บทที่ 3

กำหนดการเชิงเส้นและหลักของการคำนวณออกแบบโครงสร้างเหมาะที่สุด

3.1 ความนำ

กำหนดการเชิงเส้นนี้ เป็นวิธีการที่เกิดขึ้นในงานการดำเนินการวิจัยโดย Dantzig ในปี ค.ศ.1947 ในขณะที่ทำงานในกองทัพอากาศสหรัฐอเมริกา นับตั้งแต่นั้นมาวิธีการนี้ได้ถูกนำมาพัฒนาประยุกต์ใช้กับงานด้านต่างๆมากมาย ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านวิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ การจัดการเป็นต้น โดยที่ได้พัฒนาให้ดีขึ้นเป็นลำดับและในปัจจุบันนี้โปรแกรมเชิงเส้นได้ประยุกต์ใช้กับงานทั่วไปเกือบทุก สาขาวิทยาการ กำหนดการเชิงเส้นนี้เป็นพื้นฐานกำหนดการทางคณิตศาสตร์ โดยที่มีลักษณะพิเศษคือ ข้อจำกัดทั้งหมดและฟังก์ชันวัตถุประสงค์เขียนได้ในลักษณะเชิงเส้นของความสัมพันธ์ของตัวแปร ข้อจำกัดอาจจะเป็นสมการหรือ อสมการก็ได้และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จะหาค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุด

3.2 การใช้ขั้นตอนในการคำนวณออกแบบเหมาะที่สุดของโครงข้อแข็ง

จากการสมมุติความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างน้ำหนักต่อหน่วยความยาวของชิ้นส่วนกับความสามารถในการรับพลาสติกโมเมนต์ของชิ้นส่วนต่างๆนั้น เราสามารถที่จะกำหนดเป็นฟังก์ชันน้ำหนักประสิทธิผล (หรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์)ได้ดังนี้

$$W = \sum_{i=1}^{k} L_i M_{pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3.1)$$

โดยที่ M_{pi} คือ ความสามารถในการรับพลาสติกโมเมนต์ของกลุ่มของชิ้นส่วน I

L_i คือ ความยาวทั้งหมดของชิ้นส่วนทั้งหมดที่มีอยู่ในกลุ่มของชิ้นส่วน I

k คือจำนวนทั้งหมดของกลุ่ม

$$W = \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{Mp}$$ มีค่าน้อยที่สุด. . . .(3.2)

โดยเงื่อนไข $$\underset{\sim}{CM} = \underset{\sim}{Pu}$$ . . . . (3.3)

$$-\underset{\sim}{TMp} \leq \overset{\circ}{M} \leq \underset{\sim}{TMp}$$ . . . . (3.3)

โดยที่ $\underset{\sim}{M}$ = ค่าโมเมนต์ของทุกจุดที่มีโอกาศเกิดจุดหมุนพลาสติก(j)

C = พลังงานภายในที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง(ixj)

$\underset{\sim}{Pu}$= งานภายนอกที่น้ำหนักบรรทุกกระทำ(i)

T = เมตริกซ์แปลงความสัมพันธ์ค่าโมเมนต์ของจุดใดๆ และกลุ่ม(jxm)

$\underset{\sim}{Mp}$= พลาสติกโมเมนต์ของกลุ่ม(m)

นี้เป็นปัญหาของกำหนดการเชิงเส้นที่มี m+j ตัวแปรและ สมการ i ข้อจำกัด และมีอสมการ 2j ข้อจำกัด ปัญหานี้สามารถใช้ขั้นตอนของกำหนดการเชิงเส้นแก้ได้เช่น โดยวิธีซิมเพลกซ์ เพื่อที่จะทำให้สามารถใช้โปรแกรมย่อยของกำหนดการเชิงเส้น จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงตัวแปรโดยที่

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{TMp}$$ . . . . (3.5)

อสมการที่(3.4)สามารถเขียนได้ในรูป

$$\underset{\sim}{0} \leq \underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{TMp} \leq 2\underset{\sim}{TMp}$$ . . . . (3:6)

$$0 \leq \underset{\sim}{X} \leq 2\underset{\sim}{TMp}$$ . . . . (3.7)

เพราะฉนั้นเราจะได้ตัวแปร $\underset{\sim}{X}$ ที่มีค่าเป็นบวกเสมอแทนตัวแปร $\underset{\sim}{M}$ และเราต้องการให้สอดคล้องแต่เพียง j อสมการเท่านั้น

$$\underset{\sim}{X} \leq 2T\underset{\sim}{Mp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.8)$$

สมการที่(3.3)นั้นเป็นสมการสมดุลย์สามารถเขียนได้ในรูป

$$-CT\underset{\sim}{Mp} + C\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Pu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9)$$

โดยสรุปแล้วสามารถที่จะเขียนสมการความสัมพันธ์ทั้งหมดได้ดังนี้คือ

$$W = \underset{\sim}{L}^t\underset{\sim}{Mp} \quad \min \ldots\ldots (3.10)$$

ภายใต้เงื่อนไข $-CT\underset{\sim}{Mp} + C\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Pu}$ (3.11)

$$\underset{\sim}{X} \leq 2T\underset{\sim}{Mp} \quad (3.12)$$

$$\underset{\sim}{X} \geq 0 \quad (3.13)$$

จากสมการข้างต้นนี้สามารถนำไปใช้ได้ในรูปแบบมาตรฐานของกำหนดการเชิงเส้น ดังได้กล่าวมาข้างต้น

3.3 การคำนึงถึงผลของแรงรองของชิ้นส่วน

เนื่องจากการที่ใช้สมการและอสมการข้างต้น ใช้ในการหาขนาดของชิ้นส่วนที่เหมาะที่สุดของโครงสร้างนั้น ในกรณีที่ชิ้นส่วนรับแรงแนวแกนมากจะเป็นผลให้ ขนาดหน้าตัดของชิ้นส่วนลดค่าพลาสติกโมเมนต์ลงจน สามารถทำให้เกิดความวิบัติของโครงสร้างได้ จากข้อสมมุติฐานทางทฤษฎีพลาสติกนั้น ไม่ได้คิดถึงผลของแรงรอง แต่คิดถึงผลของแรงรองไปลดความสามารถการรับพลาสติกโมเมนต์ของหน้าตัด โดยเหตุนี้สามารถพิจารณาจากตัวลด ρ การคำนวนค่าของพลาสติกโมเมนต์นั้นใช้ค่าเป็น $\rho\underset{\sim}{Mp}_i$ โดยที่ ρ เป็นอัตราส่วนในการลดค่าพลาสติกโมเมนต์เต็ม

ที่กำหนดไว้ตามตำแหน่งจุดหมุน j ใดๆ โดยขึ้นกับแรงแนวแกนและชนิดของหน้าตัดที่เลือกเอาไว้ ด้วยเหตุนี้ อสมการที่ (3.4)เขียนได้โดย

$$-[\rho][T]\underset{\sim}{M}p \leq \underset{\sim}{M} \leq [\rho][T]\underset{\sim}{M}p \qquad (3.14)$$

ค่าของ ρ นั้นสามารถที่จะดัดแปลง (MODIFIED)ได้ในกรณีที่ต้องการ หลังจากผ่านขบวนการอย่างเหมาะสุดแล้วและ กำหนดการเชิงเส้นนั้นสามารถที่จะหาค่า ρ ค่าใหม่ได้อีก

3.4 <u>การพิจารณาในกรณีผลของแรงหลายชุดกระทำพร้อมกัน</u>

จากความสัมพันธ์ของสมการเพื่อที่จะหาค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์(ฟังก์ชันน้ำหนักประสิทธิผล) โดยใช้ ข้อจำกัด ในการคำนวณออกแบบทางทฤษฎีพลาสติกโดยวิธีสถิตย์นั้น สามารถจัดสมการได้สะดวกและรวดเร็วดังกล่าวข้างต้น แต่จากมาตรฐานในการคำนวณออกแบบด้วยวิธีพลาสติกนั้น กำหนดให้โครงสร้างที่ออกแบบสามารถรับน้ำหนักกระทำ 2 กรณีด้วยกันได้ จึงต้องจัดสมการข้อจำกัดเพิ่มขึ้น เพื่อให้โครงสร้างที่คำนวณออกแบบสามารถรับแรงกระทำชุดใดชุดหนึ่งได้อย่างปลอดภัย โดยที่กำหนดสมการดังนี้

$$W = \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{M}p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.15)$$

$$-C\rho T\underset{\sim}{M}p + C\underset{\sim}{X}_1 = \underset{\sim}{P}u_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.16)$$

$$-C\rho T\underset{\sim}{M}p + C\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{P}u_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.17)$$

$$\underset{\sim}{X}_1 \leq 2\rho T\underset{\sim}{M}p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.18)$$

$$\underset{\sim}{X}_2 \leq 2\rho T\underset{\sim}{M}p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.19)$$

$$\underset{\sim}{X_1}, \underset{\sim}{X_2} \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.20)$$

$$\underset{\sim}{M_1} = \underset{\sim}{X_1} + \rho T\underset{\sim}{M_p} \quad \ldots\ldots (3.21)$$

$$\underset{\sim}{M_2} = \underset{\sim}{X_2} + \rho T\underset{\sim}{M_p} \quad \ldots\ldots (3.22)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{M_1}$ = ค่าโมเมนต์ของทุกจุดที่มีโอกาศเกิดจุดหมุนพลาสติกของแรงชุด 1 (j)

$\underset{\sim}{M_2}$ = ค่าโมเมนต์ของทุกจุดที่มีโอกาศเกิดจุดหมุนพลาสติกของแรงชุด 2 (j)

C = พลังงานภายในที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง (ixj)

$\underset{\sim}{P_u}$ = งานภายนอกที่น้ำหนักบรรทุกกระทำ (i)

T = เมตริกซ์แปลงความสัมพันธ์ค่าโมเมนต์ของจุดใดๆ และกลุ่ม (jxm)

$\underset{\sim}{M_p}$ = พลาสตกโมเมนต์ของกลุ่ม (m)

ρ = ผลของแรงรอง (secondary effect)

นี้เป็นปัญหาของกำหนดการเชิงเส้นที่มี m+(2xj)ตัวแปรและ สมการ 2xiข้อจำกัดและมีอสมการ 2j ข้อจำกัด ปัญหานี้สามารถใช้ขั้นตอนของกำหนดการเชิงเส้นแก้ได้เช่น โดยวิธีซิมเพลกซ์ เพื่อที่จะหาให้สามารถใช้โปรแกรมย่อยของกำหนดการเชิงเส้น