บทที่ 2

หลักการวิเคราะห์เส้นใยแสงที่มีความสมมาตรรอบแนวแกนด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนท์

ความนำ

ขั้นตอนของการวิเคราะห์เส้นใยแสงจะเริ่มต้นจากชุดสมการของแมกซ์เวลล์(Maxwell's equation) เมื่อทำการดัดแปลงชุดสมการของแมกซ์เวลล์แล้ว รูปแบบสมการพื้นฐานของแมกซ์เวลล์จะอยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนเชียล (differential equation) โดยอาศัยหลักการของไฟไนต์อีลีเมนท์ทำการหารูปแบบสมการที่สอดคล้องกับแมกซ์เวลล์ที่เรียกว่านิพจน์แปรผัน (variational expression) รูปแบบของนิพจน์แปรผันที่นำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้ถูกเสนอโดย (Matsuhara et al. 1992) รูปแบบนิพจน์แปรผันนี้จะใช้องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันทดสอบ (trial function) นิพจน์แปรผันที่นำเสนอโดยทีมวิจัยนี้สามารถกำจัดคำตอบแปลกปลอม(spurious) และเนื่องจากโครงสร้างของเส้นใยแสงที่นิยมใช้มีความสมมาตรรอบแนวแกน ดังนั้นจึงทำการแปลงระบบพิกัดให้เหมาะสมกับปัญหาเส้นใยแสงโดยทำการแปลงระบบพิกัดจากพิกัดมุมฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก

ขั้นตอนต่อไปของวิธีไฟไนต์อีลีเมนท์คือการแทนค่าฟังก์ชันทดสอบลงในนิพจน์แปรผัน ผู้ทำวิจัยจะใช้ฟังก์ชันทดสอบเดียวกับงานวิจัยข้างต้นคือฟังก์ชันขั้นบันได (step function) และ ฟังก์ชันรูฟท็อป (rooftop function) เมื่อทำการแทนฟังก์ชันทดสอบลงในนิพจน์แปรผันแล้วจึงสามารถจัดนิพจน์แปรผันให้อยู่ในรูปสมการค่าเจาะจง โดยที่ค่าเจาะจงคือค่าคงตัวการแพร่กระจาย (β)

สมการพื้นฐาน

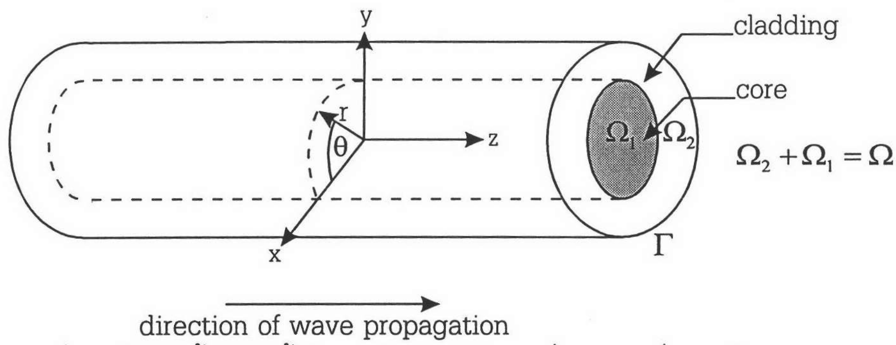
1. สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation)

พิจารณาโครงสร้างของเส้นใยแสง จะประกอบไปด้วยตัวกลางไดอิเล็กตริกที่ถูกนำมาหุ้มกันเป็นชั้น ๆ อย่างสมมาตรรอบแนวแกนดังรูปที่ 2.1 พิจารณาตัวกลางไดอิเล็กตริกที่ถูกนำมาหุ้มกันเป็นชั้น ๆ อย่างสมมาตรรอบแนวแกนที่ไม่มีการสูญเสีย (lossless dielectric) และมีความสม่ำเสมอในแนวแกน z ที่มีภาค

ตัดขวางเป็นทรงกระบอกในระนาบ xy และขอบเขตของบริเวณที่พิจารณา (Ω) คือ Γ ดังแสดงดังรูป 2.1 สมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบฮาร์มอนิกในบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิดคือ

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{2.01}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{2.02}$$



รูปที่ 2.1 โครงสร้างของเส้นใยแสงในภาคตัดขวางที่มีความสม่ำเสมอในแนวแกน z

เมื่อ ε (permittivity) และ μ (permeability) คือสภาพยอมและความซาบซึมได้ของตัวกลางตามลำดับ จากสมการที่ (2.01) ทำการ $(\nabla \times)$ ตลอดและแทนค่าสมการที่ (2.02) ลงไปจะได้ว่า

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \tag{2.03}$$

โดยที่ $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง , $\mu_r = \mu / \mu_0$ คือความซาบซึมได้สัมพัทธ์ $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ คือสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง ε_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ

สำหรับเส้นใยแสงที่ความสม่ำเสมอในแนวแกน z นั้น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีการเปลี่ยนแปลงในทิศ z อยู่ในรูปของ $\exp(-j\beta z)$ เมื่อ β คือค่าคงตัวการแพร่กระจาย องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าสามารถเขียนอยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวาง (x,y) และองค์ประกอบในแนวแกน z ได้เป็น

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t + E_z)\exp(-j\beta z) \tag{2.04}$$

โดยที่ $\mathbf{E}_t = \mathbf{i}_x E_x + \mathbf{i}_y E_y$, $\mathbf{i}_x$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x , $\mathbf{i}_y$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง y , $\mathbf{i}_z$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง z

โดยอาศัยเทคนิคการแปลงตัวแปร(Jin-Fa Lee 1991) จะได้ว่า

$$E_x \beta = f_x$$

$$E_y \beta = f_y$$

$$-jE_z = g_z$$

และให้ $\mathbf{f}_t = \mathbf{i}_x f_x + \mathbf{i}_y f_y$

เมื่อ $\mathbf{f}_t$ คือเวกเตอร์สนามไฟฟ้าในแนวตามขวาง , g_z คือปริมาณสเกลาร์ของสนามไฟฟ้าที่มีองค์ประกอบตามแนวภาคตัดขวาง (x,y) , $\mathbf{i}_x$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x , $\mathbf{i}_y$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง y , $\mathbf{i}_z$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง z

โดยอาศัยเทคนิคการแปลงตัวแปรสมการที่ (2.04) จะได้ว่า

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{f}_t + j\beta g_z \mathbf{i}_z\right)\exp(-j\beta z) \tag{2.05}$$

ตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถเขียนอยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบในแนวแกน z ได้เป็น

$$\nabla = \nabla_t - j\beta \mathbf{i}_z \tag{2.06}$$

แทนสมการ (2.05) ในสมการ (2.03) พจน์ทางซ้ายของสมการ (2.03) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla\times\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E} &= \nabla\times\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla_t - j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\left(\mathbf{f}_t + j\beta g_z\mathbf{i}_z\right)\\ &= \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times\mathbf{f}_t\right) + \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t\times j\beta\mathbf{i}_z\right)\right) + \left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t\times j\beta\mathbf{i}_z\right)\right)\\ &\quad + \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times j\beta\mathbf{i}_z g_z\right) + \left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times j\beta\mathbf{i}_z g_z\right)\end{aligned} \tag{2.07}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{2.08}$$

พจน์ $\left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t\times j\beta\mathbf{i}_z\right)\right)$ ในสมการที่ (2.07) สามารถเขียนได้เป็น

$$\left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t\times j\beta\mathbf{i}_z\right)\right) = \frac{\beta^2}{\mu_r}\mathbf{f}_t \tag{2.09}$$

พจน์ $\left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times j\beta\mathbf{i}_z g_z\right)$ ในสมการที่ (2.07) สามารถเขียนได้เป็น

$$\left(\left(-j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times j\beta\mathbf{i}_z g_z\right) = \frac{\beta^2}{\mu_r}\nabla_t g_z \tag{2.10}$$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.08) สมการ (2.09) สมการ (2.07) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla\times\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E} &= \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times\mathbf{f}_t\right) + \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t\times j\beta\mathbf{i}_z\right)\right) + \left(\frac{\beta^2}{\mu_r}\mathbf{f}_t\right)\\ &\quad + \left(\nabla_t\times\frac{1}{\mu_r}j\beta\nabla_t g_z\times\mathbf{i}_z\right) + \left(\frac{\beta^2}{\mu_r}\nabla_t g_z\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

แยกพจน์ที่ (1) (3) (5) ทางขวามือของสมการที่ (2.11) จะได้ว่า

$$\left(\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r}\nabla_t \times \mathbf{f}_t\right)+\left(\frac{\beta^2}{\mu_r}\left(\mathbf{f}_t+\nabla_t g_z\right)\right)-k_0^2\varepsilon_r\mathbf{f}_t=0 \quad (2.12)$$

และพจน์ที่ (2) (4) ทางขวาของสมการที่ (2.11) จะได้ว่า

$$\left(\nabla_t \times \frac{1}{\mu_r}\beta^2\left(\mathbf{f}_t+\nabla_t g_z\right)\times \mathbf{i}_z\right)-k_0^2\beta^2\varepsilon_r g_z=0 \quad (2.13)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.12) และ (2.13) สมการ (2.03) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบในแนวแกน z ได้ดังนี้

$$\left(\mu\nabla_t \times \frac{1}{\mu}\nabla_t \times \mathbf{f}_t\right)+\beta^2\left(\mathbf{f}_t+\nabla_t g_z\right)=k^2\mathbf{f}_t \quad (2.14)$$

$$\mu\nabla_t \cdot \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{f}_t+\nabla_t g_z\right)+k^2 g_z=0 \quad (2.15)$$

ชุดสมการที่ (2.14) และ (2.15) นี้เป็นรูปสมการที่ติดอยู่ในรูปของดิฟเฟอเรนเชียลหรือเรียกว่ารูปสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation)

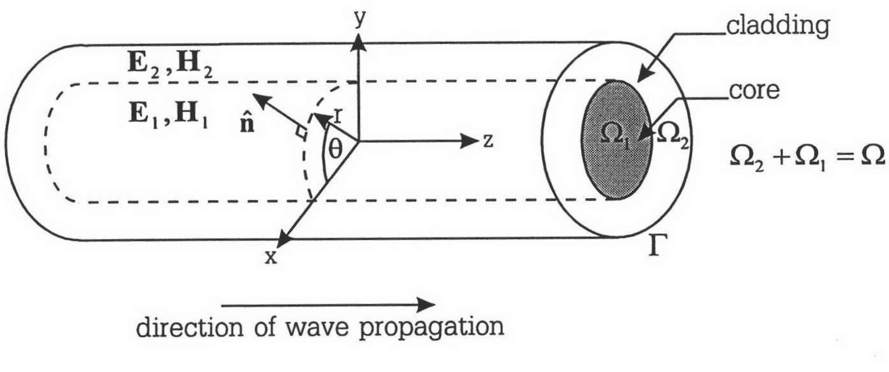
2. เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

สำหรับสนามไฟฟ้าในเส้นใยแสงต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditon) บนรอยต่อระหว่างตัวกลางที่ไม่ต่อเนื่องดังสมการ

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1\right)=0 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1\right)=0 \quad (2.17)$$

เมื่อ $\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1$ และ $\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2$ คือ $\mathbf{E},\mathbf{H}$ ในตัวกลางที่ 1 และตัวกลางที่ 2 ตามลำดับ , $\mathbf{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางตั้งฉากกับผนังเส้นใยแสง ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงเงื่อนไขขอบเขตบนผนังเส้นใยแสง

จากสมการที่ (2.16) และ (2.17) เมื่อแทนสมการ (2.05) ลงไปจะได้เงื่อนไขขอบเขตสำหรับองค์ประกอบของสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ ในแนวภาคตัดขวางและแนวแกน z ดังนี้

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{f}_t + j\beta\mathbf{i}_z g_z\right) = continuous \tag{2.18}$$

เมื่อแยกองค์ประกอบตามแนวภาคตัดขวางและแนวแกน z แล้ว เงื่อนไขขอบเขตสำหรับองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวภาคตัดขวางและแนวแกน z เขียนได้เป็นดังนี้

$$\mathbf{i}_z\cdot\left(\mathbf{n}\times\mathbf{f}_t\right) = continuous \qquad (2.19ก)$$

$$g_z = continuous \qquad (2.19ข)$$

เงื่อนไขขอบเขตของสนามแม่เหล็ก $\mathbf{H}$ คือ $\mathbf{n}\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right) = continuous$ เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.06) เงื่อนไขขอบเขตบนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right) &= \mathbf{n}\times\frac{1}{\mu_r}\left[\left(\nabla_t - j\beta\mathbf{i}_z\right)\times\left(\mathbf{f}_t + j\beta\mathbf{i}_z g_z\right)\right]\\ &= \mathbf{n}\times\frac{1}{\mu_r}\left[\left(\nabla_t\times\mathbf{f}_t\right) + \left(\left(j\beta\nabla_t g_z + j\beta\mathbf{f}_t\right)\times\mathbf{i}_z\right)\right]\end{aligned} \tag{2.20}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ตามสมการที่ (2.08) จะได้ว่า

$$\mathbf{n}\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right) = \mathbf{n}\times\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla_t\times\mathbf{f}_t\right) - \mathbf{n}\cdot\frac{1}{\mu_r}\left(j\beta\nabla_t g_z + j\beta\mathbf{f}_t\right)\mathbf{i}_z \tag{2.21}$$

จากสมการที่ (2.21) เมื่อทำการแยกองค์ประกอบตามแนวภาคตัดขวางและแนวแกน z เงื่อนไขขอบเขตสำหรับองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวภาคตัดขวางและแนวแกน z เขียนได้ว่า

$$\mathbf{n}\cdot\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla_t g_z + \mathbf{f}_t\right) = continuous \qquad (2.22ก)$$

$$\mathbf{i}_z\cdot\frac{1}{\mu_r}\nabla_t\times\mathbf{f}_t = continuous \qquad (2.22ข)$$

หลักการและขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนท์

1. นิพจน์แปรผัน (Variational expression)

คุณสมบัติที่สำคัญของนิพจน์แปรผันคือจะให้ค่าของนิพจน์แปรผันจะมีค่าต่ำที่สุดหรือสูงสุดเมื่อแทนคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ต้องการทราบค่าลงในนิพจน์แปรผัน วิธีการที่ใช้ในการพิจารณาค่าของตัวแปรที่ทำให้นิพจน์แปรผันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือการตั้งเงื่อนไขให้อนุพันธ์ของค่านิพจน์แปรผันเมื่อ

เทียบกับตัวแปรแต่ละตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ เงื่อนไขข้อนี้เรียกว่า ภาวะคงที่ (stationary condition) จากงานวิจัย Matsuhara et al. 1992 ได้นำเสนอรูปแบบนิพจน์แปรผันที่ใช้องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าตามสมการที่ (2.05) เป็นฟังก์ชันทดสอบซึ่งรูปแบบนิพจน์แปรผันที่นำเสนอโดย Matsuhara et al. 1992 สามารถกำจัดคำตอบแปลกปลอมได้ดีเขียนได้เป็น (รายละเอียดที่มาของนิพจน์แปรผันจะแสดงในภาคผนวก ก.)

$$\beta^2(\mathbf{f}_t, g_z) = \frac{a(\mathbf{f}_t)}{b(\mathbf{f}_t, g_z)} \tag{2.23ก}$$

$$a(\mathbf{f}_t) = k_0^2 \varepsilon_r \iint |\mathbf{f}_t|^2 d\Omega - \iint \left[\frac{1}{\mu_r} \left| (\nabla_t \times \mathbf{f}_t) \right|^2 \right] d\Omega \tag{2.23ข}$$

$$b(\mathbf{f}_t, g_z) = \iint \left[\frac{1}{\mu_r} \left| (\nabla_t g_z + \mathbf{f}_t) \right|^2 - k_0^2 \varepsilon_r |g_z|^2 \right] d\Omega \tag{2.23ค}$$

โดยที่ $\beta(\mathbf{f}_t, g_z)$ = ค่าคงตัวการแพร่กระจายที่สามารถหาได้จากองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตามขวางและแนวแกน z และเงื่อนไขขอบเขตขององค์ประกอบสนามไฟฟ้าแต่ละองค์ประกอบจะเป็น

$$\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}_t) = continuous \tag{2.19ก}$$

$$g_z = continuous \tag{2.19ข}$$

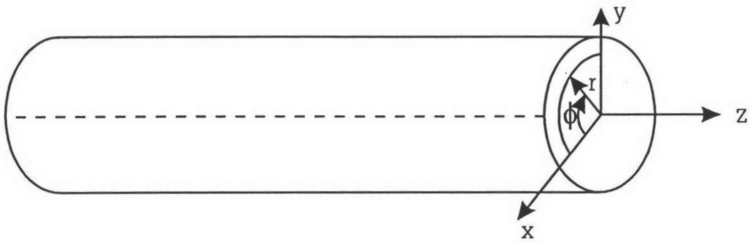
2. นิพจน์แปรผันในระบบพิกัดทรงกระบอก

จากชุดสมการที่ (2.23) พิกัดจะอยู่ในระบบพิกัดมุมฉาก (rectangular coordinates) (x, y, z) เพื่อให้การวิเคราะห์เส้นใยแสงมีความง่ายขึ้นและเหมาะสมกับปัญหาในงานวิจัยนี้จะทำการเปลี่ยนระบบพิกัดให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinates) (r, θ, z) ถ้าทำการแปลงระบบพิกัดในชุดสมการที่ (2.23) และเงื่อนไขขอบเขตตามชุดสมการที่ (2.24) ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอกได้จะทำให้การทำงานสะดวกและเหมาะสมกับปัญหาที่เป็นจริงมากขึ้น ขั้นตอนการแปลงระบบพิกัด โดยอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.25)

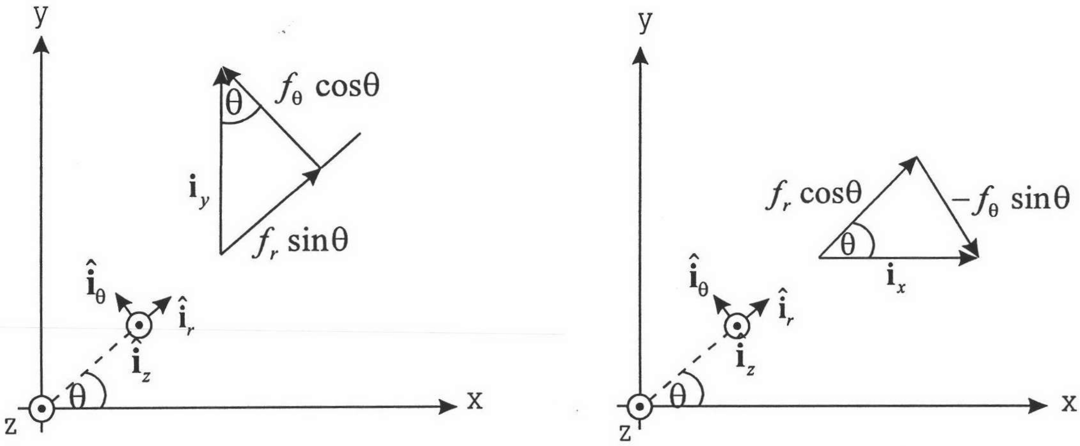
$$\mathbf{f}_t(x, y) = \mathbf{i}_r f_r(r) \begin{cases} \cos(l\theta) \\ \sin(l\theta) \end{cases} + \mathbf{i}_\theta f_\theta(r) \begin{cases} -\sin(l\theta) \\ \cos(l\theta) \end{cases} \tag{2.25ก}$$

$$g_z(x, y) = g(r) \begin{cases} \cos(l\theta) \\ \sin(l\theta) \end{cases} \tag{2.25ค}$$

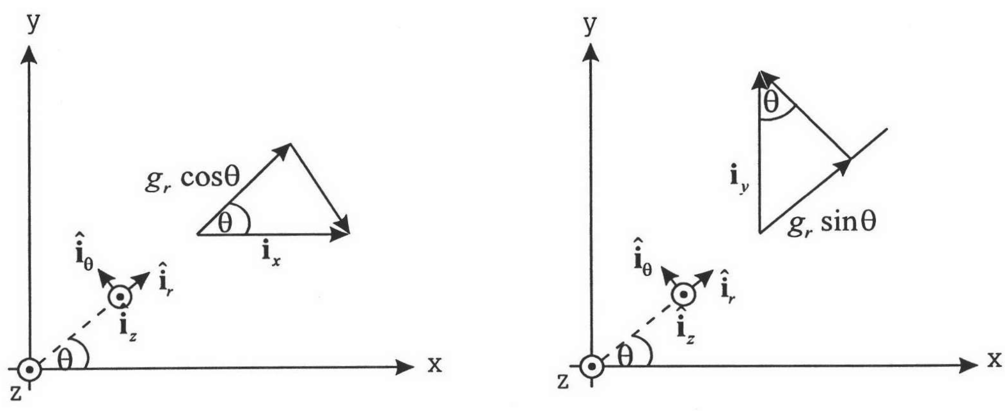
โดยที่ $f_r(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทาง r (รัศมี) ที่มีองค์ประกอบตามแนว r และ $f_\theta(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทาง θ ที่มีองค์ประกอบตามแนว r และ $g(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทาง z ที่มีองค์ประกอบตามแนว r , และ l คือตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศ (azimuthal quantization number)



รูปที่ 2.3 ก ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดมุมฉาก



รูปที่ 2.3 ข ความสัมพันธ์ของฟังก์ทดสอบ f_r, f_θ เมื่อแปลงระบบพิกัดมุมฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 2.3 ค ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันทดสอบ g_r เมื่อแปลงระบบพิกัดมุมฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก

ทำการแทนชุดสมการที่ (2.25) ลงในชุดสมการที่ (2.23) รูปสมการนิพจน์แปรผันที่ทำการแปลงระบบพิกัดจะได้ดังนี้

$$\beta^2(f_r, f_\theta, g) = \frac{a(f_r, f_\theta)}{b(f_r, f_\theta, g)} \quad (2.26ก)$$

$$a(f_r, f_\theta) = \int_0^\infty \left\{ k_0^2 \eta^2 \left(f_r^2 + f_\theta^2\right) - \left(-\frac{\partial f_\theta}{\partial r} - \frac{f_\theta}{r} + \frac{l}{r} f_r\right)^2 \right\} r dr \quad (2.26ข)$$

$$b(f_r, f_\theta, g) = \int_0^\infty \left\{ \left(f_r^2 + \frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \left(f_\theta + \frac{l}{r} g\right)^2 - k_0^2 \eta^2 g^2 \right\} r dr \quad (2.26ค)$$

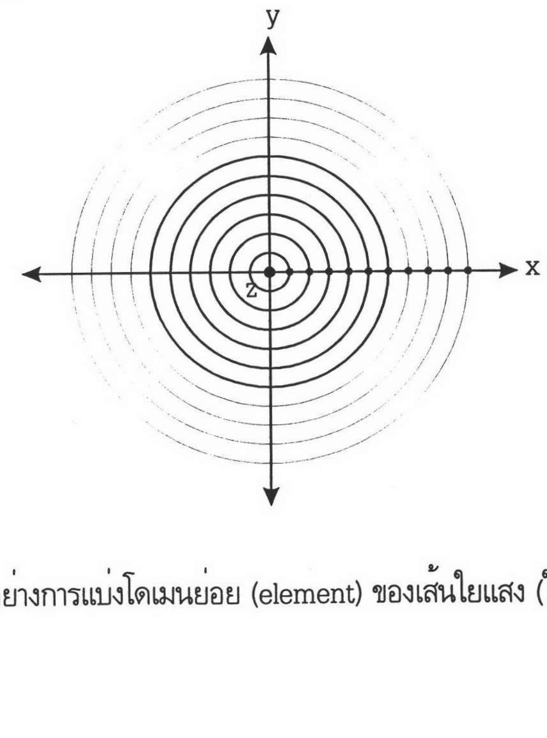
โดยที่ $f_r(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทางr (รัศมี) ที่มีองค์ประกอบตามแนว r และ $f_\theta(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทางθ ที่มีองค์ประกอบตามแนว r และ $g(r)$ คือปริมาณสนามไฟฟ้าในทิศทาง z ที่มีองค์ประกอบตามแนว r , และ l คือตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศ (azimuthal quantization number) และเงื่อนไขขอบเขตตามชุดสมการที่ (2.26) จะได้ดังนี้

$$f_\theta = continuous \quad (2.27ก)$$

$$g_z = continuous \quad (2.27ข)$$

3. ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ของ f_r, f_θ, g และการจัดรูปเมตริกซ์

ในงานวิจัยนี้เนื่องจากปัญหาของเส้นใยแสงมีความสมมาตรรอบแนวแกนดังนั้นมิติของการพิจารณาปัญหาจะเหลือเพียงมิติเดียวคือตามแนวรัศมีตามรูปที่ 2.4 ทำการแบ่งปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยเล็กๆ ดังรูปที่ 2.4 โดยที่โดเมนย่อยของปัญหาเรียกว่าอีลีเมนท์ รูปร่างของฟังก์ชันทดสอบในงานวิจัยนี้ภายในแต่ละอีลีเมนท์ (element) จะเป็นดังนี้



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนย่อย (element) ของเส้นใยแสง (ในภาคตัดขวาง)

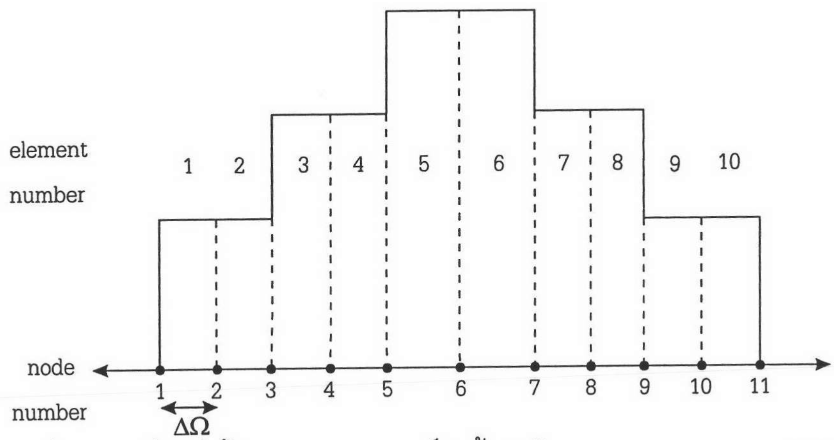
สำหรับฟังก์ชันทดสอบที่เราจะใช้ในการทดสอบนั้นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตตามสมการที่ (2.27) ฟังก์ชันที่เราจะใช้ในงานวิจัยนี้จะเป็นดังนี้

$$f_r(r) = \sum_m c_m t_m(r) \tag{2.28}$$

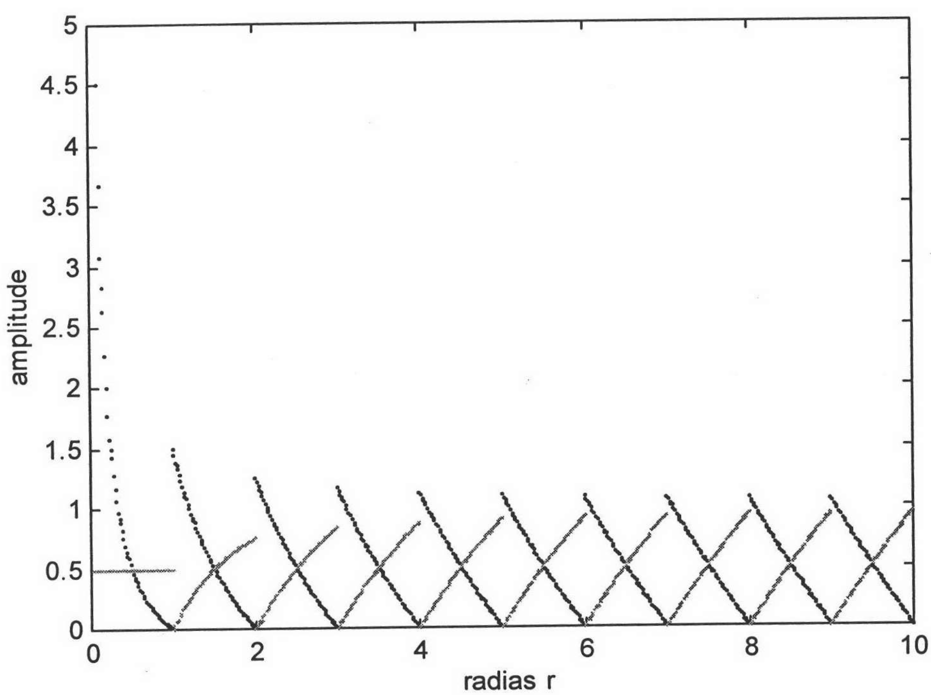
$$f_\theta(r) = \sum_m d_m \frac{r_m}{r} u_m(r) \tag{2.29}$$

$$g(r) = \sum_m e_m u_m(r) \tag{2.30}$$

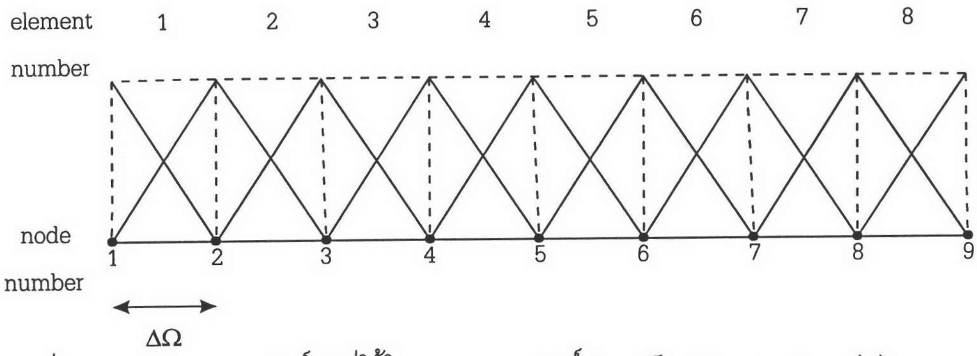
โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละฟังก์ชันทดสอบจะเป็นดังนี้โดยที่ $t_m(r)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบ ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) $t_m(r)$



รูปที่ 2.6 ก ฟังก์ชันรูฟท็อป (rooftop function) $\frac{r_m}{r} u_m(r)$



รูปที่ 2.6 ข ลักษณะของฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบฟังก์ชันรูฟท็อป (rooftop) $u_m(r)$

$\frac{r_m}{r}u_m(r)$ คือ ฟังก์ชันรูฟท็อป (rooftop function) ดังรูปที่ 2.6 ก , $u_m(r)$ คือ ฟังก์ชันรูฟท็อป (rooftop function) ดังรูปที่ 2.6 ข และ c_m, d_m, e_m คือสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราค่า และ r_m คือค่าที่จุดโคออร์ดิเนตเมื่อฟังก์ชัน $u_m(r)$ มีค่าเท่ากับ 1

สำหรับฟังก์ชันรูฟท็อปนั้นความสัมพันธ์ของค่าฟังก์ชันที่แต่ละโนดจะเป็นดังนี้

ฟังก์ชัน $\frac{r_m}{r}u_m(r)$ ที่โนด 1 จะได้ว่า $N_1 = \frac{r_m}{r}\frac{(r_2 - r)}{(r_2 - r_1)}$ (2.31ก)

ฟังก์ชัน $\frac{r_m}{r}u_m(r)$ ที่โนด 2 จะได้ว่า $N_2 = \frac{r_m}{r}\frac{(r - r_1)}{(r_2 - r_1)}$ (2.31ข)

ฟังก์ชัน $u_m(r)$ ที่โนด 1 จะได้ว่า $N_1 = (r_2 - r)$ (2.31ค)

ฟังก์ชัน $u_m(r)$ ที่โนด 2 จะได้ว่า $N_1 = (r - r_1)$ (2.31ง)

ขั้นตอนต่อไปของวิธีไฟไนต์อีลีเมนท์คือการจัดรูปนิพจน์แปรผันให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ซึ่งคุณสมบัติของเมตริกซ์ที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้คือ

$$(xA + yB)^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.32ก)$$

$$(xA - yB)^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AA & -AB \\ -BA & BB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.32ข)$$

โดยที่ A ,B คือตัวแปรใด ๆ และ x,y คือสัมประสิทธิของตัวแปร

จากชุดสมการ (2.26) สมการที่ (2.26ข) โดยอาศัยคุณสมบัติของเมตริกซ์ตามสมการ (2.31ก) และ(2.32ข)จะได้ว่า

$$a\left(f_r,f_\theta\right)=\left\{\begin{array}{l}\int_0^\infty k_0^2n^2\left(f_r^2+f_\theta^2\right)- \\ \begin{bmatrix} \int_0^\infty\left[\left(\frac{l}{r}f_r\right)\left(\frac{l}{r}f_r\right)\right] & -\int_0^\infty\left[\left(\frac{l}{r}f_r\right)\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r}\right)\right] \\ -\int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r}\right)\left(\frac{l}{r}f_r\right)\right] & \int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r}\right)\right]\end{bmatrix}\end{array}\right\}rdr \qquad (2.33)$$

เขียนในรูปเมตริกซ์ทั่วไปได้ดังนี้

$$a\left(f_r,f_\theta\right)=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & [0]\\ A_{21} & A_{22} & [0]\\ [0] & [0] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} \qquad (2.34)$$

A_{11} คือเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีองค์ประกอบของ f_r , f_r

A_{12} คือเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีองค์ประกอบของ f_r , f_θ

A_{21} คือเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีองค์ประกอบของ f_θ , f_r

A_{22} คือเมตริกซ์จัตุรัส A ที่มีองค์ประกอบของ f_θ , f_θ

และ $\phi_1=\left[c_1,c_2,c_3,\ldots,c_m\right]^T$, $\phi_2=\left[d_1,d_2,d_3,\ldots,d_m\right]^T$, $\phi_3=\left[e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\right]^T$ โดยที่ m คือจำนวนอีลีเมนท์ที่ใช้ทดสอบทั้งหมด

โดยที่รายละเอียดของแต่ละเมตริกซ์ย่อยจะเป็นดังนี้

$$A_{11}=A_{f_rf_r}=\int_0^\infty k_0^2n^2f_r^2rdr-\int_0^\infty\frac{l^2}{r^2}f_r^2rdr \qquad (2.35ก)$$

$$A_{12}=A_{21}^T=A_{f_rf_\theta}=A_{f_\theta f_r}{}^T=\int_0^\infty\left[\left(\frac{l}{r}f_r\cdot\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\right)+\left(\frac{l}{r}f_r\cdot\frac{f_\theta}{r}\right)\right]rdr \qquad (2.35ข)$$

$$A_{22}=A_{f_\theta f_\theta}=\int_0^\infty k_0^2n^2f_\theta^2rdr-\int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\right)^2+\left(2\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\cdot\frac{f_\theta}{r}\right)+\left(\frac{f_\theta}{r}\right)^2\right]rdr \qquad (2.35ค)$$

สมการที่ (2.26ค) จะได้ว่า

$$b\left(f_r,f_\theta,g\right)=\left(\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\int_0^\infty\left[f_r\cdot f_r\right] & [0] & \int_0^\infty\left[f_r\cdot\frac{\partial g}{\partial r}\right]\\ [0] & [0] & [0]\\ \int_0^\infty\left[\frac{\partial g}{\partial r}\cdot f_r\right] & [0] & \int_0^\infty\left[\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial g}{\partial r}\right]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[0] & [0] & [0]\\ [0] & \int_0^\infty\left[f_\theta\cdot f_\theta\right] & \int_0^\infty\left[f_\theta\cdot\frac{l}{r}g\right]\\ [0] & \int_0^\infty\left[\frac{l}{r}\cdot g\right] & \int_0^\infty\left[\frac{l}{r}g\cdot\frac{l}{r}g\right]\end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix}[0] & [0] & [0]\\ [0] & [0] & [0]\\ [0] & [0] & \int_0^\infty\left[k_0^2n^2g^2\right]\end{bmatrix}\end{array}\right)rdr$$

(2.36)

ซึ่งเขียนในรูปเมตริกซ์ทั่วไปได้ดังนี้

$$b(f_r, f_\theta, g) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{11} & [0] & B_{13} \\ [0] & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

B_{11} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ f_r , f_r

B_{13} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ f_r , g

B_{22} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ f_θ , f_θ

B_{23} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ f_θ , g

B_{31} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ g , f_r

B_{32} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ g , f_θ

B_{33} คือเมตริกซ์จัตุรัส B ที่มีองค์ประกอบของ g , g

และ $\phi_1 = [c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m]^T$, $\phi_2 = [d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m]^T$, $\phi_3 = [e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m]^T$ โดยที่ m คือจำนวนอีลีเมนท์ที่ใช้ทดสอบทั้งหมด

โดยที่องค์ประกอบของเมตริกซ์ย่อยจะเป็นดังนี้

$$B_{11} = B_{f_r f_r} = \int_0^\infty f_r^2 r dr \tag{2.38ก}$$

$$B_{13} = B_{31}{}^T = B_{f_r g} = B_{g f_r}{}^T = \int_0^\infty f_r \frac{\partial g}{\partial r} r dr \tag{2.38ข}$$

$$B_{22} = B_{f_\theta f_\theta} = \int_0^\infty f_\theta^2 r dr \tag{2.38ค}$$

$$B_{23} = B_{32}{}^T = B_{f_\theta g} = B_{g f_\theta}{}^T = \int_0^\infty f_\theta \cdot \left(\frac{l}{r} g\right) r dr \tag{2.38ง}$$

$$B_{33} = B_{gg} = \int_0^\infty \left(\frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial g}{\partial r}\right) r dr + \int_0^\infty \left(\frac{l}{r} g \cdot \frac{l}{r} g\right) r dr - \int_0^\infty k_0^2 n^2 g^2 r dr \tag{2.38จ}$$

จากชุดสมการที่ (2.34) (2.35) และ (2.37) (2.38) สามารถเขียนสมการค่าเจาะจงตามสมการที่ (2.26ก) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ที่ง่ายได้ดังนี้

$$\beta^2 = \frac{[\bar{\phi}]^T [a] [\bar{\phi}]}{[\bar{\phi}]^T [b] [\bar{\phi}]} \tag{2.39}$$

$[\bar{\phi}] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^T$ = คำตอบที่ไม่ทราบค่า , β = ค่าคงตัวการแพร่กระจาย

จากคุณสมบัติของนิพจน์แปรผัน (variational expression) เงื่อนไขที่จะใช้ในการหาคำตอบของนิพจน์แปรผัน คือการหาคำตอบที่ทำให้นิพจน์แปรผันมีค่าต่ำสุดคือการตั้งเงื่อนไขให้อนุพันธ์ของนิพจน์แปรผันเมื่อเทียบกับตัวแปรแต่ละตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือเรียกว่าจุดที่ทำให้นิพจน์แปรผันมีภาวะคงที่ (stationary condition) ซึ่งเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial\beta}{\partial\overline{\phi}} = 0 \tag{2.40}$$

β = คือค่าคงตัวการแพร่กระจาย ,$\overline{\phi}$ = คำตอบที่ไม่ทราบค่าและต้องการหา โดยอาศัยคุณสมบัติตามสมการที่ (2.40) จะได้ว่า

$$[b][\overline{\phi}]\beta^2 = [a][\overline{\phi}] \tag{2.41}$$

4. เงื่อนไขตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศ (arzimuthal quantization number)

ภายหลังจากการแปลงระบบพิกัดแล้วจะเห็นได้ว่าในชุดสมการที่ (2.26) นั้น สมการที่ต้องการหาคำตอบจะติดค่าตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศ (arzimuthal quantization number) เพื่อให้บรรลุถึงคำตอบที่ต้องการต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศกับฟังก์ชันทดสอบเพื่อแทนค่าลงในสมการระบบ โดยที่ตัวเลขควอนไทซ์มุมทิศในระบบพิกัดทรงกระบอกนั้น หาได้จากความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทั้งสองคือระบบทรงกระบอกไปเป็นพิกัดมุมฉาก (cylindral-to-rectangular) โดยที่เงื่อนไขการควอนไทซ์นั้นสามารถพิจารณาได้จากสมการที่ (2.25)

เมื่อพิจารณาที่จุด $r = 0$ ลักษณะฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบนั้นมีคุณสมบัติที่ไม่ขึ้นกับค่าของมุมทิศ $(l\theta)$ ที่จุด $r = 0$ เพราะฉะนั้นเทอมที่มีองค์ประกอบขึ้นกับค่า $(l\theta)$ ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะได้ข้อสรุปเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชันทดสอบที่จุด $r = 0$ คือ

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r,\theta,z) = {} & \mathbf{i}_x\begin{Bmatrix}\frac{(f_r+f_\theta)}{2}\cos(1+l)\theta+\frac{(f_r-f_\theta)}{2}\cos(1-l)\theta\\ -\frac{(f_r+f_\theta)}{2}\sin(1+l)\theta+\frac{(f_r-f_\theta)}{2}\sin(1-l)\theta\end{Bmatrix}\\ & +\mathbf{i}_y\begin{Bmatrix}\frac{(f_r+f_\theta)}{2}\sin(1+l)\theta+\frac{(f_r-f_\theta)}{2}\sin(1-l)\theta\\ \frac{(f_r+f_\theta)}{2}\cos(1+l)\theta-\frac{(f_r-f_\theta)}{2}\cos(1-l)\theta\end{Bmatrix}\\ & +\mathbf{i}_z\begin{Bmatrix}g\cos(l\theta)\\ -g\sin(l\theta)\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{2.42}$$

เมื่อ $l=0$ แทนค่าลงในชุดสมการที่ (2.42) จะได้ว่า

$$\mathbf{i}_x\begin{Bmatrix}\frac{f_r+f_\theta}{2}\cos\theta+\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos\theta\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\sin\theta-\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin\theta\end{Bmatrix}=f_r\cos\theta+f_\theta\sin\theta \qquad (2.43\text{ก})$$

$$\mathbf{i}_y\begin{Bmatrix}-\frac{f_r+f_\theta}{2}\sin\theta-\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin\theta\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\cos\theta-\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos\theta\end{Bmatrix}=f_r\sin\theta+f_\theta\cos\theta \qquad (2.43\text{ข})$$

$$\mathbf{i}_z\begin{Bmatrix}g\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (2.43\text{ค})$$

เมื่อแทนตัวเลขควอนไทซ์ l=0 สามารถสรุปเงื่อนไขของฟังก์ชันทดสอบ f_r,f_θ,g ได้ว่า $f_r=f_\theta=0$

เมื่อ $l=1$ แทนค่าลงในชุดสมการที่ (2.42) จะได้ว่า

$$\mathbf{i}_x\begin{Bmatrix}\frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(2\theta)+\frac{f_r-f_\theta}{2}\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(2\theta)\end{Bmatrix} \qquad (2.44\text{ก})$$

$$\mathbf{i}_y\begin{Bmatrix}-\frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(2\theta)\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(2\theta)-\frac{f_r-f_\theta}{2}\end{Bmatrix} \qquad (2.44\text{ข})$$

$$\mathbf{i}_z\begin{Bmatrix}g\cos(\theta)\\ g\sin(\theta)\end{Bmatrix} \qquad (2.44\text{ค})$$

เมื่อแทนตัวเลขควอนไทซ์ l=1 สามารถสรุปเงื่อนไขของฟังก์ชันทดสอบ f_r,f_θ,g ได้ว่า $f_r+f_\theta=g=0$

เมื่อ $l\geq 2$ แทนค่าลงในชุดสมการที่ (2.42) จะได้ว่า

$$\mathbf{i}_x\begin{Bmatrix}\frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(3\theta)+\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos(-\theta)\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(3\theta)-\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin(-\theta)\end{Bmatrix}=\mathbf{i}_x\begin{Bmatrix}\frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(3\theta)+\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos\theta\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(3\theta)+\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin\theta\end{Bmatrix}$$

(2.45ก)

$$\mathbf{i}_y\begin{Bmatrix}-\frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(3\theta)-\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin(-\theta)\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(3\theta)-\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos(-\theta)\end{Bmatrix}=\mathbf{i}_y\begin{Bmatrix}-\frac{f_r+f_\theta}{2}\sin(3\theta)+\frac{f_r-f_\theta}{2}\sin\theta\\ \frac{f_r+f_\theta}{2}\cos(3\theta)-\frac{f_r-f_\theta}{2}\cos\theta\end{Bmatrix}$$

(2.45ข)

$$\mathbf{i}_z\begin{Bmatrix}g\cos(2\theta)\\ g\sin(2\theta)\end{Bmatrix} \qquad (2.45\text{ค})$$

เมื่อตัวเลขควอนไทซ์ $l \geq 2$ สามารถสรุปเงื่อนไขของฟังก์ชันทดสอบ f_r, f_θ, g ได้ว่า $f_r = f_\theta = g = 0$ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่จุด r=0 สรุปได้ดังนี้

$$f_r = f_\theta = 0 \quad \text{เมื่อ } l = 0 \tag{2.46ก}$$

$$f_r + f_\theta = g = 0 \quad \text{เมื่อ } l = 1 \tag{2.46ข}$$

$$f_r = f_\theta = g = 0 \quad \text{เมื่อ } l \geq 2 \tag{2.46ค}$$

5. การแปลงสมการค่าเจาะจงให้อยู่ในรูปที่หาคำตอบได้

เนื่องจากในกระบวนการหาค่าเจาะจงนั้นเมตริกซ์ที่อยู่ในแนวทแยงมุม (main diagonal) ต้องไม่เท่ากับศูนย์ จากเมตริกซ์ A จะเห็นได้ว่าเทอม $[A_{33}]$ มีค่าเป็นศูนย์เพราะฉะนั้นต้องทำการดัดแปลงรูปแบบซึ่งเมตริกซ์โดยอาศัยเทคนิคการตัดตัวแปรที่นำเสนอโดย (Jin-Fa Lee , 1991) ซึ่งรายละเอียดของเทคนิคการตัดตัวแปรเป็นดังนี้ จากสมการค่าเจาะจงที่ (2.41)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & [0] \\ A_{21} & A_{22} & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} B_{11} & [0] & B_{13} \\ [0] & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

ทำการแบ่งเทอมดังนี้

$$[A_{tt}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ และ } f_m = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$[B_{tt}] = \begin{bmatrix} B_{11} & [0] \\ [0] & B_{22} \end{bmatrix},\ [B_{tz}] = \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{bmatrix},\ [B_{zt}] = \begin{bmatrix} B_{31} & B_{32} \end{bmatrix},\ [B_{zz}] = [B_{33}]$$

และ $[g_m] = [\phi_3]$

เมื่อแทนค่าการจัดเทอมใหม่ลงในสมการที่ (2.41) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} B_{tt} & B_{tz} \\ B_{zt} & B_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

จะได้ว่า

$$[A_{tt}][f_m] = \beta^2 ([B_{tt}][f_m] + [B_{tz}][g_m]) \tag{2.48}$$

และ

$$[0] = \beta^2 ([B_{zt}][f_m] + [B_{zz}][g_m]) \tag{2.49}$$

ทำการดัดแปลงสมการที่ (2.49) และแทนค่ากลับลงในสมการที่ (2.48)จะได้ว่า

$$\beta^2[B_{zz}][g_m] = -\beta^2[B_{zt}][f_m] \tag{2.50ก}$$

$$[g_m] = -[B_{zz}]^{-1}[B_{zt}][f_m] \tag{2.50ข}$$

$$[A_{tt}][f_m] = \beta^2\left([B_{tt}][f_m] - [B_{tz}][B_{zz}]^{-1}[B_{zt}][f_m]\right) \tag{2.50ค}$$

$$[A_{tt}][f_m] = \beta^2\left([B_{tt}] - [B_{tz}][B_{zz}]^{-1}[B_{zt}]\right)[f_m] \tag{2.50ง}$$

จากชุดสมการที่ (2.50) จะเห็นได้ว่ารูปเมตริกซ์สมการที่ทำการดัดแปลงนี้สามารถหาคำตอบที่เป็นค่าเจาะจงได้แล้ว