บทที่ 2

ตัวสถิติทดสอบและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวสถิติที่ใช้ในการตรวจสอบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ที่นำมาเปรียบเทียบในงานวิจัยครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบภายใต้ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นไม่คงที่ตลอดช่วง ซึ่งวิธีการพยากรณ์ค่าในอนาคตที่ใช้ก็คือ วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสองครั้ง (Double Exponential Smoothing)

2.1 ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นไม่คงที่ตลอดช่วงและการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสองครั้ง

จากตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้น

$$z_t = \beta_o + \beta_1 t + \varepsilon_t \quad t = 1,2,... \tag{2.1}$$

โดยทั่วไปจะสมมติว่าพารามิเตอร์ β_o และ β_1 คงที่ตลอดช่วงเวลาที่พิจารณา เพราะฉะนั้นการประมาณค่า β_o และ β_1 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด แบบสามัญ (Ordinary least squares) จะเป็นการประมาณค่าที่ให้ความสำคัญหรือน้ำหนักกับค่าสังเกตทุกค่าเท่ากัน

เป็นไปได้ที่ตัวแบบ (2.1) จะคงที่เฉพาะช่วง หรือนั่นคือ ค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไปได้ ในกรณีเช่นนี้เราควรให้น้ำหนักกับค่าสังเกตปัจจุบันมากกว่าค่าสังเกตในอดีต

วิธีการหนึ่งของการให้น้ำหนัก คือจากน้ำหนักทั้งหมด กระจายให้กับค่าสังเกตในลักษณะลดลงแบบเรขาคณิต หรือแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล โดยเริ่มจากค่าสังเกตปัจจุบันมีน้ำหนักมากที่สุด และน้ำหนักลดลงเรื่อย ๆ แบบเรขาคณิตสำหรับค่าสังเกตในอดีต ฉะนั้นค่าพยากรณ์สำหรับค่าสังเกตในอนาคต ที่เวลา $n + k$ ($k = 1,2,...$) จากเวลาปัจจุบัน n คำนวณได้ดังนี้

$$\hat{z}_n(k) = \hat{\beta}_{o,n} + \hat{\beta}_{1,n} k \tag{2.2}$$

ซึ่ง $\hat{\beta}_{o,n}$ และ $\hat{\beta}_{1,n}$ คือตัวประมาณของพารามิเตอร์ β_o และ β_1 โดยใช้วิธีการประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดแบบให้น้ำหนัก (Weighted Least Squares)[1]

$$\hat{\beta}_{o,n} = \alpha\,(2-\alpha) \sum_{t=1}^{n} (1-\alpha)^t Z_{n-t} - \alpha^2 \sum_{t=1}^{n} t\,(1-\alpha)^t Z_{n-t} \qquad (2.3)$$

$$\hat{\beta}_{1,n} = \alpha^2 \sum_{t=1}^{n} (1-\alpha)^t Z_{n-t} - \frac{\alpha^3}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{n} t(1-\alpha)^t Z_{n-t} \qquad (2.4)$$

โดยที่ $0 < \alpha < 1$ เป็นค่าคงที่ปรับให้เรียบ

สามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{\beta}_{o,n}$, $\hat{\beta}_{1,n}$ กับตัวสถิติปรับให้เรียบ (Smoothed statistic)[2] $S_o^{(1)}$ และ $S_o^{(2)}$ ได้ว่า

$$\hat{\beta}_{o,n} = 2\, S_n^{(1)} - S_n^{(2)} \qquad (2.5)$$

$$\hat{\beta}_{1,n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_n^{(1)} - S_n^{(2)}\right] \qquad (2.6)$$

ซึ่ง $S_n^{(1)}$ คือตัวสถิติปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลครั้งเดียว (single exponential smoothed statistic) มีสูตรการคำนวณดังนี้

$$S_n^{(1)} = \alpha Z_n + (1-\alpha)\, S_{n-1}^{(1)} \qquad (2.7)$$

และ$S_n^{(2)}$ คือตัวสถิติปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลซ้ำสองครั้ง (double exponential smoothed statistic) โดยใช้ผลลัพธ์จาก (2.7) มีสูตรการคำนวณดังนี้

---

[1] Abraham and Ledolter, Statistical Methods for Forecasting (New York:John Wiley & Sons, 1983), p. 101.

[2] Ibid., pp. 104-106.

$$S_n^{(2)} = \alpha S_n^{(1)} + (1-\alpha) S_{n-1}^{(2)} \qquad (2.8)$$

จากสมการ (2.2) , (2.5) และ 2.6) ค่าพยากรณ์สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{Z}_n(k) = \hat{\beta}_{o,n} + \hat{\beta}_{1,n} k$$

$$= 2 S_n^{(1)} - S_n^{(2)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_n^{(1)} - S_n^{(2)}) k$$

$$= (2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} k) S_n^{(1)} - (1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} k) S_n^{(2)} \qquad (2.9)$$

การหาค่าพยากรณ์ด้วยวิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสองครั้งสามารถหาได้จากสมการ (2.9) ซึ่งจากสมการนี้ไม่จำเป็นต้องหาค่าประมาณ $\hat{\beta}_{o,n}$ และ $\hat{\beta}_{1,n}$ โดยตรง อย่างไรก็ตามการที่จะคำนวณค่าพยากรณ์ได้นั้นจำเป็นต้องทราบค่าคงที่ปรับให้เรียบ (α) และค่าปัจจุบันของตัวสถิติปรับให้เรียบ $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ ซึ่งการคำนวณค่า $S_n^{(1)}$ และ $S_n^{(2)}$ คำนวณได้โดยใช้สมการย้อนกลับ (2.7) และ (2.8) โดยเริ่มจากค่าสังเกตแรก Z_1 และค่าเริ่มต้น $S_o^{(1)}$, $S_o^{(2)}$ จากนั้นด้วยสมการ (2.7) และ(2.8) จะคำนวณค่า $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, ... จนกระทั่งถึงค่าปัจจุบัน $S_n^{(1)}$ และ $S_n^{(2)}$

การคำนวณค่าเริ่มต้น $S_o^{(1)}$ และ $S_o^{(2)}$ จะใช้สมการ (2.5) และ (2.6) คำนวณค่าของ $S_n^{(1)}$ และ $S_n^{(2)}$ สำหรับ $n = 0$ ได้ดังนี้

$$S_o^{(1)} = \hat{\beta}_{o,o} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_{1,0} \qquad (2.10)$$

$$S_o^{(2)} = \hat{\beta}_{o,o} - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_{1,0} \qquad (2.11)$$

ค่าประมาณ $\hat{\beta}_{o,o}$ และ $\hat{\beta}_{1,o}$ โดยปกติจะหาจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ β_o และ β_1 ของตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นคงที่ $Z_t = \beta_o + \beta_1 t + \varepsilon_t$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบสามัญ ซึ่งจะได้ค่าประมาณของ β_1, β_o ตามลำดับดังนี้

$$\hat{\beta}_{1,o} = \frac{12 \sum_{t=1}^{n} (t - \frac{n+1}{2}) Z_t}{n^3 - n} \qquad (2.12)$$

$$\hat{\beta}_{o,o} = \bar{Z} - \hat{\beta}_{1,o} (\frac{n+1}{2}) \qquad (2.13)$$

2.2 การตรวจสอบแบบแทร็คกิ้งซิกแนล

ตามข้อตกลงเบื้องต้นข้อหนึ่งของการสร้างตัวแบบพยากรณ์ คือค่าคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ถ้าค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์เบี่ยงเบนออกจากศูนย์แสดงว่า ตัวแบบพยากรณ์ได้เปลี่ยนแปลงไปแล้ว การตรวจสอบตัวแบบพยากรณ์ในลักษณะดังกล่าวนี้ จะพิจารณาจากสัญญาณ 2 ลักษณะที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบพยากรณ์ลักษณะแรกคือพิจารณาจากผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อน ในการพยากรณ์ ซึ่งสามารถคำนวณและตรวจสอบได้หลายวิธี ลักษณะที่สองคือพิจารณาสหสัมพันธ์ในตัวเองอันดับที่หนึ่ง ของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

การตรวจสอบว่าตัวแบบพยากรณ์ ได้เปลี่ยนแปลงไปแล้วหรือไม่นั้นเรียกว่า การตรวจสอบแบบแทร็คกิ้งซิกแนล (Tracking Signal) ซึ่งแทร็คกิ้งซิกแนลเป็นตัวสถิติที่ได้จากการหารค่าประมาณของค่าคาดหวังของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ด้วยค่าความแปรปรวนของค่าประมาณนั้น แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตหรือขอบเขตควบคุม (Control limits) ของการตรวจสอบ ถ้าตัวแบบพยากรณ์ได้เปลี่ยนแปลงไป ค่าสถิติแทร็คกิ้งซิกแนลจะมีค่าตกออกนอกขอบเขตควบคุม

ในการประมาณค่า E(e) (ค่าคาดหวังของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา) เราอาจใช้ค่าเฉลี่ย

$$\overline{CE}(T) = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_{t-1}(1)}{T} \tag{2.14}$$

ซึ่ง $$e_{t-1}(1) = Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)$$

หรืออาจใช้ผลบวกสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ (Cumulative sum of the forecast errors)

$$CE(T) = \sum_{t=1}^{T} e_{t-1}(1)$$

$$= CE(T-1) + e_{T-1}(1) \tag{2.15}$$

ในทางปฏิบัติมักจะนิยมใช้ค่าผลบวกสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์มากกว่า เพราะมีความสะดวกในการปรับค่า เมื่อมีค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ใหม่เพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ยังสามารถใช้หลักการของการการปรับให้เรียบแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสร้างตัวสถิติ ปรับให้เรียบ เป็นค่าประมาณของ $E(e)$ ได้ดังนี้

$$SE(T) = \gamma \sum_{t=0}^{T-1} (1-\gamma)^t e_{T-1-t}(1)$$

$$= \gamma e_{T-1}(1) + (1-\gamma) SE(T-1) \tag{2.16}$$

ซึ่ง $0 < \gamma < 1$ เป็นค่าคงที่ปรับให้เรียบ (Smoothing constant) ของตัวสถิติทดสอบ

ในการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวสถิติ $CE(T)$ และ $SE(T)$ จะขึ้นอยู่กับค่าความแปรปรวนของ ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ σ_e^2 ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ซึ่ง σ_e^2 สามารถประมาณค่าได้ด้วยความแปรปรวนตัวอย่างของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จำนวน T ค่า :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (e_{t-1}(1))^2$$

หรือประมาณด้วยค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์ (Mean absolute deviation) ของค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ อย่างไรก็ตามเมื่อมีค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ใหม่เพิ่มขึ้น การปรับค่าประมาณ $\hat{\sigma}_e^2$ ย่อมไม่สะดวกนัก เมื่อเทียบกับการหาค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์ ดังนั้นในทางปฏิบัติเราจะประมาณค่า σ_e^2 ในเทอมของค่าเบี่ยนเบนสัมบูรณ์ Δ ดังนี้

สมมติค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ e มีการแจกแจง $N(\mu , \sigma_e^2)$ ดังนั้น

$$\Delta = E(|e - E(e)|)$$

$$= 2 \int_{\mu}^{\infty} (e - \mu)(2\pi \sigma_e^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{e-\mu}{\sigma_e}\right)^2} de$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{e-\mu}{\sigma_e}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{e-\mu}{\sigma_e}\right)^2} de$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_e \int_{\mu}^{\infty} de^{-\frac{1}{2}\left(\frac{e-\mu}{\sigma_e}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_e \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{e-\mu}{\sigma_e}\right)^2} \right]_{\mu}^{\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_e \qquad (2.17)$$

ดังนั้น ณ คาบเวลา T

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\Delta}$$

ภายใต้ข้อสมมติ $E(e) = 0$ สามารถประมาณค่าของ Δ ได้ด้วย

$$\hat{\Delta}(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} | e_{t-1}(1) | \qquad (2.18)$$

หรือ $$\hat{\Delta}(T) = \gamma |e_{T-1}(1)| + (1 - \gamma) \hat{\Delta}(T - 1) \qquad (2.19)$$

ซึ่ง $0 < \gamma < 1$ เป็นค่าคงที่ปรับให้เรียบของตัวสถิติทดสอบ

ในการวิจัยนี้จะประมาณค่าของ Δ ด้วย $MAD_t = \hat{\Delta}(t)$ ตามสมการ (2.19) เนื่องจากมีประสิทธิภาพมากกว่าสมการ (2.18) จากสมการ (2.19) ได้ว่า

$$MAD_t = \gamma |e_{t-1}(1)| + (1 - \gamma) MAD_{t-1} \qquad (2.20)$$

ตามสมการ (2.20) จำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้น MAD_o ซึ่งมีวิธีการดังนี้

$$\sigma_e^2 = C_1 \sigma_\varepsilon^2 \qquad (2.21)$$ [3]

ซึ่ง σ_ε^2 คือความแปรปรวนของค่าผิดพลาดสุ่ม ε_t ในตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้น $Z_t = \beta_o + \beta_1 t + \varepsilon_t$

เนื่องจาก $MAD_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_e$ (จากสมการ (2.17)) เพราะฉะนั้นกำหนดค่าเริ่มต้นของค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์ได้เท่ากับ

$$MAD_o = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi}} \hat{\sigma}_\varepsilon \qquad (2.22)$$

---

[3] Montgomery and Johnson, Forecasting and time series analysis (New York: McGraw-Hill Book Company, 1976), p. 159.

ซึ่ง $$C_1 = 1 + \frac{\gamma}{(1+\beta)^3}\left[(1+4\beta+5\beta^2) + 2\gamma\ (1+3\beta) + 2\gamma^2\right]$$ [4]

$$\beta = 1 - \gamma$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \hat{Z}_t)^2}{T-2} \qquad \text{ซึ่ง} \qquad \hat{Z}_t = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 t$$

2.3 การตรวจสอบที่ใช้ในการศึกษา

การตรวจสอบต่าง ๆ ที่ใช้ตรวจสอบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ที่นำมาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในงานวิจัยครั้งนี้มีจำนวน 4 วิธี ดังนี้

2.3.1 การตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย (Simple Cumulative Sum)

วิธีการตรวจสอบนี้พัฒนาขึ้นโดย Robert G. Brown (1959) ซึ่งจะเปรียบเทียบผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ กับค่าเฉลี่ยแบบปรับให้เรียบของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Smoothed Mean Absolute Deviation) ตัวสถิติที่ใช้แทนด้วย C_t มีวิธีการคำนวณดังนี้

$$e_{t-1}(1) = Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1)$$

$$SUM_t = e_{t-1}(1) + SUM_{t-1}$$

$$MAD_t = \gamma|e_{t-1}(1)| + (1-\gamma)\ MAD_{t-1}$$

$$C_t = |SUM_t/MAD_t|$$

---

[4] Ibid, p.163.

ซึ่ง SUM_t คือ ผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

MAD_t คือ ค่าเฉลี่ยแบบปรับให้เรียบของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

γ คือ ค่าคงที่ที่ใช้ในการปรับให้เรียบมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

C_t คือ ตัวสถิติแบบผลรวมสะสมอย่างง่ายที่ใช้ตรวจสอบ ณ คาบเวลา t

การกำหนดค่าเริ่มต้น

ในการคำนวณตัวสถิติ C_t ข้างต้น จะเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้น[5] ของ $e_t(1)$, SUM_t และ MAD_t ซึ่งจะกำหนดดังนี้

$$e_o(1) = 0$$

$$SUM_o = 0$$

$$MAD_o = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi}} \hat{\sigma}_\varepsilon$$

การเลือกขอบเขตควบคุม

การทดสอบตัวสถิติในงานวิจัยนี้จะต้องใช้ขอบเขตควบคุมเป็นตัวเปรียบเทียบเพื่อพิจารณาว่าตัวสถิตินั้นตกออกนอกขอบเขตควบคุมหรือไม่ การเลือกขอบเขตควบคุมจะพิจารณาตัวแบบพยากรณ์ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ขอบเขตควบคุมที่จะนำไปใช้ จะกำหนดเป็นขอบเขตควบคุมที่ให้จำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการตรวจสอบโดยเฉลี่ย (Average Run length (ARL)) อยู่ในช่วง 99 ถึง 101 ซึ่งการกำหนดค่า ARL ให้อยู่ในช่วงดังกล่าวเท่ากับได้กำหนดความผิดพลาด (ประเภทที่ 1 (Type I error)) ประมาณ 1% จากค่า ARL = 100

---

[5]Ibid, pp. 167-168.

รายละเอียดของวิธีการหาขอบเขตควบคุมกล่าวไว้ในหัวข้อ (3.2.3) ของบทที่ 3

เกณฑ์การตัดสินใจ

ถ้าตัวสถิติ C_t มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุมแสดงว่าค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์มีค่าเบี่ยงเบนออกจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ควรปรับปรุงตัวแบบพยากรณ์

2.3.2 <u>การตรวจสอบแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบ</u> (Smoothed Error)

การตรวจสอบแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ทริกแทร็คกิงซิกแนล (Trigg's Tracking Signal) ซึ่งพัฒนาขึ้นโดย Trigg(1964) วิธีการตรวจสอบนี้จะพยายามปรับปรุงวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่ายที่ได้ให้น้ำหนักแก่ค่าคลาดเคลื่อนที่นำมารวมสะสมทุกเวลาเท่ากันหมดในหัวข้อ 2.3.1 ตัวสถิติที่ให้แทนด้วย T_t มีวิธีการคำนวณดังนี้

$$E_t = \gamma\, e_{t-1}(1) + (1-\gamma)\, E_{t-1}$$

$$MAD_t = \gamma\, |e_{t-1}(1)| + (1-\gamma)\, MAD_{t-1}$$

$$T_t = |E_t/MAD_t|$$

ซึ่ง E_t คือ ผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์แบบปรับให้เรียบ

MAD_t คือ ค่าเฉลี่ยแบบปรับให้เรียบของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์

γ คือ ค่าคงที่ที่ใช้ในการปรับให้เรียบมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

T_t คือ ตัวสถิติแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบที่ใช้ตรวจสอบ ณ คาบเวลา t

การกำหนดค่าเริ่มต้น

ในการคำนวณตัวสถิติ T_t ข้างต้นจำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้น[6] ของ $e_t(1)$, E_t , MAD_t ซึ่งกำหนดดังนี้

$$e_o(1) = 0$$

$$E_o = 0$$

$$MAD_o = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi}} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon$$

การเลือกขอบเขตควบคุม

การเลือกขอบเขตควบคุม กระทำเช่นเดียวกับการเลือกขอบเขตควบคุมของวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย (ในหัวข้อ 2.3.1)

เกณฑ์การตัดสินใจ

ถ้าตัวสถิติ T_t ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุมแสดงว่าค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์มีค่าเบี่ยงเบนออกจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ควรจะปรับปรุงตัวแบบพยากรณ์

2.3.3 <u>วิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลัง</u> (Backward Cumulative Sum)

วิธีการตรวจสอบนี้พัฒนาขึ้นมาโดย HARRISON และ DAVIES (1963) ซึ่ง HARRISON และ DAVIES มีความคิดว่าเมื่อตัวแบบพยากรณ์ได้เปลี่ยนแปลงไปแล้ว การใช้ผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ในช่วงเวลาที่ผ่านมาไม่มากนัก จะบอกผลการเปลี่ยนแปลงได้เร็วกว่า การใช้ผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงปัจจุบัน เช่น ถ้าระบบเกิดการเปลี่ยนแปลงในคาบเวลาที่ 50 และขณะนี้เป็นคาบเวลาที่ 55 ผลรวมสะสม

---

[6] Ibid, pp. 167-168.

ของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ จากคาบเวลาที่ 50 ถึง 55 จะแสดงให้เห็นผลการเปลี่ยนแปลงได้เร็วกว่าการใช้ผลรวมสะสมของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จากคาบเวลาที่ 1 ถึง 55 ในทางปฏิบัติจะไม่สามารถรู้ได้ว่า ณ คาบเวลาใดที่ตัวแบบพยากรณ์ได้เปลี่ยนไปแล้ว แต่ HARRISON และ DAVIES ได้แนะนำไว้ว่าจะใช้ผลรวมสะสมย้อนหลังในช่วงเวลา 6 ถึง 12 คาบเวลา เพราะว่าช่วงเวลานี้สามารถแสดงให้เห็นถึงความเปลี่ยนแปลงได้ชัดเจนมากที่สุดในกรณีที่ตัวแบบพยากรณ์ได้เปลี่ยนแปลงไปแล้ว

ตัวอย่างการคำนวณสำหรับการใช้ผลรวมสะสมย้อนหลัง 6 คาบเวลา แสดงในตารางที่ 2.1 มีขอบเขตควบคุม $\pm L_i$ ซึ่ง

$$L_i = \sigma_e w(i + h)$$

โดยที่

σ_e คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

w และ h คือ ค่าคงที่ที่เลือกมาจากการทดลอง ซึ่งเป็นค่าที่ทำให้ ARL อยู่ในช่วง 99 ถึง 101 เมื่อตัวแบบพยากรณ์ยังไม่เปลี่ยนแปลง ในกรณีตัวอย่างนี้ กำหนดให้ $\sigma_e = 10$, $w = 1$ และ $h = 2$

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างวิธีการคำนวณวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลัง :

$L_i = \sigma_e w(i + h) = 10(i+ 2)$

คาบเวลา	ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	-10	-10					
2	20	20	10				
3	15	15	35	25			
4	5	5	20	40	30		
5	-25	-25	-20	-5	15	5	
6	-25	-25	-50*	-45	-30	-10	-20
ขอบเขตควบคุม L_1 ถึง L_6		±30	±40	±50	±60	±70	±80

ค่าผลรวมสะสม S_i ที่คำนวณในตารางที่ 2.1 มีสูตรดังนี้

$$S_1 = e_t = Z_t - \hat{Z}_t$$

$$S_2 = e_t + e_{t-1}$$

$$\vdots$$

$$S_6 = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + e_{t-3} + e_{t-4} + e_{t-5}$$

ในตัวอย่างนี้ S_2 ในคาบเวลาที่ 6 มีค่าออกนอกขอบเขตควบคุม แสดงว่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์มีค่าเบี่ยงเบนออกจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ

ในทางปฏิบัติ ถ้านำวิธีการนี้ไปใช้จะมีความยุ่งยากในการคำนวณค่าตัวสถิติและขอบเขตควบคุมดังนั้น HARRISON และ DAVIES ได้พัฒนาวิธีการคำนวณนี้ให้ง่ายและสะดวกขึ้น ตัวสถิติที่ใช้แทนด้วย D_t^+ และ D_t^- มีวิธีการคำนวณดังนี้

$$D_t^+ = \text{MIN}\,|D_{t-1}^+ , L_o| + \hat{\sigma}_e w - e_t$$

$$D_t^- = \text{MAX}\,|D_{t-1}^- , -L_o| - \hat{\sigma}_e w - e_t$$

ซึ่ง

$\hat{\sigma}_e$ คือ ค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

w,h คือ ขอบเขตควบคุมที่ได้จากการทดลอง

L_o คือ ค่าขอบเขตควบคุมเริ่มต้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\hat{\sigma}_e wh$

การกำหนดค่าเริ่มต้น[7]

กำหนดค่าเริ่มต้นของ D_t^+ และ D_t^- ตามลำดับดังนี้

$$D_o^+ = L_o$$

$$D_o^- = -L_o$$

การเลือกขอบเขตควบคุม

ขอบเขตควบคุมสำหรับวิธีการตรวจสอบนี้ขึ้นอยู่กับค่า w และ h โดยใช้ค่า w และ h ที่ให้ ARL อยู่ในช่วง 99 ถึง 101 ในขณะที่ตัวแบบพยากรณ์ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

---

[7]EVERETTE S. GARDNER JR., Automatic Monitoring of Forecast Errors, (Journal of Forecasting, Vol. 2, 1983), p. 8

เกณฑ์การตัดสินใจ

ถ้า $D_t^+ < 0$ หรือ $D_t^- > 0$ แสดงว่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เบี่ยงเบนออกจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2.3.4 <u>วิธีการตรวจสอบแบบสหสัมพันธ์ในตัวเอง</u> (Autocorrelation)

วิธีการตรวจสอบนี้พัฒนาขึ้นมาโดย EVERETTE S. GARDNER JR. (1993) โดยจะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของผลคูณของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ ณ เวลา t และเวลา t-1 กับค่าเฉลี่ยของ ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Mean Square error) ซึ่งถ้าระบบพยากรณ์เปลี่ยนแปลงไปแล้ว เครื่องหมายของค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จะเริ่มมีเครื่องหมายเดียวกัน ซึ่งจะมีผลทำให้เกิดสหสัมพันธ์ในตัวเองทางด้านบวก ตัวสถิติที่ใช้แทนด้วย R_t มีวิธีการคำนวณดังนี้

$$COV_t = e_{t-1}(1)\, e_t(1) + (1-\gamma)\, COV_{t-1}$$

$$MSE_t = e_{t-1}^2(1) + (1-\gamma)\, MSE_{t-1}$$

$$R_t = COV_t / MSE_t$$

ซึ่ง

COV_t คือ ผลรวมสะสมแบบปรับให้เรียบของผลคูณของค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ ณ เวลา t กับเวลา t-1

MSE_t คือ ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง

γ คือ ค่าคงที่ที่ใช้ในการปรับให้เรียบมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

R_t คือ ตัวสถิติสหสัมพันธ์ในตัวเองที่ใช้ตรวจสอบ ณ คาบเวลา 1

การกำหนดค่าเริ่มต้น[8]

กำหนดค่าเริ่มต้นของ e_t , COV_t และ MSE_t ตามลำดับดังนี้

$$e_o = 0$$

$$COV_o = 0$$

$$MSE_o = \sqrt{C_1}\,\hat{\sigma}_\varepsilon$$

การเลือกขอบเขตควบคุม

การเลือกขอบเขตควบคุมกระทำเช่นเดียวกับการเลือกขอบเขตควบคุม ของวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย (ในหัวข้อ 2.3.1)

เกณฑ์การตัดสินใจ

ถ้าตัวสถิติ R_t ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุมแสดงว่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์มีค่าเบี่ยงเบนออกจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ควรจะปรับปรุงตัวแบบพยากรณ์

---

[8] Ibid, p. 17

2.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากผลงานวิจัยที่ผ่านมามีนักสถิติหลายท่านได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการตรวจสอบแบบต่าง ๆ ภายใต้ตัวแบบค่าเฉลี่ยไม่คงที่ตลอดช่วง ซึ่งมีผลสรุปดังนี้

พ.ศ. 2519 E.R. GOLDER และ J.G. SETTLE ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีทริกแทร็คกิงซิกแนล (Trigg's Tracking Signal) กับวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลัง (Backward CUSUM) ผลปรากฏว่า วิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลังตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้รวดเร็วกว่าวิธีการตรวจสอบของทริกทุกระดับค่าเฉลี่ยของตัวแบบที่เปลี่ยนแปลงไป อย่างไรก็ตาม E.R. GODLDER และ J.G. SETTLE ใช้ความแปรปรวนในวิธีการตรวจสอบทั้งสองวิธีแตกต่างกัน โดยใช้ค่าความแปรปรวนในวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลังคงที่ (Fixed Variance) แต่ใช้การปรับความแปรปรวนให้เรียบ(Smoothed Variance) ในวิธีการตรวจสอบของทริก ซึ่งการเปรียบเทียบนี้อาจให้ผลสรุปที่คลาดเคลื่อนได้

พ.ศ. 2526 E.S. GARDNER Jr. ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการตรวจสอบ 4 วิธี คือ วิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย วิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลัง วิธีการตรวจสอบแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบ และวิธีการตรวจสอบแบบสหสัมพันธ์ในตัวเอง ผลปรากฏว่าวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมย้อนหลังจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้รวดเร็วที่สุด ภายใต้อนุกรมเวลาที่มีความแปรปรวนคงที่ ส่วนวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย และวิธีการตรวจสอบของทริก จะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้ใกล้เคียงกันเมื่อใช้พารามิเตอร์ที่ใช้ในการปรับให้เรียบเท่ากับ 0.1 ($\alpha = 0.1$) ถ้าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการปรับให้เรียบมีค่าสูงขึ้น ($\alpha = 0.2, 0.3$) วิธีการตรวจสอบของทริกจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้ช้าลง ต่างกับวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่าย ซึ่งจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้เร็วใกล้เคียงกับการใช้พารามิเตอร์ที่ใช้ในการปรับให้เรียบเท่ากับ 0.1 ส่วนวิธีการตรวจสอบแบบสหสัมพันธ์ในตัวเองจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้เร็วเมื่อระดับค่าเฉลี่ยที่เปลี่ยนแปลงไปมีค่ามาก

พ.ศ. 2528 E.D. GARDNER Jr. ได้ศึกษาวิธีการตรวจสอบแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบ (Smoother error) กับวิธีการตรวจสอบแบบผลรวมรวมสะสมอย่างง่าย (The Simple Cumulative Sum) โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ที่ใช้ในการตรวจสอบมีค่าน้อยกว่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในตัวแบบพยากรณ์ ผลปรากฏว่าถ้าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการพยากรณ์มีค่าเพิ่มขึ้น วิธีการตรวจสอบทั้งสองวิธีจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ได้ช้าลงเมื่อระดับค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อยและทุกค่าของพารามิเตอร์ที่ใช้ในเทร็คกิง-ซิกแนล วิธีการตรวจสอบแบบผลรวมสะสมอย่างง่ายจะตรวจพบความเอนเอียงของความคลาด-เคลื่อนในการพยากรณ์ได้เร็วกว่า วิธีการตรวจสอบแบบปรับความคลาดเคลื่อนให้เรียบ เมื่อระดับค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย