frac{(X-3)^2}{48} = 1$

ค. $\frac{(Y-3)^2}{64} + \frac{(X-4)^2}{48} = 1$

ง. $\frac{(X-4)^2}{64} + \frac{(Y-3)^2}{48} = 1$

2. สมการวงรีมีจุดยอดจุดหนึ่งคือ (5, 4) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 4) จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y

สมการวงรีนี้ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{X^2}{25} + \frac{(Y-4)^2}{16} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{25} + \frac{(X-4)^2}{16} = 1$

ข. $\frac{X^2}{16} + \frac{(Y-4)^2}{25} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{16} + \frac{(X-4)^2}{25} = 1$

3. จุดโฟกัสของสมการวงรี $\frac{(Y+3)^2}{25} + \frac{X^2}{9} = 1$ คือข้อใด

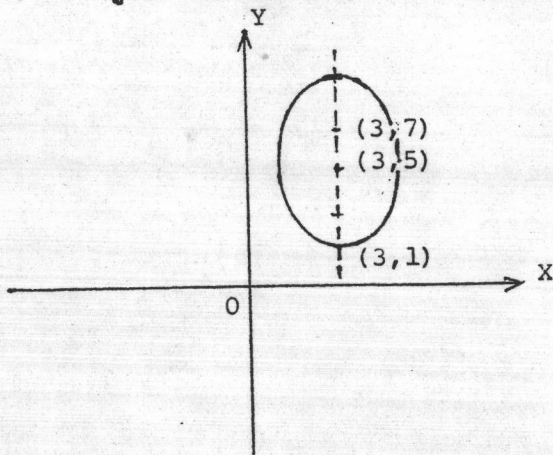
ก. (0, 2), (0, -8)

ข. (0, 1), (0, -7)

ค. (1, 0), (-7, 0)

ง. (2, 0), (-8, 0)

4. จากรูปที่กำหนดให้ จะตรงกับสมการในข้อใด



ก. $\frac{(X-3)^2}{16} + \frac{(Y-5)^2}{12} = 1$

ข. $\frac{(X-5)^2}{16} + \frac{(Y-3)^2}{12} = 1$

ค. $\frac{(Y-5)^2}{16} + \frac{(X-3)^2}{12} = 1$

ง. $\frac{(Y-3)^2}{16} + \frac{(X-5)^2}{12} = 1$

คาบที่ 11

1. สมการไฮเพอร์โบลามีผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดโฟกัส (0, 4) และ

(0, -4) เท่ากับ 6 คือข้อใด

ก. $\frac{Y^2}{7} - \frac{X^2}{9} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{7} = 1$

ค. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{7} = 1$

ง. $\frac{X^2}{7} - \frac{Y^2}{9} = 1$

2. จุดยอดและจุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า $9X^2 - 16Y^2 = 144$ คือข้อใด

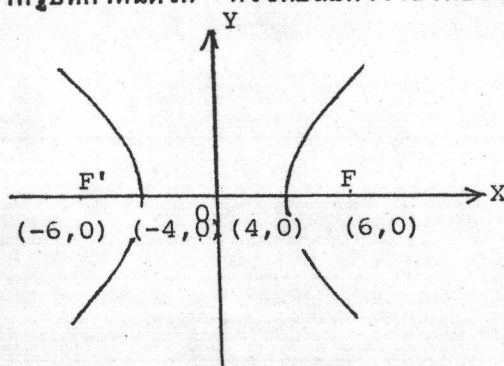
ก. จุดยอด $(\pm 4, 0)$
จุดโฟกัส $(\pm 3, 0)$

ข. จุดยอด $(0, \pm 4)$
จุดโฟกัส $(0, \pm 5)$

ค. จุดยอด $(\pm 4, 0)$
จุดโฟกัส $(\pm 5, 0)$

ง. จุดยอด $(0, \pm 3)$
จุดโฟกัส $(0, \pm 4)$

3. จากรูปที่กำหนดให้ ตรงกับสมการไฮเพอร์โบล่าในข้อใด



ก. $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{20} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{20} = 1$

ค. $\frac{X^2}{20} - \frac{Y^2}{16} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{20} - \frac{X^2}{16} = 1$

4. สมการในข้อต่อไปนี้สมการใดคือ สมการของไฮเพอร์โบล่า

ก. $\frac{X^2}{12} = -Y$

ข. $\frac{Y^2}{4} = 1 - \frac{X^2}{5}$

ค. $X^2 + Y^2 - 16 = 0$

ง. $\frac{X^2}{10} = 1 + \frac{Y^2}{9}$

ภาพที่ 12

1. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -3)$ และมี $(2, 0)$ เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนลึงยุค คือสมการในข้อใด

ก. $9X^2 - 4Y^2 = 36$

ข. $4Y^2 - 9X^2 = 36$

ค. $4X^2 - 9Y^2 = 36$

ง. $9Y^2 - 4X^2 = 36$

2. สมการของไฮเพอร์โบล่าซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(4, 0)$ และจุด $(-4, 0)$ และกราฟของไฮเพอร์โบล่านี้ผ่านจุด $(5, 2\sqrt{3})$ คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{12} = 1$

ข. $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{28} = 1$

ค. $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{12} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{28} = 1$

3. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-6, 0)$ และ $(6, 0)$ มีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ คือสมการในข้อใด

ก. $16X^2 - 20Y^2 = 320$

ข. $16Y^2 - 20X^2 = 320$

ค. $20Y^2 - 16X^2 = 320$

ง. $20X^2 - 16Y^2 = 320$

คาบที่ 13

1. สมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 4) จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 4) และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y คือสมการในข้อใด

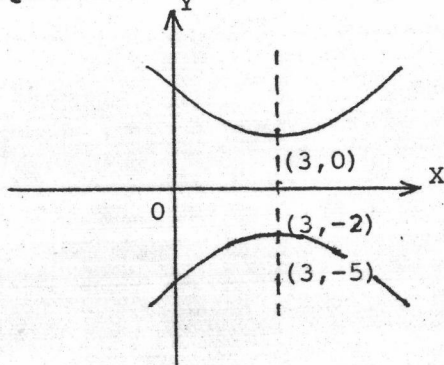
ก. $\frac{X^2}{5} - \frac{(Y-4)^2}{4} = 1$

ข. $\frac{X^2}{4} - \frac{(Y-4)^2}{5} = 1$

ค. $\frac{(Y-4)^2}{5} - \frac{X^2}{4} = 1$

ง. $\frac{(Y-4)^2}{4} - \frac{X^2}{5} = 1$

2. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ ตรงกับสมการไฮเพอร์โบลาในข้อใด



ก. $\frac{(X-3)^2}{4} - \frac{Y^2}{21} = 1$

ข. $\frac{(X-3)^2}{21} - \frac{Y^2}{4} = 1$

ค. $\frac{Y^2}{4} - \frac{(X-3)^2}{21} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{21} - \frac{(X-3)^2}{4} = 1$

3. จุดยอดและจุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(X+1)^2}{9} - \frac{(Y-2)^2}{7} = 1$ คือข้อใด

ก. จุดยอด (2, 2) จุดโฟกัส (3, 2) ข. จุดยอด (-2, 2) จุดโฟกัส (3, 2)

ค. จุดยอด (2, 2) จุดโฟกัส (7, 2) ง. จุดยอด (-3, 2) จุดโฟกัส (7, 2)

คาบที่ 14

1. สมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 2)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3, 6)$ และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{(X+3)^2}{9} - \frac{(Y-2)^2}{7} = 1$

ข. $\frac{(X+3)^2}{7} - \frac{(Y-2)^2}{9} = 1$

ค. $\frac{(Y-2)^2}{9} - \frac{(X+3)^2}{7} = 1$

ง. $\frac{(Y-2)^2}{7} - \frac{(X+3)^2}{9} = 1$

2. สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $X^2 - 4Y^2 + 4X + 32Y - 64 = 0$ จะมีจุดโฟกัสตั้งข้อใด

ก. จุด $(-2 + \sqrt{5}, 4)$ และ

ข. จุด $(\sqrt{5}, 4)$

จุด $(-2 - \sqrt{5}, 4)$

จุด $(-\sqrt{5}, 4)$

ค. จุด $(-2, 4 + \sqrt{5})$ และ

ง. จุด $(-2, \sqrt{5})$ และ

จุด $(-2, 4 - \sqrt{5})$

จุด $(-2, -\sqrt{5})$

3. สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ข้อใด ไม่ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา

ก. $9X^2 - 36 = 4Y^2$

ข. $4X^2 - Y^2 = 24$

ค. $X^2 = 4Y^2 + 16$

ง. $2X^2 = 5 - 2Y^2$

แบบทดสอบย่อย วิชา ค.012 เรื่องภาคตัดกรวย

ของ

กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วย เนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ

คาบที่ 1

จงเขียนวงกลมล้อมรอบข้อที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดเป็นสมการวงกลม

ก. $x^2 = 16 - y^2$

ข. $x^2 - 4x = 0$

ค. $x^2 + 2y = 4$

ง. $x^2 = -3y$

2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-5, 3)$ และรัศมีเท่ากับ 4 คือข้อใด

ก. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-5)^2 + (y+3)^2 = 16\}$ ข. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+5)^2 + (y-3)^2 = 16\}$

ค. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-5)^2 + (y+3)^2 = 4\}$ ง. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+5)^2 + (y-2)^2 = 4\}$

3. สมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 2)$ และมีพื้นที่ 9 ตารางหน่วยคือสมการใด

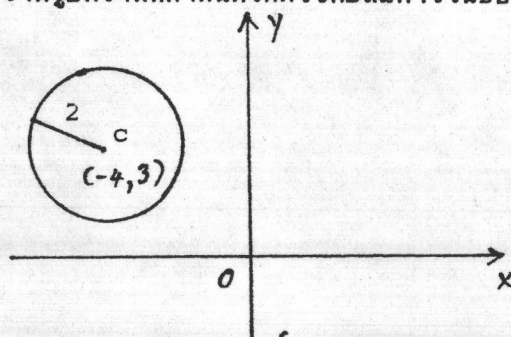
ก. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

ข. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

ค. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 81$

ง. $(x+3)^2 (y-2)^2 = 81$

4. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ตรงกับสมการในข้อใด



ก. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 2$

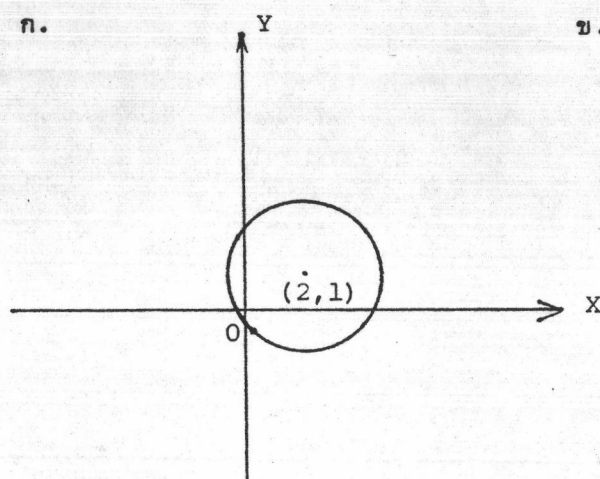
ข. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$

ค. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$

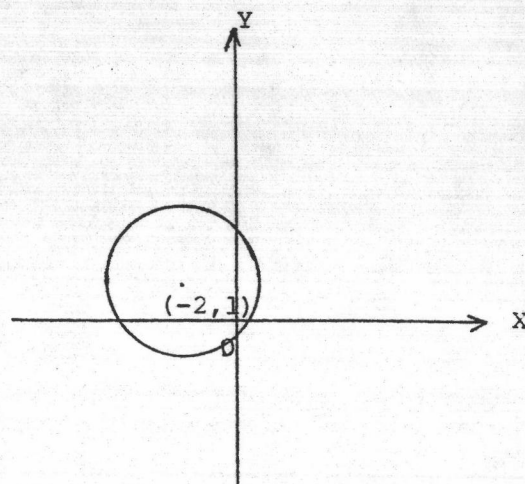
ง. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 2$

5. กราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9\}$

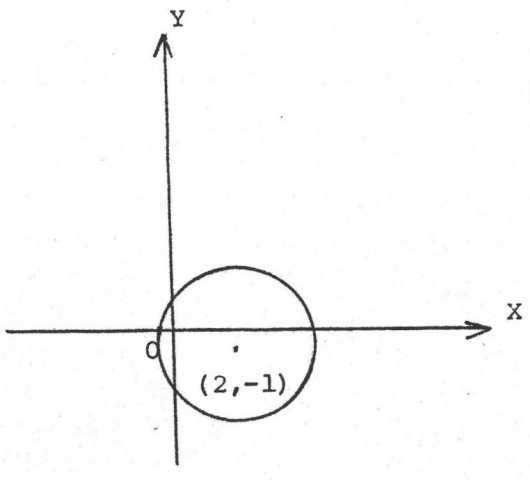
ก.



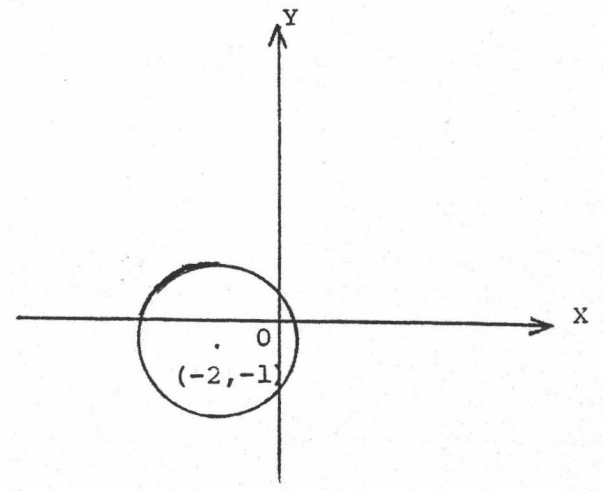
ข.



а.



в.



คาบที่ 2

1. จากสมการ $(X-h)^2 + (Y-k)^2 = r^2$ เขียนได้ในรูปทั่วไปคือ $X^2 + Y^2 + DX + EY + F = 0$

จะได้ D, E และ F มีค่าเท่ากับค่าใด

ก. $2h, -2k, h^2 + k^2 - r^2$

ข. $-2h, -2k, h^2 - k^2 - r^2$

ค. $-2h, -2k, h^2 + k^2 - r^2$

ง. $-2h, 2k, h^2 - k^2 - r^2$

2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 2)$ และมีรัศมี 3 หน่วย คือสมการในข้อใด

ก. $X^2 + Y^2 - 2X + 10Y + 17 = 0$

ข. $X^2 + Y^2 + 2X - 10Y + 35 = 0$

ค. $X^2 + Y^2 - 2X + 10Y + 35 = 0$

ง. $X^2 + Y^2 + 2X - 10Y + 17 = 0$

3. จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการ $X^2 + Y^2 - 8X + 2Y - 8 = 0$ คือข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(4, -1)$ รัศมี 5 หน่วย ข. จุดศูนย์กลาง $(-4, 1)$ รัศมี 5 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(-4, -1)$ รัศมี 5 หน่วย ง. จุดศูนย์กลาง $(4, 1)$ รัศมี 5 หน่วย

4. สมการของวงกลม ซึ่งมีจุด $(1, 2)$ และ $(3, 4)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลาง คือสมการในข้อใด

ก. $X^2 + Y^2 + 4X + 6Y + 11 = 0$

ข. $X^2 + Y^2 - 4X - 6Y + 11 = 0$

ค. $X^2 + Y^2 - 6X - 4Y + 11 = 0$

ง. $X^2 + Y^2 - 6X + 4Y + 11 = 0$

5. สมการ $X^2 + Y^2 - 4X + 6Y - 3 = 0$ ทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ดังข้อใด

ก. $(X-2)^2 + (Y-3)^2 = 16$

ข. $(X-2)^2 + (Y+3)^2 = 16$

ค. $(X+2)^2 + (Y+3)^2 = 16$

ง. $(X-2)^2 + (Y-3)^2 = 16$

คาบที่ 3

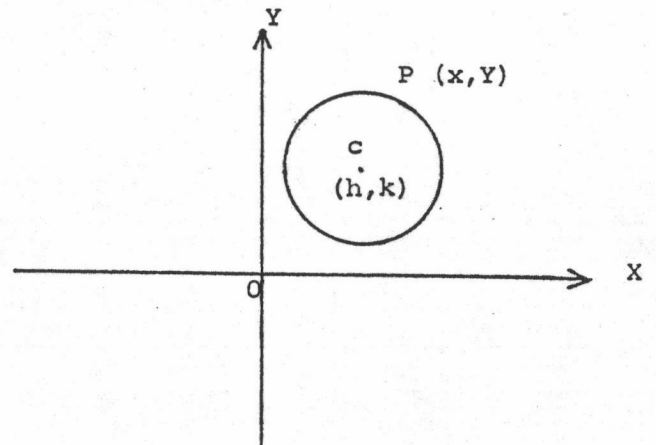
1. จากรูปที่กำหนดให้ c^2 จะมีค่าเท่าใด

ก. $c^2 = (x+h)^2 + (y+k)^2$

ข. $c^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

ค. $c^2 = (x-h)^2 - (y-k)^2$

ง. $c^2 = (x+h)^2 - (y-k)^2$



2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ และสัมผัสเส้นตรง $Y-3 = 0$ ที่จุด $(2, 3)$

คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 21 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 21 = 0$

3. จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ คือข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(4, -3)$ รัศมี 3 หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $(-4, 3)$ รัศมี 3 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(-4, 3)$ รัศมี 6 หน่วย

ง. จุดศูนย์กลาง $(4, -3)$ รัศมี 6 หน่วย

4. จุดตัดของเส้นตรง $X-2 = 0$ และวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ คือข้อใด

ก. จุด $(-2, 3)$ และจุด $(-2, -3)$

ข. จุด $(2, 3)$ และจุด $(2, -3)$

ค. จุด $(2, 3)$ และจุด $(-2, 3)$

ง. จุด $(-2, -3)$ และจุด $(2, -3)$

คาบที่ 4

1. รูปทั่วไปของสมการวงกลม $X^2 + Y^2 + AX + BY + C = 0$ จะมีจุดศูนย์กลางและรัศมีดังข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(\frac{A}{4}, \frac{B}{4})$ รัศมี

$$\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \text{ หน่วย}$$

ข. จุดศูนย์กลาง $(\frac{A}{2}, \frac{C}{2})$ รัศมี

$$\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \text{ หน่วย}$$

ข. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{A}{2}, \frac{B}{2})$ รัศมี

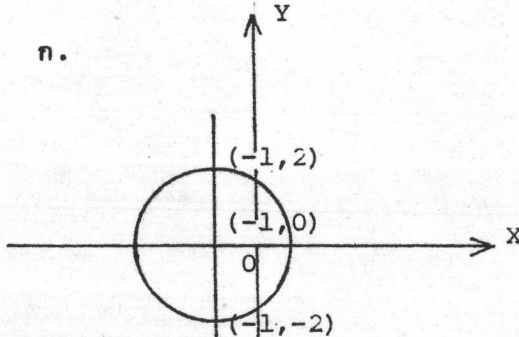
$$\frac{A^2 - B^2}{4} - C \text{ หน่วย}$$

ง. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ รัศมี

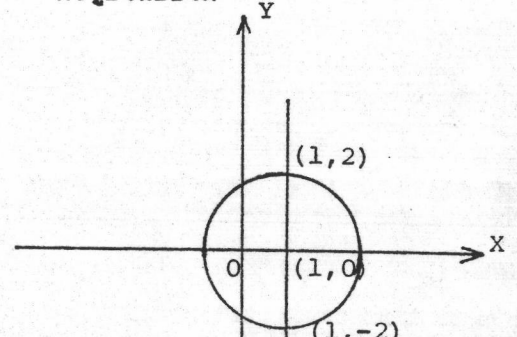
$$\frac{A^2 + B^2}{4} - C \text{ หน่วย}$$

2. เส้นตรง $X-1 = 0$ ตัดวงกลม $X^2 + Y^2 - 2X - 3 = 0$ ดังรูปในข้อใด

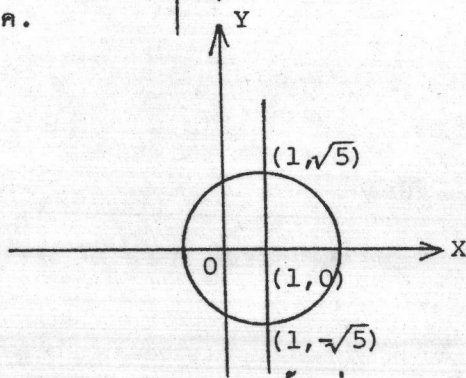
ก.



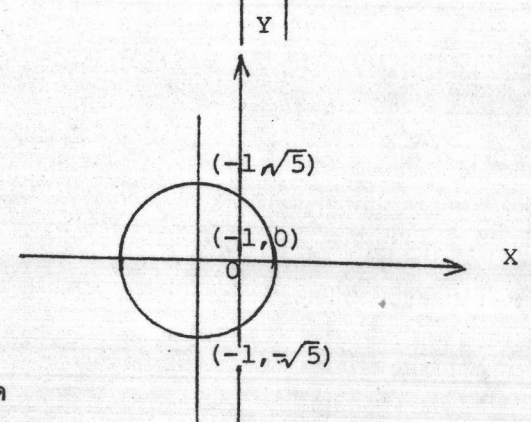
ข.



ค.



ง.



3. จากรูปกราฟของวงกลมข้างล่าง ตรงกับสมการในข้อใด

ก. $X^2 + Y^2 - 2X + 4Y - 4 = 0$

ข. $X^2 + Y^2 - 4X + 2Y - 4 = 0$

ค. $X^2 + Y^2 + 2X - 4Y + 13 = 0$

ง. $X^2 + Y^2 + 2X - 4Y + 4 = 0$

4. วงกลม $X^2 + Y^2 - 2X - 2Y - 8 = 0$ ตัดกับวงกลม $X^2 + Y^2 - 2X + 4Y + 4 = 0$ ที่จุดในข้อใด

ก. จุด $(-2, -0)$ และจุด $(-2, 2)$

ข. จุด $(2, -0)$ และจุด $(2, -2)$

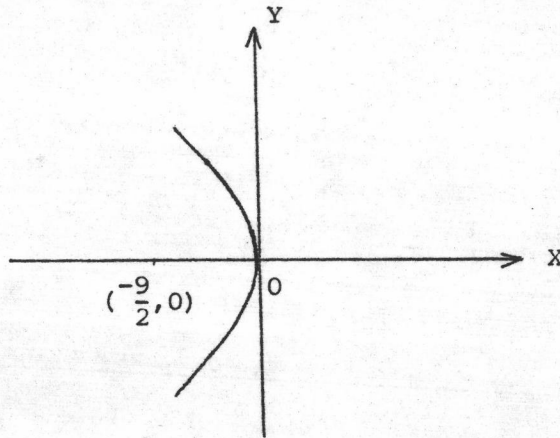
ค. จุด $(0, -2)$ และจุด $(2, -2)$

ง. จุด $(0, 2)$ และจุด $(-2, 2)$

คาบที่ 6

1. จุดโฟกัสและสมการโคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบลา $x^2 = -4ay$ คือข้อใด
- ก. จุดโฟกัส $(0, a)$ และ $Y = -a$ ข. จุดโฟกัส $(a, 0)$ และ $Y = a$
- ค. จุดโฟกัส $(0, -a)$ และ $Y = a$ ง. จุดโฟกัส $(-a, 0)$ และ $X = a$

2. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ สมการของโคเรกตริกซ์คือข้อใด

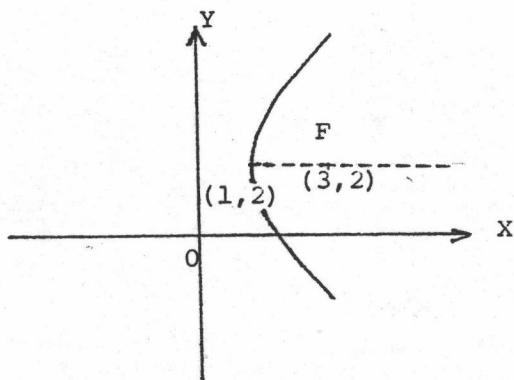


- ก. $X = -\frac{9}{2}$
- ข. $X = 18$
- ค. $X = \frac{9}{2}$
- ง. $X = -18$

3. จุดโฟกัสและสมการโคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบลา $y^2 = 20x$ คือข้อใด
- ก. จุด $(5, 0)$ และ $X = -5$ ข. จุด $(0, 5)$ และ $Y = -5$
- ค. จุด $(0, -5)$ และ $Y = 5$ ง. จุด $(-5, 0)$ และ $X = 5$
4. จุดโฟกัสและสมการโคเรกตริกซ์ของสมการพาราโบลา $x^2 = -14y$ คือข้อใด
- ก. จุด $(\frac{7}{2}, 0)$ และ $X = -\frac{7}{2}$ ข. จุด $(0, \frac{7}{2})$ และ $Y = -\frac{7}{2}$
- ค. จุด $(-\frac{7}{2}, 0)$ และ $X = \frac{7}{2}$ ง. จุด $(0, -\frac{7}{2})$ และ $Y = \frac{7}{2}$

คาบที่ 7

1. จากรูปของพาราโบลาที่กำหนดให้ สมการโคเรกตริกซ์คือข้อใด

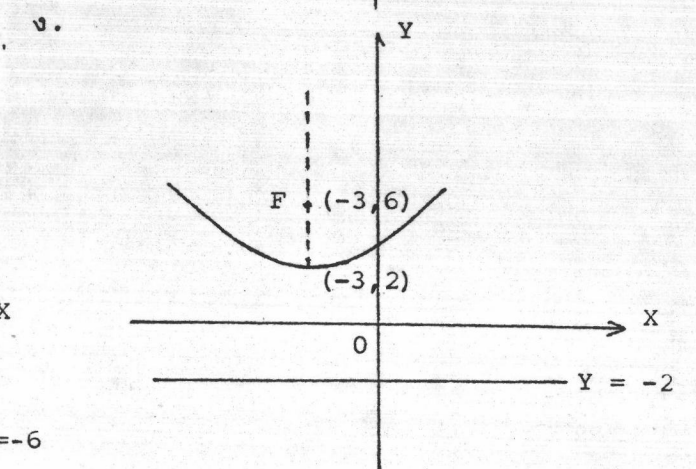
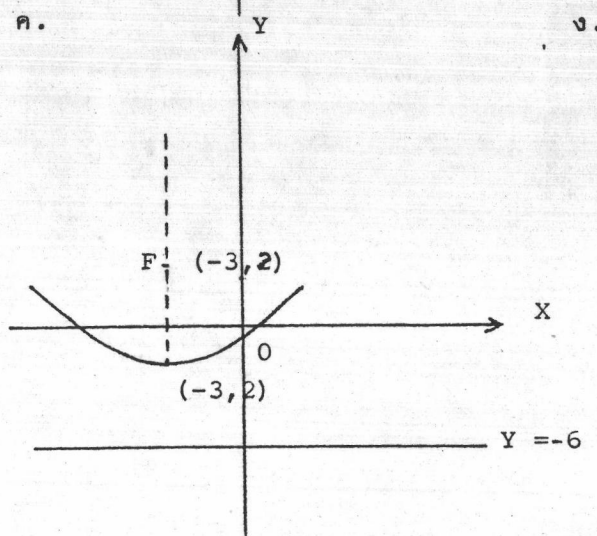
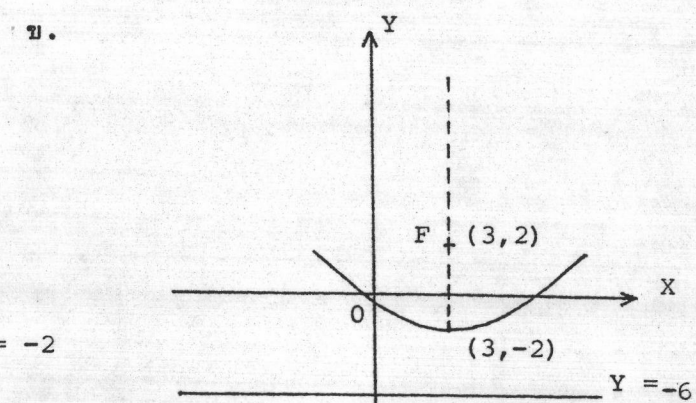
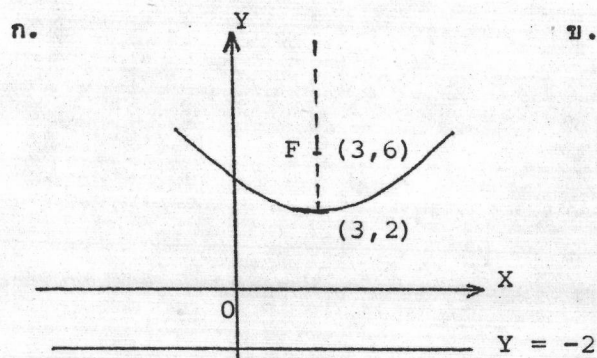


- ก. $X = -1$
- ข. $X = 1$
- ค. $X = 3$
- ง. $X = 4$

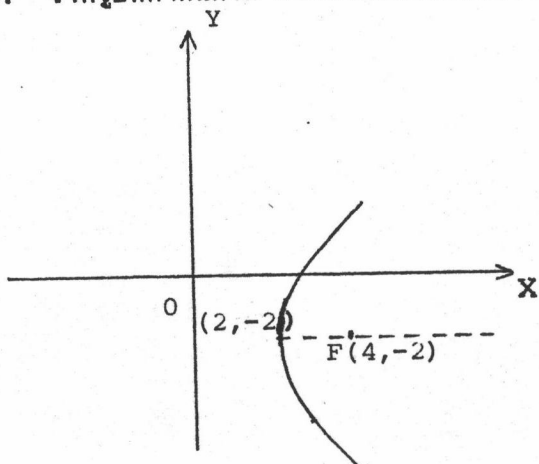
2. สมการของพาราโบลา $(Y-2)^2 = 12(X-6)$ มีจุดยอดและจุดโฟกัสดังข้อใด

- ก. จุดยอด $(-6, 2)$ จุดโฟกัส $(-3, 2)$
- ข. จุดยอด $(-6, 2)$ จุดโฟกัส $(9, 2)$
- ค. จุดยอด $(2, 6)$ จุดโฟกัส $(5, 6)$
- ง. จุดยอด $(-2, 6)$ จุดโฟกัส $(1, 6)$

3. สมการของพาราโบลา $X^2 - 6X - 16Y - 41 = 0$ ตรงกับรูปกราฟในข้อใด



4. จากรูปที่กำหนดให้ ตรงกับสมการของพาราโบลาในข้อใด



ก. $x^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

ข. $x^2 - 4x + 8y + 20 = 0$

ค. $y^2 + 4y - 8x + 20 = 0$

ง. $y^2 - 4y + 8x - 12 = 0$

คาบที่ 8

1. สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่ $(0, 0)$ สมการโคเรกตริกซ์ $Y = -c$ คือสมการในข้อใด

ก. $Y^2 = -4cX$

ข. $X^2 = -4cY$

ค. $Y^2 = 4cX$

ง. $X^2 = 4cY$

2. สมการของวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน X ที่ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ จุดยอดอยู่ที่ $(\pm a, 0)$ และปลายแกนโทคือ $(0, \pm b)$ คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = c^2$

ข. $b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2$

ค. $b^2X^2 - a^2Y^2 = -a^2b^2$

ง. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = c^2$

3. สมการของวงรี ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$ ผลบวกของระยะจากจุดบนกราฟของวงรีนี้ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 16 คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{36} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{64} + \frac{X^2}{28} = 1$

ค. $\frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{28} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{64} + \frac{X^2}{36} = 1$

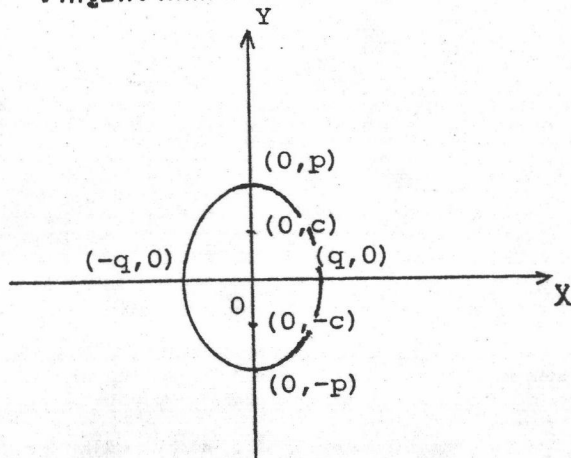
4. จุดโฟกัสและจุดยอดของสมการของวงรี $7Y^2 + 16X^2 = 122$ คือข้อใด

ก. จุดโฟกัส $(\pm 3, 0)$ จุดยอด $(\pm 4, 0)$ ข. จุดโฟกัส $(0, \pm 3)$ จุดยอด $(0, \pm 4)$

ค. จุดโฟกัส $(0, \pm 3)$ จุดยอด $(0, \pm \sqrt{7})$ ง. จุดโฟกัส $(\pm 3, 0)$ จุดยอด $(\pm \sqrt{7}, 0)$

คาบที่ ๑

1. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ สมการของวงรีคือข้อใด



ก. $\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{q^2} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{p^2} + \frac{X^2}{q^2} = 1$

ค. $\frac{Y^2}{p^2} + \frac{X^2}{c^2} = 1$

ง. $\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{c^2} = 1$

2. สมการต่อไปนี้ข้อใดเป็นสมการของวงรี

ก. $7X^2 + 9Y^2 = 63$

ข. $X^2 = 8Y^2$

ค. $\frac{X^2 + Y^2}{2} = \frac{25}{2}$

ง. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$

3. สมการของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ แกนโทขนานกับแกน Y ยาว 8 หน่วย จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-7, 0)$ คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{Y^2}{49} + \frac{X^2}{16} = 1$

ข. $\frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{49} = 1$

ค. $\frac{X^2}{49} + \frac{Y^2}{16} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{64} + \frac{X^2}{49} = 1$

4. สมการของวงรี ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, 3)$, $(0, -3)$ และขนาดของครึ่งแกนเอ็กเท่ากับ 5 หน่วย คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$

ข. $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ค. $\frac{Y^2}{16} + \frac{X^2}{9} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{25} + \frac{X^2}{16} = 1$

5. จุดยอดและจุดโฟกัสของสมการวงรี $\frac{Y^2}{25} + \frac{X^2}{9} = 1$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(\pm 5, 0)$ จุดโฟกัส $(\pm 4, 0)$ ข. จุดยอด $(0, \pm 5)$ จุดโฟกัส $(0, \pm 3)$

ข. จุดยอด $(0, \pm 5)$ จุดโฟกัส $(0, \pm 4)$ ง. จุดยอด $(\pm 5, 0)$ จุดโฟกัส $(\pm 3, 0)$

คาบที่ 10

1. ข้อใดกล่าวถึงสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ได้ถูกต้องที่สุด

- ก. จุดยอดที่ (h, k) จุดโฟกัสอยู่บนแกน Y
 ข. จุดยอดที่ (h, k) แกนเอ็กคือ a และแกนโทคือ $2b$
 ค. จุดยอดที่ (h, k) แกนเอ็กคือ $2a$ และแกนโทคือ $2b$
 ง. จุดยอดที่ (h, k) แกนเอ็กคือ $2b$ และแกนโทคือ $2a$

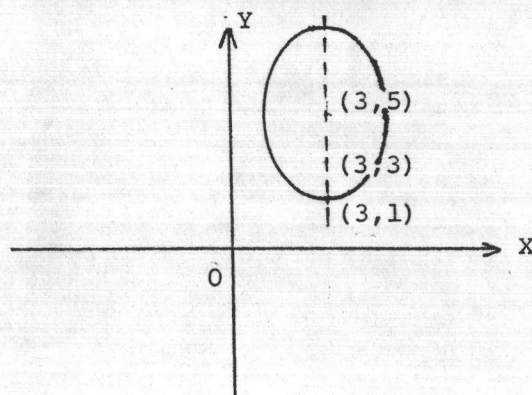
2. สมการของวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, 1)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(2, 1)$ คือสมการในข้อใด

- ก. $\frac{(y-1)^2}{36} + \frac{(x+2)^2}{20} = 1$ ข. $\frac{(x+2)^2}{26} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$
 ค. $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$ ง. $\frac{(y+1)^2}{36} + \frac{(x-2)^2}{20} = 1$

3. สมการของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -4)$ มีครึ่งแกนเอกขนานกับแกน Y ยาว 6 หน่วย และแกนโทยาว 8 หน่วย คือสมการในข้อใด

- ก. $\frac{(y-4)^2}{36} + \frac{(x+2)^2}{16} = 1$ ข. $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
 ค. $\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ ง. $\frac{(y+4)^2}{36} + \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

4. จากรูปภาพของวงรีที่กำหนดให้ ตรงกับสมการในข้อใด



- ก. $\frac{(y-5)^2}{16} + \frac{(x-3)^2}{12} = 1$
 ข. $\frac{(y+3)^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{12} = 1$
 ค. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{12} = 1$
 ง. $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{12} = 1$

คาบที่ 11

1. สมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, c)$, $(0, -c)$ และผลต่างคงตัวเท่ากับ

2a คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2 - a^2} = 1$

ข. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

ค. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2 - a^2} = 1$

ง. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

2. จุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 7x^2 = 63$ คือข้อใด

ก. จุด $(4, 0)$ และจุด $(-4, 0)$

ข. จุด $(0, 4)$ และจุด $(0, -4)$

ค. จุด $(0, \sqrt{2})$ และจุด $(0, -\sqrt{2})$

ง. จุด $(\sqrt{2}, 0)$ และจุด $(-\sqrt{2}, 0)$

3. สมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(3, 0)$, $(-3, 0)$ และผลต่างระหว่างระยะทางจากจุดใด ๆ นกรานนี้ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 4 คือสมการในข้อใด

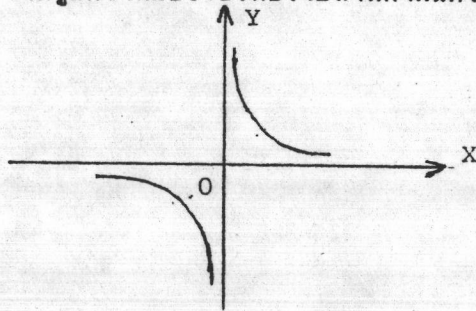
ก. $5y^2 - 4x^2 = 20$

ข. $4x^2 - 5y^2 = 30$

ค. $5x^2 - 4y^2 = 20$

ง. $4y^2 - 5x^2 = 20$

4. จากรูปกราฟของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ตรงกับสมการในข้อใด



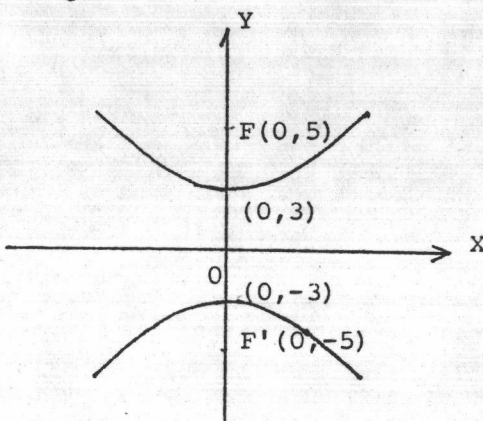
ก. $XY = -12$

ข. $X^2 = 12Y$

ค. $Y^2 = -12X$

ง. $XY = 12$

5. จากรูปที่กำหนดให้ ตรงกับสมการไฮเพอร์โบลาในข้อใด



ก. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

ข. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

ค. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

ง. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

คามที่ 12

1. สมการไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $(0, 5)$ และ $(0, -5)$ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$ คือข้อใด

ก. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{16} = 1$

ข. $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{16} = 1$

ค. $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{9} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{25} - \frac{X^2}{9} = 1$

2. ถ้ากราฟของไฮเพอร์โบล่า $16X^2 - 9Y^2 = k$ ผ่านจุด $(-2, 1)$ ค่าของ k คือข้อใด

ก. -73

ข. 63

ค. 73

ง. 55

3. สมการไฮเพอร์โบล่า ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(5, 0)$ และ $(-5, 0)$ มีจุดปลายข้างหนึ่งของแกนตั้งอยู่ที่ $(0, 3)$ คือข้อใด

ก. $9Y^2 - 25X^2 = 225$

ข. $9X^2 - 25Y^2 = 225$

ค. $25X^2 - 9Y^2 = 225$

ง. $25Y^2 - 9X^2 = 225$

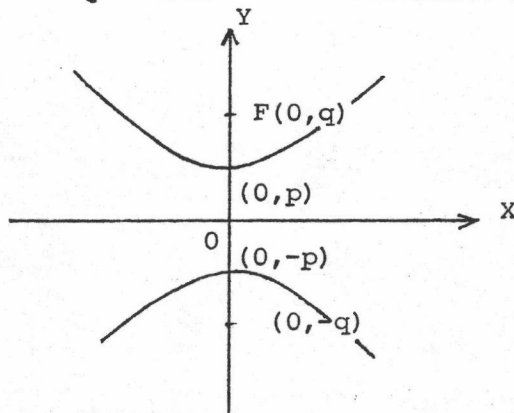
4. จุดยอด จุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า $4Y^2 - 9X^2 = 36$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(\pm 2, 0)$ จุดโฟกัส $(\pm 3, 0)$ ข. จุดยอด $(0, \pm 2)$ จุดโฟกัส $(0, \pm \sqrt{13})$

ค. จุดยอด $(0, \pm 3)$ จุดโฟกัส $(0, \pm \sqrt{13})$ ง. จุดยอด $(-0, \pm 2)$ จุดโฟกัส $(0, \pm 3)$

คาบที่ 13

1. จากรูปกราฟที่กำหนดให้ ตรงกับสมการไฮเพอร์โบลานในข้อใด



ก. $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$

ข. $\frac{y^2}{p^2} - \frac{x^2}{q^2} = 1$

ค. $\frac{y^2}{q^2} - \frac{x^2}{p^2} = 1$

ง. $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$

2. สมการของไฮเพอร์โบล่า $8(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 63$ มีแกนตามขวางและแกนลึงยุคตรงกับข้อใด

ก. แกนตามขวางคือ 6 แกนลึงยุคคือ 4 / 2 ข. แกนตามขวางคือ 9 แกนลึงยุคคือ 7

ค. แกนตามขวางคือ 4 / 2 แกนลึงยุคคือ 6 ง. แกนตามขวางคือ 7 แกนลึงยุคคือ 9

3. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 2) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 2) มีแกนลึงยุคยาว 6 หน่วย คือสมการในข้อใด

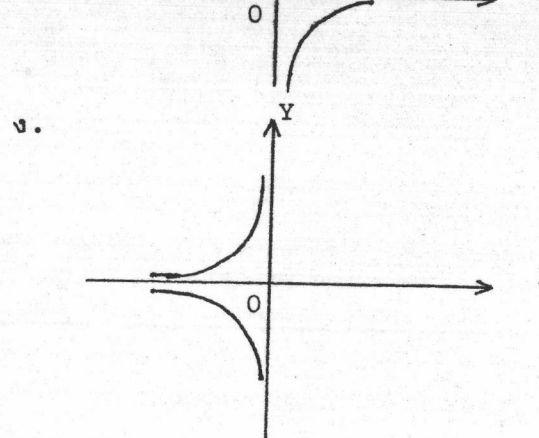
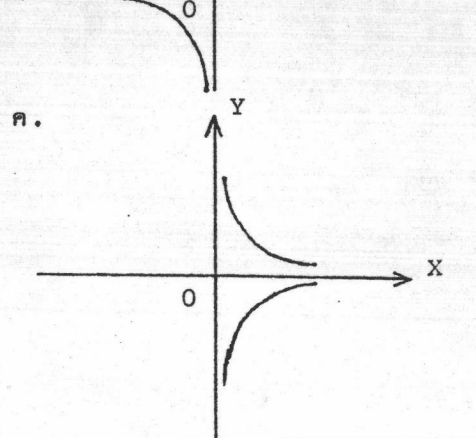
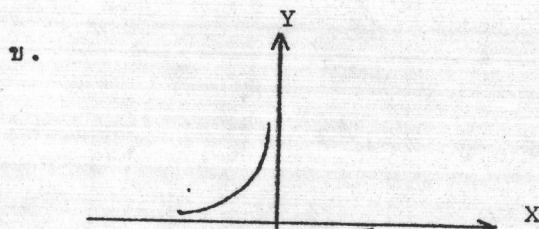
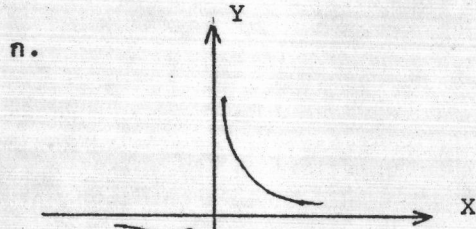
ก. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

ข. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

ค. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

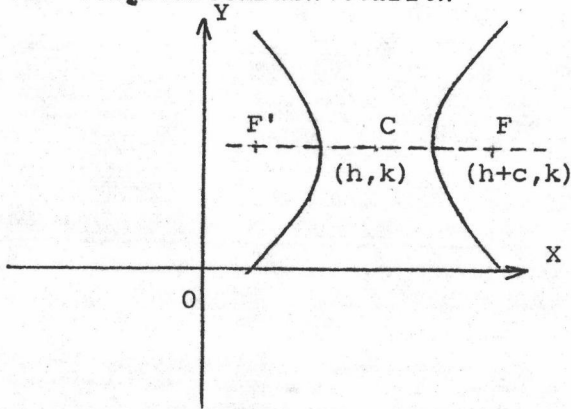
ง. $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

4. กราฟในข้อใดเป็นกราฟของไฮเพอร์โบลามุมฉาก $XY = -4$



คาบที่ 14

1. จากรูปจะตรงกับสมการในข้อใด



ก. $\frac{(Y-k)^2}{a^2} - \frac{(X-h)^2}{c^2 - a^2} = 1$

ข. $\frac{(X-h)^2}{a^2} - \frac{(Y-k)^2}{c^2 - a^2} = 1$

ค. $\frac{(X-h)^2}{c^2 - a^2} - \frac{(Y-k)^2}{a^2} = 1$

ง. $\frac{(Y-k)^2}{c^2 - a^2} - \frac{(X-h)^2}{a^2} = 1$

2. สมการไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 0) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (5, 0) แกน
ลึงยุคของกราฟนี้คือข้อใด

ก. 4

ข. 6

ค. 16

ง. 8

3. สมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-5, 0) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตาม
ขวางยาว 4 หน่วย คือข้อใด

ก. $\frac{(X+5)^2}{25} - \frac{Y^2}{21} = 1$

ข. $\frac{X^2}{4} - \frac{(Y+5)^2}{21} = 1$

ค. $\frac{(X+5)^2}{4} - \frac{Y^2}{21} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{21} - \frac{(X+5)^2}{4} = 1$

4. ข้อต่อไปนี้เป็นสมการของกราฟไฮเพอร์โบลา

ก. $2X^2 = 8 - 4Y^2$

ข. $2Y^2 - X^2 - 36 = -0$

ค. $X^2 + 3Y^2 = -9$

ง. $X^2 = 20(Y-1)$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์วิชา ค 012

เรื่อง

"ภาคตัดกรวย"

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ภาคตัดกรวย"

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อต้องการวัดความรู้ในการเรียนเรื่อง "ภาคตัดกรวย"
2. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 40 ข้อ กรุณาตอบให้ครบทุกข้อ
3. วิธีตอบแบบทดสอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ให้ตรงกับอักษร ก ข ค หรือ ง ซึ่งตรงกับตัวเลือกที่นักเรียนเลือกตอบในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

(๐) ถ้า $2x + 1 = 5$ แล้ว x มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

กระดาษคำตอบ

(๐) ก ข ค ง

() () (X) ()

เมื่อนักเรียนคิดว่าข้อ ค ถูก

(๐) ก ข ค ง

(X) () (X) ()

เมื่อนักเรียนต้องการจะเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ค เป็นข้อ ก

ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย \times ลงใน () ตรงข้อที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว (ทำลงในกระดาษคำตอบ)

1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 0)$ และรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

คือข้อใด

ก. $\{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / X^2 + Y^2 - 4Y - 12 = 0 \}$

ข. $\{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / X^2 + Y^2 - 4X - 12 = 0 \}$

ค. $\{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / X^2 + Y^2 + 4X - 12 = 0 \}$

ง. $\{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / X^2 + Y^2 + 4Y - 12 = 0 \}$

2. ความสัมพันธ์ในข้อใด ที่มีกราฟเป็นวงกลม รัศมีเป็น 2 เท่า และมีจุดศูนย์กลางเดียวกับกราฟ

ของความสัมพันธ์ $\{ (X, Y) / X^2 + Y^2 - 4X + 2Y + 1 = 0 \}$

ก. $\{ (X, Y) / (X+2)^2 + (Y-1)^2 = 4 \}$

ข. $\{ (X, Y) / (X-2)^2 + (Y+1)^2 = 4 \}$

ค. $\{ (X, Y) / (X+2)^2 + (Y-1)^2 = 16 \}$

ง. $\{ (X, Y) / (-2)^2 + (Y+1)^2 = 16 \}$

3. สมการของวงกลม $X^2 + Y^2 - 6X + 2Y + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีดังข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 2 หน่วย ข. จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 2 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(-3, -1)$ รัศมี 4 หน่วย ง. จุดศูนย์กลาง $(-1, 3)$ รัศมี 4 หน่วย

4. สมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(4, -2)$ และมีแกน Y เป็นเส้นสัมผัสคือสมการใด

ก. $X^2 + Y^2 - 8X + 4Y + 4 = 0$ ข. $X^2 + Y^2 + 8X - 4Y + 16 = 0$

ค. $X^2 + Y^2 - 8X - 4Y + 16 = 0$ ง. $X^2 + Y^2 + 8X - 4Y + 4 = 0$

5. สมการของวงกลม ซึ่งมีจุด $(2, 2)$ และ $(-6, -4)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ

สมการในข้อใด

ก. $X^2 + Y^2 + 4X + 2Y = 20$

ข. $X^2 + Y^2 + 4X + 2Y = 30$

ค. $X^2 + Y^2 - 4X - 2Y = 30$

ง. $X^2 + Y^2 + 4X - 2Y = 20$

6. วงกลมที่มีจุด $(2, -3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และมีพื้นที่ 6π ตารางหน่วย มีสมการดังข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 19 = 0$ ข. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 7 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$ ง. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 19 = 0$

7. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ และสัมผัสเส้นตรง $Y - 3 = 0$ ที่จุด $(2, 3)$ คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 21 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

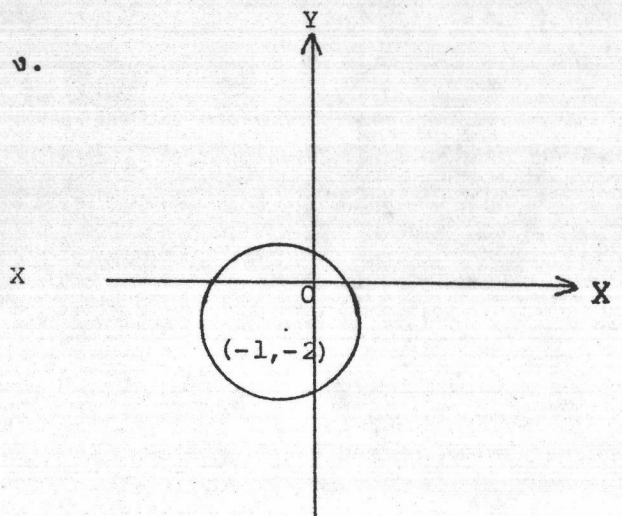
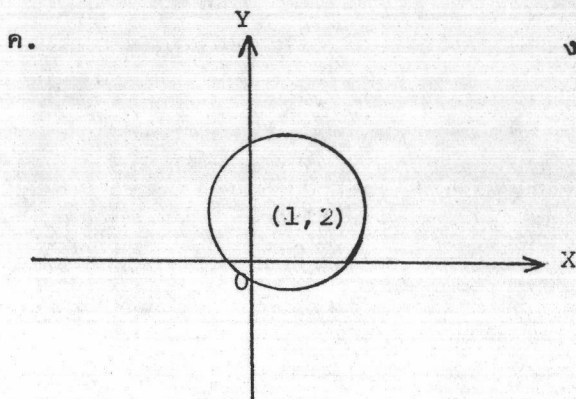
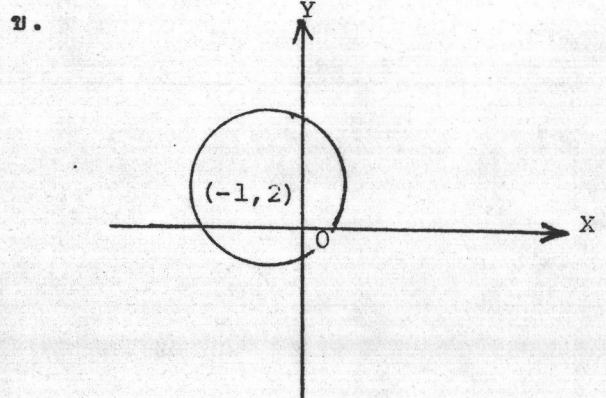
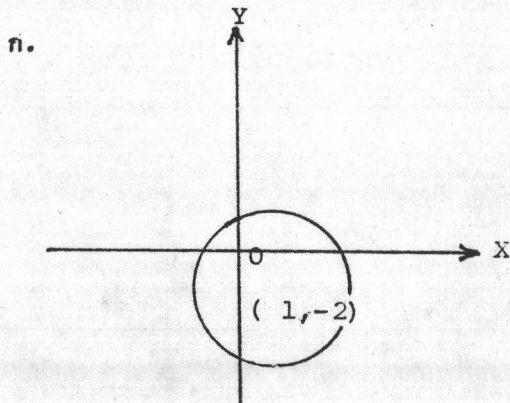
ค. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ ง. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 21 = 0$

8. วงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ และวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ ตัดกันที่จุดใด

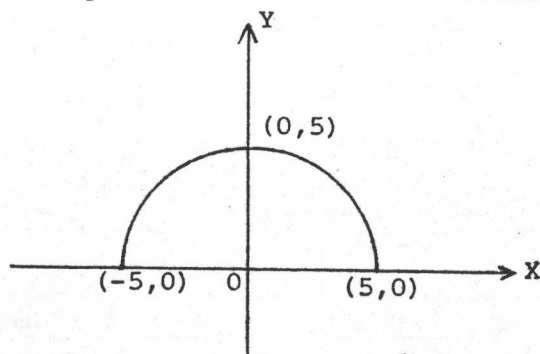
ก. $(3, 1), (-3, 3)$ ข. $(3, -1), (3, -3)$

ค. $(-3, 3), (-1, 3)$ ง. $(-3, -1), (3, 3)$

9. กราฟในข้อใดเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0\}$



10. จากรูปครึ่งวงกลม ที่กำหนดให้สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการในข้อใด



ก. $X^2 + Y^2 = 5$

ข. $\frac{X^2 + Y^2}{2} = \frac{25}{2}$

ค. $\frac{X^2 + Y^2}{2} = 25$

ง. $X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}$

11. จุดโฟกัสและสมการโคเรกตริกซ์ของกราฟ $X^2 = -14Y$ คือข้อใด

ก. $(0, -14)$ และ $Y = 14$

ข. $(-\frac{7}{2}, 0)$ และ $X = 7$

ค. $(0, -\frac{7}{2})$ และ $Y = \frac{7}{2}$

ง. $(-7, 0)$ และ $X = 7$

12. สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่จุด $(0, 0)$ และมี $(-6, 0)$ เป็นจุดโฟกัส คือสมการในข้อใด

ก. $Y^2 + 24X = 0$

ข. $X^2 - 24Y = 0$

ค. $X^2 + 6Y = 0$

ง. $Y^2 + 6X = 0$

13. สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสที่ $(-2, 3)$ และมีสมการโคเรกตริกซ์เป็น $Y+1 = 0$ คือสมการในข้อใด

ก. $X^2 + 4X - 6Y + 10 = 0$

ข. $X^2 + 4X + 6Y + 14 = 0$

ค. $X^2 - 4X + 6Y + 12 = 0$

ง. $X^2 + 4X + 6Y + 12 = 0$

14. สมการของพาราโบลามีจุดโฟกัส $(0, -\frac{11}{2})$ และมีสมการโคเรกตริกซ์เป็น $Y - \frac{11}{2} = 0$

ก. $Y^2 - 11X = 0$

ข. $X^2 + 22Y = 0$

ค. $X^2 + 11Y = 0$

ง. $Y^2 - 22X = 0$

15. สมการพาราโบลา $Y^2 - 8Y + 4X + 8 = 0$ มีจุดยอดและสมการโคเรกตริกซ์ดังข้อใด

ก. จุด $(2, 4)$ และ $X = 3$

ข. จุด $(2, 4)$ และ $Y = 4$

ค. จุด $(-4, 2)$ และ $X = 3$

ง. จุด $(-2, 4)$ และ $Y = 4$

16. สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสที่ $(1, 3)$ คือสมการในข้อใด

ก. $X^2 + 4X - 12Y - 32 = 0$

ข. $Y^2 - 6Y - 12X - 15 = 0$

ค. $Y^2 - 6Y - 12X + 33 = 0$

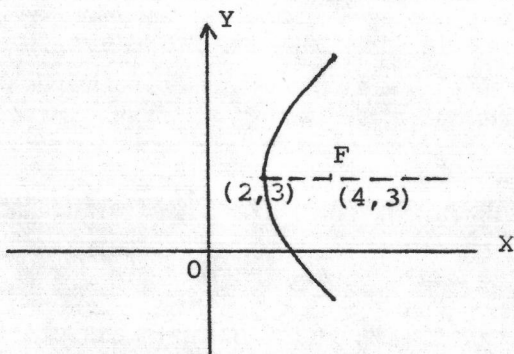
ง. $X^2 - 4X - 12Y + 40 = 0$

17. จุดยอดและโฟกัสของสมการพาราโบลา $Y^2 - 8Y + 8X + 24 = 0$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(-1, 4)$ จุดโฟกัส $(-3, 4)$ ข. จุดยอด $(1, 4)$ จุดโฟกัส $(3, 4)$

ค. จุดยอด $(4, -1)$ จุดโฟกัส $(2, -1)$ ง. จุดยอด $(-4, 1)$ จุดโฟกัส $(-6, 1)$

18. จากกราฟที่กำหนดให้ เป็นกราฟของสมการในข้อใด



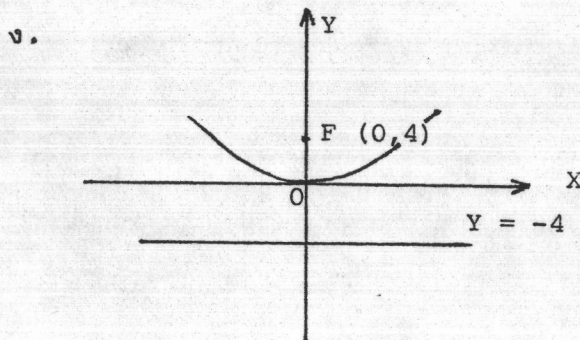
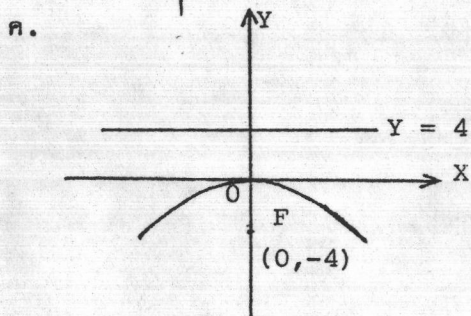
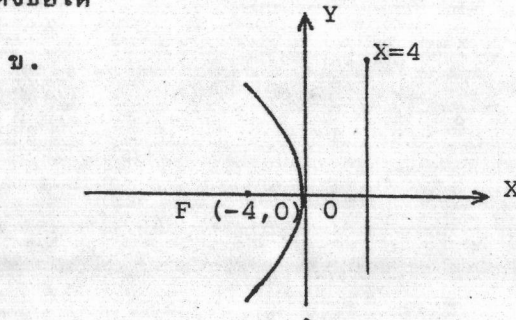
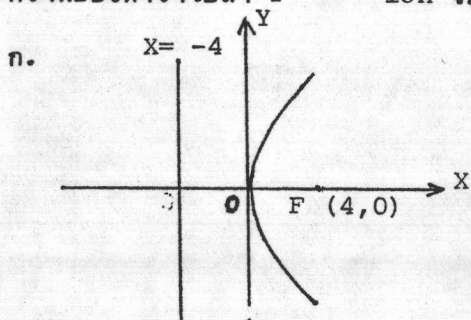
ก. $X^2 - 4X - 8Y + 28 = 0$

ข. $X^2 - 6X - 8Y + 25 = 0$

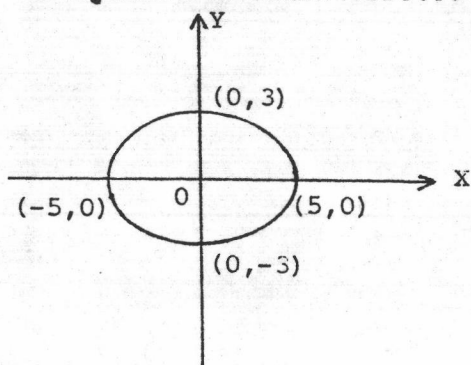
ค. $Y^2 - 4Y - 8X + 28 = 0$

ง. $Y^2 - 6Y - 8X + 25 = 0$

19. กราฟของพาราโบลา $Y^2 = -16X$ จะมีรูปร่างข้อใด



20. จากรูปสมการใดเป็นสมการของวงรี



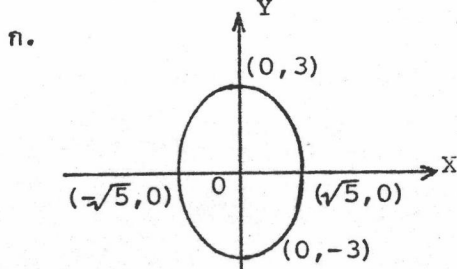
ก. $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ข. $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{25} = 1$

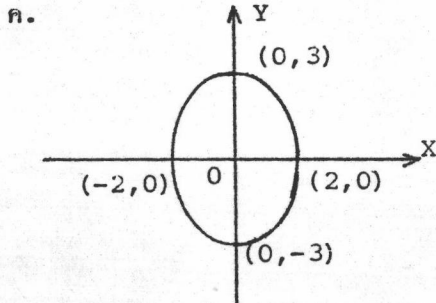
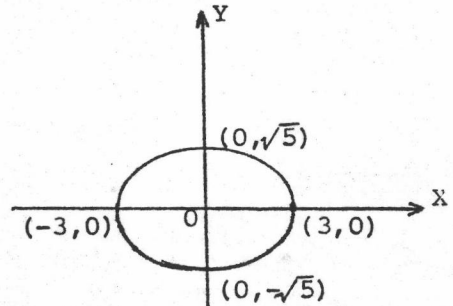
ค. $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$

ง. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{25} = 1$

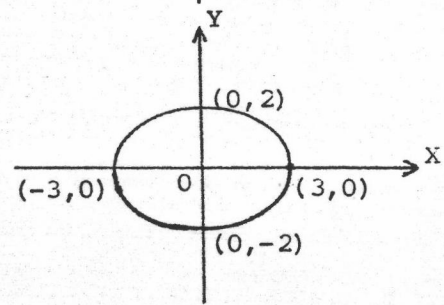
21. กราฟของวงรี $\frac{Y^2}{9} + \frac{X^2}{4} = 1$ จะมีรูปดังข้อใด



ข.



ง.



22. สมการของวงรี ซึ่งผลบวกของระยะทาง จากจุดใด ๆ บนกราฟวงรีนี้ไปยังจุดโฟกัส (0, 4) และ (0, -4) เท่ากับ 12 คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{20} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{36} + \frac{X^2}{20} = 1$

ค. $\frac{X^2}{49} + \frac{Y^2}{16} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{20} + \frac{X^2}{16} = 1$

23. สมการวงรี ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (0, +7) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0, 5) คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{24} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{49} + \frac{X^2}{25} = 1$

ค. $\frac{X^2}{49} + \frac{Y^2}{24} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{49} + \frac{X^2}{24} = 1$

24. จุดยอดและโฟกัสของวงรีที่มีสมการ $9X^2 + 16Y^2 = 144$ คือข้อใด

ก. จุดยอด (+4, 0)
จุดโฟกัส (+sqrt(7), 0)

ข. จุดยอด (0, +4)
จุดโฟกัส (0, +sqrt(7))

ค. จุดยอด (+5, 0)
จุดโฟกัส (+3, 0)

ง. จุดยอด (0, +4)
จุดโฟกัส (0, +3)

25. สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) แกนโทขนานกับแกน Y ยาว 6 หน่วย โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (5, 0) คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{34} + \frac{X^2}{25} = 1$

ค. $\frac{X^2}{34} + \frac{Y^2}{9} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{25} + \frac{X^2}{9} = 1$

26. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (3, 4) จุดโฟกัสที่ (3, 1) และแกนเอกยาว 12 หน่วย
คือสมการใด

ก. $\frac{(Y+3)^2}{25} + \frac{(X-4)^2}{9} = 1$

ข. $\frac{(Y-4)^2}{36} + \frac{(X-3)^2}{27} = 1$

ค. $\frac{(X-3)^2}{36} + \frac{(Y-4)^2}{27} = 1$

ง. $\frac{(X+3)^2}{36} + \frac{(Y+4)^2}{9} = 1$

27. สมการของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (2, -1) จุดโฟกัสที่ (-1, -1) และผ่านจุด (6, 0)
คือสมการใด

ก. $\frac{(Y+1)^2}{18} + \frac{(X-2)^2}{9} = 1$

ข. $\frac{(Y-1)^2}{18} + \frac{(X-2)^2}{9} = 1$

ค. $\frac{(X-2)^2}{18} + \frac{(Y+1)^2}{9} = 1$

ง. $\frac{(X-2)^2}{9} + \frac{(Y+1)^2}{18} = 1$

28. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ และจุดโฟกัสที่ $(-6, 0)$ คือสมการ
ในข้อใด

ก. $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{20} = 1$

ข. $\frac{Y^2}{16} - \frac{X^2}{20} = 1$

ค. $\frac{X^2}{20} - \frac{Y^2}{16} = 1$

ง. $\frac{Y^2}{20} - \frac{X^2}{16} = 1$

29. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 3) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 5) และ
โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 6) คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{(X-2)^2}{4} - \frac{(Y-3)^2}{13} = 1$

ข. $\frac{(Y-3)^2}{4} - \frac{(X-2)^2}{5} = 1$

ค. $\frac{(Y-3)^2}{5} - \frac{(X-2)^2}{4} = 1$

ง. $\frac{(X+2)^2}{13} - \frac{(Y+3)^2}{4} = 1$

30. จุดยอดและจุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า $5X^2 - 4Y^2 = 20$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(0, -2)$
จุดโฟกัส $(0, -3)$

ข. จุดยอด $(\sqrt{5}, 0)$
จุดโฟกัส $(-2, 0)$

ค. จุดยอด $(0, \sqrt{5})$
จุดโฟกัส $(0, -2)$

ง. จุดยอด $(-2, 0)$
จุดโฟกัส $(-3, 0)$

31. สมการของไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (-3, 0)
และมี (0, 4) เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนลึงยุค คือสมการในข้อใด

ก. $16Y^2 - 9X^2 = 144$

ข. $25X^2 - 9Y^2 = 225$

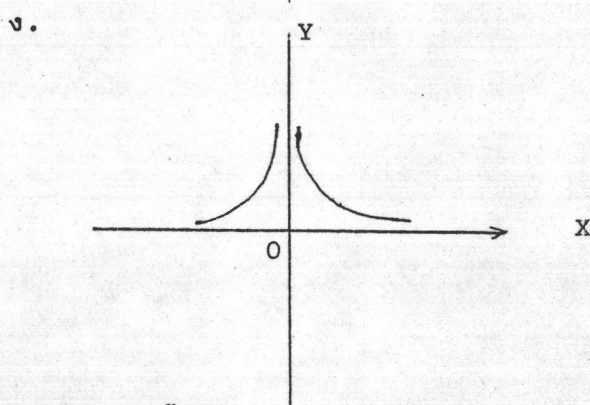
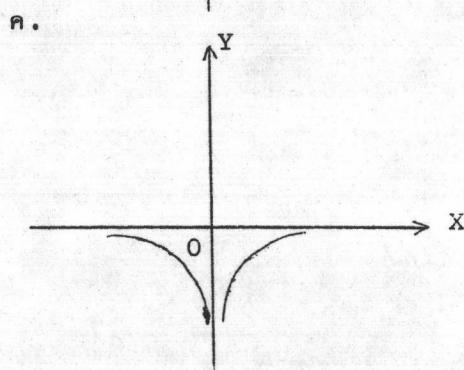
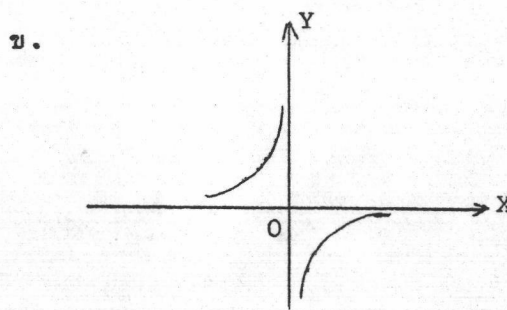
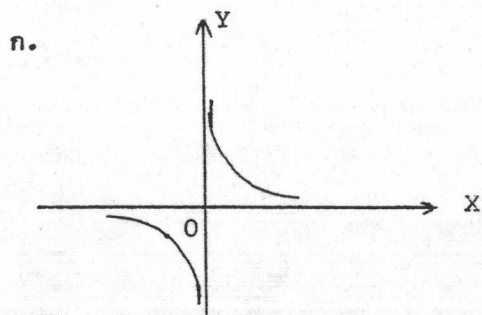
ค. $16X^2 - 9Y^2 = 144$

ง. $9Y^2 - 25X^2 = 225$

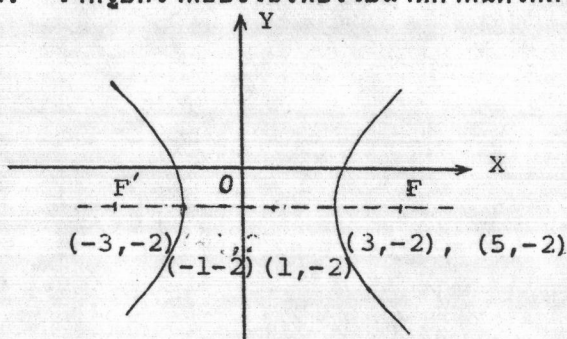
32. จุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า $9(Y-5)^2 - 7(X+3)^2 = 63$ คือข้อใด

- ก. จุดศูนย์กลาง $(5, -3)$ โฟกัส $(5, -7)$ และ $(5, 1)$
 ข. จุดศูนย์กลาง $(-5, 3)$ โฟกัส $(-5, -1)$ และ $(-5, 7)$
 ค. จุดศูนย์กลาง $(3, -5)$ โฟกัส $(3, -1)$ และ $(3, -9)$
 ง. จุดศูนย์กลาง $(-3, 5)$ โฟกัส $(-3, 1)$ และ $(-3, 9)$

33. กราฟใดเป็นกราฟของไฮเพอร์โบล่าที่มีสมการคือ $XY = -4$



34. จากรูปกราฟของไฮเพอร์โบล่าที่กำหนดให้ตรงกับสมการในข้อใด



ก. $X^2 - 3Y^2 - 2X - 12Y - 23 = 0$

ข. $3X^2 - Y^2 + 6X + 4Y - 13 = 0$

ค. $3X^2 - Y^2 - 6X - 4Y - 13 = 0$

ง. $X^2 - 3Y^2 + 2X + 12Y - 23 = 0$

35. กำหนดสมการ $4X^2 - 9Y^2 - 36 = 0$ เป็นสมการของภาคตัดกรวยชนิดใด

- ก. วงรี
 ข. พาราโบล่า
 ค. วงกลม
 ง. ไฮเพอร์โบล่า

ภาคผนวก ค

รายละเอียดการคำนวณ

1. ตัวอย่างการคำนวณค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ภาคตัดกรวย" โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน 20 (KR.20) และการวิเคราะห์รายข้อหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบแต่ละข้อ
2. การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมทางเดียว (One Way Analysis of Covariance)
3. เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัชฌิม เลขคณิต เป็นรายคู่ โดยการทดสอบค่า F ตามวิธีการของเซฟเฟ (Scheffe's method)

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ภาคตัดกรวย"

ตารางที่ 3 การคำนวณค่าความเที่ยงของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ภาคตัดกรวย" โดยใช้สูตรของ คูเดอร์
ริชาร์ดสัน 20 (KR.20)

ข้อที่	p	q	pq
1	0.80	0.20	0.1600
2	0.52	0.48	0.2496
3	0.80	0.20	0.1600
4	0.72	0.28	0.2016
5	0.62	0.38	0.2356
6	0.62	0.38	0.2356
7	0.80	0.20	0.1600
8	0.50	0.50	0.2500
9	0.80	0.20	0.1600
10	0.57	0.43	0.2451
11	0.75	0.25	0.1875
12	0.55	0.45	0.2475
13	0.40	0.60	0.2400
14	0.57	0.43	0.2451
15	0.37	0.63	0.2331
16	0.60	0.40	0.2400
17	0.35	0.65	0.2275
18	0.47	0.53	0.2491
19	0.65	0.35	0.2275
20	0.72	0.28	0.2016
21	0.65	0.35	0.2275
22	0.42	0.58	0.2436
23	0.37	0.63	0.2331
24	0.45	0.55	0.2475
25	0.35	0.65	0.2275
26	0.42	0.58	0.2436
27	0.35	0.65	0.2275
28	0.37	0.63	0.2331
29	0.52	0.48	0.2496
30	0.30	0.70	0.2100
31	0.37	0.63	0.2331
32	0.50	0.50	0.2500
33	0.70	0.30	0.2100
34	0.37	0.63	0.2331
35	0.50	0.50	0.2500
36	0.35	0.65	0.2275
37	0.55	0.45	0.2475
38	0.42	0.58	0.2436
39	0.45	0.55	0.2475
40	0.65	0.35	0.2275

$$\begin{aligned} \sum pq &= 8.8072 \\ S_x^2 &= \frac{n \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

$$= 37.0538$$

$$r_{xx} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S_x^2} \right]$$

$$r_{xx} = \frac{40}{40 - 1} \left[1 - \frac{8.8072}{37.0538} \right]$$
$$= 0.7818$$

ตารางที่ 4 การคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของ
ข้อสอบแต่ละข้อในแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การ เรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง "ภาคตัดกรวย"

ข้อที่	R_u	R_l	p	r
1	14	11	0.78	0.52
2	11	6	0.53	0.31
3	15	10	0.78	0.31
4	14	9	0.72	0.31
5	11	7	0.59	0.25
6	15	10	0.78	0.31
7	14	10	0.75	0.25
8	14	10	0.75	0.25
9	15	11	0.81	0.25
10	11	4	0.47	0.44
11	14	10	0.75	0.25
12	12	4	0.50	0.50
13	9	5	0.43	0.25
14	11	7	0.56	0.31
15	8	3	0.34	0.31
16	13	7	0.62	0.37
17	9	3	0.37	0.37
18	10	6	0.50	0.25
19	14	8	0.69	0.37
20	14	10	0.75	0.25
21	14	8	0.69	0.37
22	9	5	0.44	0.25
23	8	3	0.34	0.31
24	10	6	0.50	0.25
25	10	2	0.37	0.50
26	10	6	0.50	0.25
27	9	4	0.41	0.31
28	9	3	0.37	0.37
29	10	6	0.50	0.25
30	8	4	0.37	0.25
31	9	4	0.41	0.31
32	13	5	0.56	0.50
33	14	10	0.75	0.25
34	9	4	0.41	0.31
35	12	6	0.56	0.37
36	9	3	0.37	0.37
37	12	7	0.59	0.31
38	10	6	0.50	0.25
39	9	4	0.41	0.31
40	14	9	0.72	0.31

2. การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมทางเดียว (One-Way Analysis of Cavariance)

ตารางที่ 5 แสดงคะแนนความรู้พื้นฐาน (X) และผลสัมฤทธิ์การเรียน (Y)

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ภาคตัดกรวย" ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ตรวจให้คะแนนการบ้าน (กลุ่มที่ 1) กลุ่มที่มีการ

ทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน (กลุ่มที่ 2) และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อย

ด้วยเนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ (กลุ่มที่ 3)

กลุ่มที่ 1			กลุ่มที่ 2			กลุ่มที่ 3		
X	Y	XY	X	Y	XY	X	Y	XY
21	14	294	16	28	448	22	19	418
12	17	204	16	22	352	18	32	576
20	12	204	15	28	420	20	30	600
17	18	306	16	26	416	26	21	546
15	26	390	25	30	750	16	19	304
21	22	462	17	24	408	18	20	360
16	17	272	20	15	300	18	31	558
21	21	441	32	32	1024	24	33	792
17	20	340	20	33	660	14	20	280
16	8	128	20	27	340	20	27	540
15	13	195	16	27	432	24	15	360
22	18	396	16	28	448	13	33	429
18	18	324	27	30	810	18	23	414
19	13	247	19	29	551	22	14	308
21	22	462	16	21	336	21	39	819
16	18	288	16	24	387	22	21	462
22	9	198	22	28	616	21	20	420
16	16	256	20	24	480	25	24	600
19	12	228	18	16	288	15	26	390
17	24	408	30	32	960	20	32	640
18	18	324	16	15	240	23	24	782
13	16	208	21	24	504	17	18	306
21	20	420	23	19	437	20	34	680

กลุ่มที่ 1			กลุ่มที่ 2			กลุ่มที่ 3		
X	Y	XY	X	Y	XY	X	Y	XY
20	16	320	14	14	196	30	35	1050
20	26	520	25	30	750	20	25	500
16	16	256	15	19	285	17	21	357
17	17	289	27	29	783	16	29	464
18	35	630	19	26	494	28	37	1036
18	15	270	15	21	315	21	34	504
26	25	650	14	20	280	16	19	304
16	15	240	19	13	247	19	31	589
24	30	720	29	33	957	20	25	500
18	16	288	23	15	345	25	35	875
19	17	121	15	15	225	27	25	675
17	15	255	19	20	380	24	36	864
19	15	285	33	35	1155	28	32	896
18	16	288	24	23	552	33	37	1221
			24	23	552	18	23	414
			20	20	400	20	31	620
			24	30	720	28	33	924
			16	16	256	25	35	875
			23	15	345			
679	673		852	1006		872	1111	

$$T_X = 2403 \quad T_Y = 2788 \quad N = 120$$

2.2 หาค่าผลบวกของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนระหว่างคะแนน x กับ

มีขนิมเลขคณิต (SS_x หรือ $\sum x^2$ เมื่อ $x = X - \bar{X}$)

$$2.2.1 \text{ SS}_{\text{ทั้งหมด}} = \sum x_{ij}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$$SS_{tX} = 21^2 + 12^2 + \dots + 20^2 + 28^2 - \frac{(2403)^2}{120}$$

$$\text{หรือ } \sum x_t^2 = 2332.925$$

$$2.2.2 \text{ SS}_{\text{ระหว่างกลุ่ม}} = (T_{X_1}^2 + T_{X_2}^2 + T_{X_3}^2) / n - \frac{T_x^2}{N}$$

$$SS_{aX} = \frac{(679)^2}{37} + \frac{(852)^2}{42} + \frac{(872)^2}{41} - \frac{(2403)^2}{120}$$

$$\text{หรือ } \sum x_a^2 = 169.871$$

$$2.2.3 \text{ SS}_{\text{ภายในกลุ่ม}} = SS_{\text{ทั้งหมด}} - SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$$

$$SS_{wX} = SS_{tX} - SS_{aX}$$

$$= 2332.925 - 169.871$$

$$\sum x_w^2 = 2163.054$$

2.3 หาค่าผลบวกของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนระหว่างคะแนน y กับมีขนิม

เลขคณิต (SS_y หรือ $\sum y^2$ เมื่อ $y = Y - \bar{Y}$)

$$2.3.1 \text{ SS}_{\text{ทั้งหมด}} = \sum y_{ij}^2 - \frac{T_y^2}{N}$$

$$SS_{tY} = 14^2 + 17^2 + \dots + 31^2 + 33^2 - \frac{(2788)^2}{120}$$

$$\text{หรือ } \sum y_t^2 = 6043.467$$

$$2.3.2 \text{ SS}_{\text{ระหว่างกลุ่ม}} = (T_{Y_1}^2 + T_{Y_2}^2 + T_{Y_3}^2) / n - \frac{T_y^2}{N}$$

$$SS_{aY} = \frac{(673)^2}{37} + \frac{(1006)^2}{42} + \frac{(1111)^2}{41} - \frac{(2788)^2}{120}$$

$$\sum y_a^2 = 1668.276$$

$$2.3.3 \text{ SS}_{\text{ภายในกลุ่ม}} = SS_{\text{ทั้งหมด}} - SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$$

$$SS_{wY} = SS_{tY} - SS_{aY}$$

$$= 6043.467 - 1668.276$$

$$\sum y_w^2 = 4375.191$$

2.4 หาค่าผลรวมของผลคูณของส่วนเบี่ยงเบน ($\sum xy$)

$$2.4.1 \text{ ผลคูณทั้งหมด} = \sum (x_{ij} y_{ij}) - \frac{(\sum X \cdot \sum Y)}{N}$$

$$\begin{aligned} \sum xy_t &= 294 + 204 + \dots + 620 + 924 - \frac{(2403)(2788)}{120} \\ &= 1877.3 \end{aligned}$$

$$2.4.2 \text{ ระหว่างกลุ่ม} = \sum (T_{X_i} \cdot T_{Y_i}) / n - \frac{(\sum X \cdot \sum Y)}{N}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(679)(673)}{37} + \frac{(852)(1006)}{42} + \frac{(872)(1111)}{41} - \\ &= \frac{(2403)(2788)}{120} \end{aligned}$$

$$\sum xy_a = 557.26$$

$$2.4.3 \bar{\sum xy} \text{ ภายในกลุ่ม} = \sum xy_{\text{ทั้งหมด}} - \sum xy_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$$

$$\begin{aligned} \sum xy_w &= \sum xy_t - \sum xy_a \\ &= 1877.3 - 557.26 \\ &= 1320.04 \end{aligned}$$

ตารางที่ 6 สรุปค่าของ df, SS_x , SS_y และ $\sum xy$

แหล่ง (Source)	df	SS_x ($\sum x^2$)	SS_y ($\sum y^2$)	$\sum xy$
ระหว่างกลุ่ม (among-groups)	$3-1 = 2$	$\sum x_a^2 = 169.871$	$\sum y_a^2 = 1668.276$	$\sum xy_a = 557.26$
ภายในกลุ่ม (within groups)	$120-3 = 117$	$\sum x_w^2 = 2163.054$	$\sum y_w^2 = 4375.191$	$\sum xy_w = 1320.04$
ทั้งหมด (total)	$120-1 = 119$	$\sum x_t^2 = 2332.925$	$\sum y_t^2 = 6043.467$	$\sum xy_t = 1877.3$

2.5 หาผลบวกของกำลังสองของส่วนที่เหลือ หรือส่วนที่ปรับแล้ว คือ

$$\text{หา } \sum y'_t{}^2 \text{ หรือ } SS'_{tY} = \sum y_t^2 - \frac{(\sum xy_t)^2}{\sum x_t^2}$$

2.5.1 ทั้งหมด

$$\begin{aligned} SS'_{tY} &= \sum y_t^2 - \frac{(\sum xy_t)^2}{\sum x_t^2} \\ &= 6043.467 - \frac{(1877.3)^2}{2332.925} \end{aligned}$$

$$\sum y'_t{}^2 = 4532.808$$

2.5.2 ภายในกลุ่ม

$$\begin{aligned} SS'_{wY} &= \sum y_w^2 - \frac{(\sum xy_w)^2}{\sum x_w^2} \\ &= 4375.191 - \frac{(1320.04)^2}{2163.054} \end{aligned}$$

$$\sum y'_w{}^2 = 3569.615$$

2.5.3 ระหว่างกลุ่ม

$$SS'_{aY} = SS'_{tY} - SS'_{wY}$$

$$\begin{aligned} \sum y'_a{}^2 &= \sum y'_t{}^2 - \sum y'_w{}^2 \\ &= 4532.808 - 3569.615 \\ &= 963.193 \end{aligned}$$

2.6 สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ดังนี้

ตารางที่ 7 สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

แหล่ง	df	$SS'_{Y} (\sum y'^2)$	MS'_{Y}	F
ระหว่างกลุ่ม	$k-1 = 3-1$ $= 2$	$SS'_{aY} = 963.193$	481.596	15.65 *
ภายในกลุ่ม	$(N-k) - 1 = 116$	$SS'_{wY} = 3569.615$	30.772	x x x
ทั้งหมด	$N-2 = 118$	$SS'_{tY} = 4532.808$	x x x	

* $p < 0.05$ ($0.05 F_{2,116} = 3.08$)

จากตาราง ปรากฏว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 df (2,116) ค่า F ในตารางมีค่าเท่ากับ 3.08 แต่ค่า F ที่ได้จากการคำนวณมีค่าเท่ากับ 15.65 ซึ่งมากกว่า 3.08 ดังนั้น ผลสัมฤทธิ์การ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้านกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวคิดสำคัญแตกต่างกัน

3. เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัชฌิม เลขคณิต เป็นรายคู่โดยการทดสอบค่า F ตามวิธีของเซฟเฟ (Scheffe's method)

3.1 ปรับค่ามัชฌิม เลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์การ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ด้วยคะแนนความรู้พื้นฐานในการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "ภาคตัดกรวย" โดยใช้สมการ

$$\bar{y}'_k = \bar{y}_k - \frac{\sum xy_w}{\sum x_w^2} (\bar{x}_k - \bar{x})$$

เมื่อ k แทน กลุ่ม

\bar{x}_k แทน มัชฌิม เลข คณิตของคะแนน X ในกลุ่ม k

\bar{y}_k แทน มัชฌิม เลข คณิตของคะแนน Y ในกลุ่ม k

\bar{x} แทน มัชฌิม เลข คณิตของคะแนน X รวมทุกกลุ่ม

3.1.1 ทาค่า \bar{x}_k , \bar{y}_k , \bar{x} และ \bar{y}'_k ได้ดังนี้

$$\bar{x}_1 = \frac{679}{37} = 18.351$$

$$\bar{x}_2 = \frac{852}{42} = 20.285$$

$$\bar{x}_3 = \frac{872}{41} = 21.268$$

$$\bar{y}_1 = \frac{673}{37} = 18.189$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1006}{42} = 23.952$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1111}{41} = 27.097$$

$$\bar{x} = \frac{2403}{120} = 20.025$$

$$\bar{y} = \frac{2790}{120} = 23.25$$

$$3.1.2 \quad \sum xy_w = 1320.04$$

$$\sum x_w^2 = 2163.054$$

3.1.3 ค่าเฉลี่ยของ Y ที่ปรับแล้ว (\bar{y}'_k)

$$\bar{y}'_k = \bar{y}_k - \frac{\sum xy_w}{\sum x_w^2} (\bar{x}_k - \bar{x})$$

$$\bar{y}'_1 = 19.21$$

$$\bar{y}'_2 = 23.793$$

$$\bar{y}'_3 = 26.339$$

3.2 เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัชฌิม เลขคณิตของคะแนนสัมฤทธิ์ การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มเป็นรายคู่ ด้วยอัตราส่วน F โดยวิธีของเซฟเฟ ดังนี้

$$F = \frac{(M_1 - M_2)^2}{MS_w \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (k-1)}$$

กรณีนี้ $k = 3$, $MS_w = 30.772$, ชั้นแห่งความเป็นอิสระ 2, 116

1) กลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2

$$\begin{aligned} F &= \frac{(19.21 - 23.793)^2}{(30.772) \left(\frac{1}{37} + \frac{1}{42} \right) (2)} \\ &= \frac{21.0039}{3.1264} \\ &= 6.7182 \end{aligned}$$

2) กลุ่มที่ 2 และ กลุ่มที่ 3

$$\begin{aligned} F &= \frac{(19.21 - 26.339)^2}{(30.772) \left(\frac{1}{37} + \frac{1}{41} \right) (2)} \\ &= \frac{50.8826}{3.1393} \\ &= 16.1892 \end{aligned}$$

3) กลุ่มที่ 2 และ กลุ่มที่ 3

$$\begin{aligned} F &= \frac{(23.793 - 26.339)^2}{(30.772) \left(\frac{1}{42} + \frac{1}{41} \right) (2)} \\ &= \frac{6.4821}{2.9423} \\ &= 2.2176 \end{aligned}$$

จากตาราง $0.05 F_{2,116} = 3.08$

ค่า F ในการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เป็น $6.7182 > 3.08$

ค่า F ในการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 3 เป็น $16.1892 > 3.08$

ค่า F ในการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3 เป็น $2.2176 < 3.08$

ตารางที่ 8 แสดงความแตกต่างของค่า F เป็นรายคู่

กลุ่มที่	3	2	1
3	-	2.2176	16.1892*
2	-	-	6.7182*

* $P < 0.05$

พิจารณาค่า F จากตารางที่ 8 จะเห็นว่าที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05 ผลสัมฤทธิ์ การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยใน เนื้อหาล้างการบ้านสูงกว่ากลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้าน และผลสัมฤทธิ์ การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วย เนื้อหาตามแนวคิดสำคัญกับกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยใน เนื้อหาล้างการบ้านไม่แตกต่างกัน

ภาคผนวก ง

เอกสารขอความร่วมมือในการวิจัย



ที่ ทม 0309/ ๕๕๕๐

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท 10500

๒๔ พฤศจิกายน 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน รองศาสตราจารย์ พรรณทิพย์ มีามณี

เนื่องด้วย นาวาโทหญิง กรรณภรณ์ บุรณยุคติ นิสิตชั้นปริญญาโท บัณฑิต ภาควิชา
มัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การ
เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้าน
กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวทศสำคัญ"
โดยมี ศาสตราจารย์ ยุพิน พิพิธกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ นิสิตขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิ
ตรวจแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ วิชาคณิตศาสตร์ที่นิสิตสร้างขึ้น

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่าน ได้โปรดพิจารณาตรวจสอบเรื่องมือวิจัย
ดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.ถาวร วัชรากัย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

แผนกมาตรฐานการศึกษา

โทร. 2150895-9



บันทึกข้อความ

185

ส่วนราชการ บัณฑิตวิทยาลัย แผนกมาตรฐานการศึกษา โทร.2150895-9

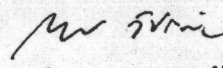
ที่ ทม 0309/๒๕๓๕ วันที่ ๑๔ พฤศจิกายน 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน รองศาสตราจารย์ กรรณิกา กวักเพชรย์

เนื่องด้วย นาวาโทหญิง กรรณภรณ์ บุรณยุคติ นิสิตชั้นปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้าน กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหา คล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ" โดยมี ศาสตราจารย์ ยุพิน พิพิธกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ นิสิตขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ วิชาคณิตศาสตร์ ที่นิสิตสร้างขึ้น

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่าน ได้โปรดพิจารณาตรวจสอบเครื่องมือวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง


(ศาสตราจารย์ ดร.ถาวร วัชรภัย)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย



ที่ ทม 0309/๘๕๓๙

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท 10500

๕๔ พฤศจิกายน 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรพรรณ ต้นบรรจง

เนื่องด้วย นาวาโทหญิง กรรณภรณ์ บุรณยุคติ นิสิตชั้นปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชา
มัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์
การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้าน
กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวทศสำคัญ"
โดยมี ศาสตราจารย์ ยุพิน พิพิธกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ นิสิตขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณ
วุฒิตรวจแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ วิชาคณิตศาสตร์ ที่นิสิตสร้างขึ้น

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่าน ได้โปรดพิจารณาตรวจสอบเครื่องมือวิจัย
ดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.ถาวร วัชรานัย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

แผนกมาตรฐานการศึกษา

โทร. 2150895-9

ที่ ทม 0309/๘๔๖๕



บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10500

3 ธันวาคม 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน อธิการวิทยาลัยครูสวนสุนันทา สหวิทยาลัยรัตนโกสินทร์

เนื่องด้วย นาวาโทหญิง กรรณภรณ์ บุรณยุคติ นิสิตชั้นปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัยเพื่อเสนอเป็นวิทยานิพนธ์เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการตรวจให้คะแนนการบ้าน กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยใน เนื้อหาค้นการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ" โดยมี ศาสตราจารย์ ยุพิน พิพิธกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ นิสิตจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องโดยการขอเข้า ทดลอง (Try-out) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนสาธิตวิทยาลัยครู สวนสุนันทา

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านได้โปรดอนุญาตให้ นาวาโทหญิง กรรณภรณ์ บุรณยุคติ ได้เก็บรวบรวมข้อมูลดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.ถาวร วัชรากัย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

แผนกมาตรฐานการศึกษา

โทร. 2150895-9



ที่ ศธ 0806/

013841

กองการมัธยมศึกษา กรมสามัญศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ กทม.10300

14 ธันวาคม 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการทำวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนเบญจมราชาลัย

ควีนาวาโทหญิง ภรรยานภณี บุรุษยภักดิ์ นิสิตปริญญาโทชั้นโท ภาคศึกษามัธยมศึกษา
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กำลังดำเนินการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การ เรียน
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการทราวจีให้คะแนนที่บ้าน กลุ่มที่มี
การทดสอบย่อยใน เนื้อหาคล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วย เนื้อหาตามแนวคิดสำคัญ" ในการนี้
นิติมีความประสงค์จะขอทดลองแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียน
เบญจมราชาลัย กรุงเทพมหานคร เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำวิจัย

กองการมัธยมศึกษาพิจารณาแล้ว เห็นว่าการทำวิจัยดังกล่าว จะเป็นประโยชน์
ต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ สมควรให้การสนับสนุน

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์ และขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

Dr. ม.ท. ๑๐๗

(นายวีระ บุญชะนิวาศ)

คณบดีฝ่ายบริหารโรงเรียนมัธยมศึกษา ๒ รักษาการแทน

ผู้อำนวยการกองการมัธยมศึกษา

ฝ่ายมาตรฐานโรงเรียน

โทร. 2819992



ที่ ศบ 0806/ 013840

กองการมัธยมศึกษา กรมสามัญศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ กทม.10300

14 ธันวาคม 2530

เรื่อง ขอความร่วมมือในการทำวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนเทพศิลา

ด้วย นาวาโทหญิง ภรรยานภณี บุรุษยุกติ นิสิตปริญญาโทบัณฑิต ภาคศึกษามัธยมศึกษา
บัณฑิตวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กำลังดำเนินการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่มีการทบทวนให้คะแนนที่บ้าน
กลุ่มที่มีการทดสอบย่อยในเนื้อหาคล้ายการบ้าน และกลุ่มที่มีการทดสอบย่อยด้วยเนื้อหาตามแนวทฤษฎีสำคัญ"
ในการนี้ นิสิตมีความประสงค์จะขอทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนเทพศิลา
กรุงเทพมหานคร เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำวิจัย

กองการมัธยมศึกษาพิจารณาแล้ว เห็นว่าการทำวิจัยดังกล่าว จะเป็นประโยชน์
ต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ สมควรให้การสนับสนุน

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์ และขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

ดร. มหะเวง

(นายธีร บัญชรนิเวศ)

หัวหน้าฝ่ายบริหารโรงเรียนมัธยมศึกษา ๒ รักษาการแทน

ผู้อำนวยการกองการมัธยมศึกษา

ฝ่ายมาตรฐานโรงเรียน

โทร. 2819992



ประวัติผู้วิจัย

นาวาโทหญิง วรรณภรณ์ นุรณฤทธิ เกิดเมื่อวันที่ 17 มิถุนายน 2489 ที่
อำเภอคูคต กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษา วิทยาศาสตร์บัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์
จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2514 เข้าศึกษาต่อสาขาการศึกษา คณิตศาสตร์
ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2529 ปัจจุบัน
ดำรงตำแหน่ง อาจารย์ กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร
กองบัญชาการทหารสูงสุด