



บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

วิธีการเปรียบเทียบภายใต้การควบคุมของต้นัน

ผู้ริเริ่มขบวนการนี้เป็นคนแรก ไม่ทราบแน่ชัด แต่ในปี 1961 โอลิฟดันตันน์ (Olive Jean Dunn) ได้ทำการทดสอบคุณสมบัติของกระบวนการนี้ และได้จัดเตรียมตารางขึ้น เฉพาะเพื่อใช้สำหรับการคำนวณ ซึ่งต่อมากกระบวนการนี้เป็นที่รู้จักในฐานะเป็นวิธีการเปรียบเทียบภายใต้การควบคุมของต้นัน

วิธีการของต้นัน เน้นที่ปัญหาของความเชื่อมั่นที่เกิดจากการที่ผู้ทดลองต้องการที่จะประมาณช่วงความเชื่อมั่นค่าเฉลี่ยของการเปรียบเทียบ โดยการใส่การแจกแจง ที่ซึ่งให้ช่วงที่สั้นกว่าต้นันได้เปรียบเทียบวิธีการนี้กับวิธีเอสของเชฟเพย์ และพบว่าค่า t' ของวิธีเปรียบเทียบของต้นันจะใช้ได้เหมาะสมในกรณี

1. ค่าระดับการทดสอบ หรือจำนวนกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น (k)
2. ค่าดัชนีของความเป็นอิสระ (v) เพิ่มขึ้น
3. $1 - \alpha$ มีค่าเพิ่มขึ้น

วิธีของต้นันจะใช้ได้ดีเมื่อเป็นการวางแผนทดสอบสมมติฐานล่วงหน้าและทราบจำนวนสมมติฐานที่จะทดสอบแน่นอน ในขณะที่วิธีเอสของเชฟเพย์เหมาะสมที่จะใช้ภายหลังการทดสอบข้อมูลด้วยการทดสอบเอฟแล้ว ช่วงของความเชื่อมั่นด้วยวิธีของต้นันคือ

$$\hat{\psi} \pm t' \alpha \sqrt{MS_e \sum \frac{a_j^2}{n_j}}$$

เมื่อ
$$\hat{\psi} = \sum_{j=1}^J a_j \bar{x}_j$$

และค่า t' มาจาก
$$\int_{-\alpha}^{t'} f(t;v) dt = 1 - \frac{\alpha}{2n}$$

$f(t;v)$ คือ density function ของการแจกแจงแบบสตีเวนส์ ที่ด้วยตักริของความเป็นอิสระ
 v ตารางของ t' สำหรับ $\alpha = .05$ และ $.01$ ที่ค้นคิดขึ้น พิมพ์ใน "Multiple Comparisons
 Among Means" Journal of American Statistical Association 56 (1961) p. 55

ในปี 1966 Miller ได้ใช้สถิติบอนเฟอโรนิตี (Bonferroni t Statistics)
 ภายใต้กระบวนการเดียวกัน ทั้งกระบวนการเปรียบเทียบพหุคูณของต้นน์และบอนเฟอโรนิตีนั้นให้
 เป็นประโยชน์สำหรับการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยภายใต้การเปรียบเทียบที่ได้วางแผนไว้ก่อนซึ่ง
 ไม่จำเป็นจะต้องเป็นอิสระต่อกัน และกระบวนการเหล่านี้ขึ้นอยู่กับวิธีการแจกแจงสตีเวนส์ ที่ที่สามารถ
 แบ่งแยกระดับนัยสำคัญไปตามชื่อของการเปรียบเทียบที่ได้วางแผนไว้ และ ไม่จำเป็นจะต้องทดสอบ ความ
 มีนัยสำคัญของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบเอฟก่อน

การคำนวณเพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบรายคู่

คำนวณหาความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ (pairwise) แล้วเรียงตามลำดับ
 จากค่าน้อยไปหามาก จำนวนของการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ C ซึ่ง
 เท่ากับ $k(k-1)/2$ คู่ เมื่อ k หมายถึง จำนวนค่าเฉลี่ยของ ทริทเมนต์แล้วคำนวณค่าสถิติวิกฤตจาก
 สูตร

$$d = t'_{D\alpha/z; C, v} \sqrt{MS_e \sum \frac{a_j^2}{n_j}}$$

เมื่อ $t'_{D\alpha/z; C, v}$	ค่าวิกฤตจากตารางที่ต้นน์ได้คำนวณไว้ สัมพันธ์ของความเป็นอิสระสำหรับค่าเฉลี่ยที่ i
MS_e	ค่าประมาณไม่ลำเอียงของความแปรปรวนความคลาดเคลื่อนของ ประชากร
n_j	จำนวนกลุ่มตัวอย่างในแต่ละทริทเมนต์

จากนั้นก็เปรียบเทียบค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ย แต่ละคู่ทั้งหมดกับค่าสถิติวิกฤตที่คำนวณ
 ด้วยวิธีของต้นน์ (d) ค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจะมีนัยสำคัญก็ต่อเมื่อค่าความแตกต่าง ของค่าเฉลี่ย
 นั้นจะต้องมากกว่าค่าสถิติวิกฤต d ที่คำนวณได้

วิธีทดสอบของทุกี

เป็นขบวนการเปรียบเทียบพหุคูณสำหรับการเปรียบเทียบหรือการวิเคราะห์ภายหลังที่คล้ายกับการทดสอบ LSD ของฟิชเชอร์ ซึ่งคิดขึ้นโดย J.W. Tukey ในปี 1953 โดยใช้การแจกแจงของสถิติเดนิทโทเชเรนส์ และเรียกว่า HSD (Honesty Significant Difference Test หรือ w procedure โดยตั้งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระดับ α จุดประสงค์ของวิธีทดสอบของทุกี คือ การเปรียบเทียบความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ทั้งหมด ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นปกติและความเท่ากันของความแปรปรวนเช่นเดียวกับข้อตกลงของการทดสอบด้วยอัตราส่วนเอฟ นอกจากนี้ ให้นิยามของกลุ่มตัวอย่างต้องเท่ากันหรือควรจะทำกันโดยประมาณ

วิธีทดสอบของทุกีสามารถให้ช่วงของความเชื่อมั่นของความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ทั้งหมด $k(k-1)/2$ คู่ ถ้า $\{\theta_i\}$ หมายถึง เซตของค่าเฉลี่ย $\{\theta\}$ หมายถึง ค่าประมาณไม่ลำเอียงของ $\{\theta_i\}$ $\{J_i\}$ หมายถึงขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ต้องเท่ากันทุกกลุ่ม และ S_e หมายถึงค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนประชากร ข้อตกลงเบื้องต้นของค่าสถิติ $\{\hat{\theta}_i\}$ และ S_e คือ

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{l} \{\hat{\theta}_i\} \text{ มีความเป็นอิสระเชิงสถิติ และ } \hat{\theta}_i \sim N(\theta_i, a^2 \sigma^2), \\ i = 1, \dots, k \\ a \text{ เป็นค่าคงที่บวก } S_e \text{ เป็นค่าประมาณกำลังสองอิสระของ } \sigma^2 \\ \text{ด้วยดีกรีความเป็นอิสระ } v \end{array} \right.$$

ดังนั้นวิธีทดสอบของทุกี จะให้ช่วงความเชื่อมั่นดังต่อไปนี้

ทุกี ภายใต้ข้อตกลง Ω โอกาส $1-\alpha$ ของความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ $(\theta_i - \theta_{i'})$ ทั้งหมด $k(k-1)/2$ คู่ จะอยู่ในช่วง

$$\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{i'} - TS_e \leq \theta_i - \theta_{i'} \leq \hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{i'} + TS_e$$

เมื่อ $T = a q_{\alpha; k, v}$

$q_{\alpha; k, v}$ มาจากการแจกแจงของสถิติเดนิทโทเชเรนส์

การคำนวณเพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบรายคู่

คำนวณหาค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ทั้งหมดและคำนวณค่าสถิติวิกฤตจาก

สูตร

$$T = q_{\alpha; k, v} \sqrt{\frac{S_e}{n}}$$

เมื่อ	$q_{\alpha; k, v}$	เป็นค่าวิกฤตที่ได้จากตารางการแจกแจงสถิติของไคสแควร์
	k	หมายถึงระดับของการทดลอง หรือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง
	α	หมายถึงระดับนัยสำคัญสำหรับการทดลอง
	n	ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง
	v	ดีกรีความเป็นอิสระของ
	S_e	ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนประปราย

เปรียบเทียบค่าสถิติวิกฤต T ที่คำนวณได้กับค่าความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ทั้งหมดค่าความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ใดจะเกิดนัยสำคัญก็ต่อเมื่อค่าความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่นั้นจะต้องมีค่ามากกว่าค่าสถิติวิกฤต T ที่คำนวณได้

การเปรียบเทียบพหุคูณด้วยวิธีเอสของเชฟเฟอ

Scheff'e (1953) ได้เสนอวิธีที่เรียกว่าวิธีเอส เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยทั้งหมด วิธีนี้มีความไว้น้อยกว่าการทดลอง HSD ของทูเก้ แต่จะสามารถนำไปใช้ในการเปรียบเทียบที่ซับซ้อนขึ้น ดังนั้นวิธีของเชฟเฟอจึงเหมาะสำหรับใช้เปรียบเทียบจำนวนมากๆ จำนวนเท่าใดก็ได้ไม่มีขีดจำกัดทั้งที่เป็นรายคู่และไม่ใช่รายคู่ โดยตั้งอัตราความคลาดเคลื่อนของการทดลองเท่ากับ α วิธีของเชฟเฟอมักจะทำภายหลังที่การทดลองเอฟมีนัยสำคัญ และพื้นฐานทางทฤษฎีวิธีเอสของเชฟเฟอมาจากการใช้การแจกแจงเอฟซึ่งให้ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการเปรียบเทียบทั้งหมด $1 - \alpha$ ดังนี้

$$\hat{\Psi} - S\hat{\sigma}_{\Psi}^2 \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + S\hat{\sigma}_{\Psi}^2$$

เมื่อ S มาจาก $S^2 = (k-1)F_{\alpha, k-1, N-k}$

$$\hat{\sigma}_{\Psi}^2 = S_p^2 \sum_i (c_i^2 / n_i) \quad \hat{\alpha}_{\Psi}^2 \text{ คือ } MS_e$$

Ψ และ $\hat{\Psi}$ คือการเปรียบเทียบของประชากรและตัวประมาณค่าของการเปรียบเทียบ

การคำนวณเพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบรายคู่

คำนวณค่าสถิติวิกฤตจาก

$$S = \sqrt{(k-1)F_{\alpha, v_1, v_2}} \sqrt{MS_e \left[\sum \left(\frac{c_i^2}{n_i} \right) \right]}$$

เมื่อ $F_{\alpha; v_1, v_2}$ เป็นค่าที่ได้จากตารางการแจกแจงเอฟ

v_1 หมายถึง ดีกรีของความเป็นอิสระมีค่าเท่ากับ $k - 1$

v_2 หมายถึง ดีกรีของความเป็นอิสระมีค่าเท่ากับ $N - k$

k หมายถึง จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

c_i หมายถึง สัมประสิทธิ์ของการเปรียบเทียบ

n_i หมายถึง ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

การเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจะแสดงนัยสำคัญก็ต่อเมื่อความแตกต่างค่าเฉลี่ยนั้นมีค่ามากกว่าสถิติวิกฤต S ที่คำนวณได้

การเปรียบเทียบพหุคูณด้วยวิธีทดสอบของต้นเนตต์

วิธีทดสอบของต้นเนตต์มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทริกเมนต์หลายๆทริกเมนต์ในระดับการทดลองกับค่าเฉลี่ยทริกเมนต์ควบคุม ในปี 1955 ต้นเนตต์ได้พัฒนาการทดสอบช่วงพหุคูณสำหรับจำนวนการเปรียบเทียบ $k - 1$ การเปรียบเทียบของค่าเฉลี่ย k ค่า มีอัตราความคลาดเคลื่อน

การทดสอบการเปรียบเทียบ $k - 1$ ครั้ง คือ α ซึ่งต้นเนตต์กล่าวว่าการใช้กระบวนการวิธีทดสอบของทู่หรือเอฟเพย์นั้นให้ลิมิตของความเชื่อมั่นเกินความจำเป็น ฐานทฤษฎีของต้นเนตต์มีดังนี้

ทฤษฎี

ลุ่มมติการทดลอง N ทริทเมนต์ ซึ่ง N_0 เป็นทริทเมนต์ที่ควบคุม ตามข้อตกลงปกติของการวิเคราะห์ความแปรปรวน คือ x_{ij} เป็นการแจกแจงแบบปกติและอิสระด้วยความแปรปรวน σ^2 และค่าเฉลี่ย m_i . ถ้าการทดลองมีเพียงหนึ่งทริทเมนต์ สำหรับเปรียบเทียบกับทริทเมนต์ควบคุม การทดสอบลุ่มมติฐานของความแตกต่างจะขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ยที่ $t = \frac{z}{s}$ เมื่อ

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0 - (m_1 - m_0)}{\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_0}}}$$

ที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน σ^2 แล้วค่าของ $t = \frac{z}{s}$ จะมีการแจกแจงที่ด้วยดีกรีของความเป็นอิสระ n ช่วงความเชื่อมั่นของ $m_1 - m_0$ คือ

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_0 \pm d'' s \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_0}}$$

เมื่อ d'' มาจาก $\text{Prob} (|t| < d'') = P \dots \dots \dots (1)$

ถ้าการทดลองมี p ทริทเมนต์และทริทเมนต์ควบคุม

$$z = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_0 - (m_i - m_0)}{\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_0}}}$$

และ $t_i = \frac{z_i}{s}$, $i = 1, 2, \dots, p$ ดังนั้นค่าของลิมิตความเชื่อมั่น 2 ทาง คือ

$$\bar{x}_i - \bar{x}_0 \pm d_i'' s \sqrt{\frac{1}{N_i} + \frac{1}{N_0}} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

ถ้า p เป็นค่าคงที่ d_1 ก็จะสอดคล้องกับสมการ

$$\text{Prob} (|t_1| < d_1'', |t_2| < d_2'', \dots, |t_p| < d_p'') \dots \dots \dots (2)$$

เพื่อที่จะหาค่าของ d จากค่ารากของสมการ (2) ดังนั้นสมการ (2) สามารถเขียนได้ในรูป

$$P = \text{Prob} (|z_1| < d_1'' S, |z_2| < d_2'' S, \dots, |z_p| < d_p'' S)$$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} G (d_1'' S, d_2'' S, \dots, d_p'' S) p(s) ds$$

เมื่อ $G(z_1, z_2, \dots, z_p)$ เป็น c.d.f. ของ $|z_i|$

การคำนวณเพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบรายคู่

$$d'' = tD_{\alpha/2; k, v} \sqrt{\frac{2S}{n}}$$

ค่า $tD_{\alpha/2; k, v}$ มาจากตารางของต้นเนตต์ วิธีทดสอบของต้นเนตต์จะแสดงนัยสำคัญก็ต่อเมื่อ ความแตกต่างค่าเฉลี่ยมีค่ามากสถิติวิกฤต d''

การเปรียบเทียบพหุคูณด้วยวิธีทดสอบของนิวแมนคูลล์

การทดสอบของนิวแมนคูลล์ เป็นวิธีที่มีกระบวนการแตกต่างไปจากการเปรียบเทียบพหุคูณด้วยวิธีอื่นๆ อันเกิดจากข้อเสนอแนะของสตีวเดนท์ (1927) ซึ่งนิวแมน (1939) เป็นผู้พัฒนาการทดสอบนี้ขึ้นและคูลล์ (1952) ได้ขยายวิธีการทดสอบของนิวแมน ดังนั้นการทดสอบนี้จึงเรียกว่า วิธีทดสอบของนิวแมนคูลล์ การทดสอบเริ่มจากวิธีการเรียงลำดับของค่าเฉลี่ยจากน้อยไปมาก และค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยตามลำดับขั้นค่าเฉลี่ยที่ห่างกัน เพื่อเป็นการป้องกันขีดจำกัดล่างของ $1-\alpha$ สำหรับการเรียงลำดับค่าเฉลี่ยทั้งหมด ค่าสถิติวิกฤตของความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่ของการทดสอบจะเปลี่ยนแปลงไปตามลำดับขั้นของค่าเฉลี่ยที่ห่างกันในแต่ละชุดการเปรียบเทียบ การทดสอบของนิวแมนคูลล์นี้ไม่อาจที่จะสร้างช่วงของความเชื่อมั่น เพราะกระบวนการทดสอบไม่เกี่ยวข้องกับการหาความเชื่อมั่นอย่างใด

การคำนวณเพื่อใช้สำหรับเปรียบเทียบรายคู่

คำนวณหาความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ ซึ่งเรียกตามลำดับค่าเฉลี่ยจากน้อยไปหามากและคำนวณค่าสถิติวิกฤตจากสูตร

$$w_r = q_{r, \alpha; v} \sqrt{\frac{MS_e}{n}}$$

$q_{r, \alpha; v}$ หมายถึงค่าวิกฤตจากตารางของสตีวเดนท์โทไซเรนจ์

r	หมายถึงจำนวนลำดับชั้นของค่าเฉลี่ยที่ต่างกัน
MS_e	หมายถึงค่าประมาณความคลาดเคลื่อนประปราย
n	หมายถึงขนาดกลุ่มตัวอย่าง

การเรียงลำดับของค่าเฉลี่ยจากน้อยไปหามาก ค่าเฉลี่ย 2 ค่า ที่เปรียบเทียบกันสามารถอธิบายลำดับชั้นของความห่างของค่าเฉลี่ยด้วยแผนภาพข้างล่างนี้

$$\bar{x}_n \quad \bar{x}_j \quad \bar{x}_k \quad \bar{x}_1 \quad \bar{x}_m \quad \bar{x}_n \quad \bar{x}_0$$

ภายใต้ความยาวของเส้นที่เท่ากัน ค่าสถิติวิกฤตของการทดสอบความแตกต่างค่าเฉลี่ยก็จะมีค่าเหมือนกัน วิธีทดสอบของนิวแมน-คูลส์นี้จะแสดงนัยสำคัญก็ต่อเมื่อค่าความแตกต่างค่าเฉลี่ยรายคู่มีค่ามากกว่าสถิติวิกฤตของชั้นที่ r (w_r)

การวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Olive J. Dunn¹ ได้เปรียบเทียบขบวนการวิเคราะห์ที่เกิดขึ้นกับขบวนการเปรียบเทียบภายหลังด้วยวิธีทดสอบของทูกี และ เชฟเฟย์ และโต้แย้งให้เห็นว่าการเปรียบเทียบพหุคูณของดัชนี ขึ้นอยู่กับจำนวนการเปรียบเทียบ ถ้าจำนวนการเปรียบเทียบมีมากกว่าจำนวนค่าเฉลี่ยที่เกิดจากทรีทเมนต์หลายๆ วิธีในการทดลองแล้ว ขบวนการของวิเคราะห์ด้วยวิธีของดัชนีจะให้ช่วงความเชื่อมั่นมากกว่าขบวนการเปรียบเทียบภายหลังด้วยวิธีเอลส์ทดสอบของทูกีและ เชฟเฟย์ ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะการเปรียบเทียบตัววิธีทดสอบของทูกีและ เชฟเฟย์ที่ยึดอยู่กับจำนวนค่าเฉลี่ย ดังนั้น ถ้าผู้วิจัยได้ทราบถึงจำนวนเปรียบเทียบแบบอิสระที่น้อยกว่าจำนวนค่าเฉลี่ยแล้ว การเปรียบเทียบพหุคูณของดัชนีย่อมมีอำนาจมากกว่ากระบวนการเปรียบเทียบภายหลังทั้ง 2 วิธี

Kirk² ได้แสดงการเปรียบเทียบอำนาจของกระบวนการเปรียบเทียบพหุคูณวิธีต่างๆ โดยพิจารณาจากสถิติวิกฤตของการทดสอบการเปรียบเทียบพหุคูณ แต่ละวิธีจากการเปรียบเทียบพบว่า การเปรียบเทียบภายหลังแบบอิสระนั้นมีอำนาจมากกว่าการเปรียบเทียบภายหลังแบบไม่อิสระ

¹Kirk, Experimental Design Procedure for the Behavioral Sciences, 81.

²Ibnd., p. 95

และการเปรียบเทียบภายหลัง นั่นคือวิธีการเปรียบเทียบภายในแบบอิสระนั้น สามารถจับความแตกต่างค่าเฉลี่ยที่แท้จริงได้ วิธีทดสอบของทูก็และเชฟเฟย์มีอำนาจน้อย เมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆ แต่มีคุณสมบัติในการช่วยทดสอบสมมติฐานได้มากกว่า

Boardman และ Moffitt¹ ได้เปรียบเทียบวิธีวิเคราะห์พหุคูณ 5 วิธี คือ LSD HSD วิธีเอส การทดสอบช่วงพหุคูณของต้นแคณ และวิธีทดสอบของนิวแมนคูลล์ ด้วยกลุ่มตัวอย่างที่มีการแจกแจงแบบปกติขนาด 5, 10 และ 15 ในระดับการทดลองตั้งแต่ 2-11 และทำการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง เปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อน 2 แบบ คือ อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบและอัตราความคลาดเคลื่อนต่อการทดลอง จากการวิจัยได้แสดงให้เห็นเด่นชัดว่าอัตราความคลาดเคลื่อนของวิธี LSD และการทดสอบช่วงพหุคูณของต้นแคณเพิ่มขึ้นตามจำนวนค่าเฉลี่ย ส่วนวิธีเอสของเชฟเฟย์เป็นวิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่มีอัตราความคลาดเคลื่อนที่ นุรักษ์นิยมมากที่สุด

Carmer และ Swanson² ใช้เทคนิคของซีวูเลชั่นเพื่อศึกษาอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 ของวิธีเปรียบเทียบพหุคูณแบบต่างๆ ด้วยแผนการทดลองแบบ B-k โดยเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย 10 คู่ ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\mu = 100$, $\sigma^2 = 100$ ขนาดกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 5, 10 และ 20 ตามลำดับทำการจำลองการทดลองซ้ำ 4,000 ครั้ง และตั้งระดับนัยสำคัญเฉพาะที่ α เท่ากับ .05 เท่านั้น ผลการวิจัยแสดงอัตราความคลาดเคลื่อน 2 แบบ คือ อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบและอัตราความคลาดเคลื่อนต่อการทดลอง อัตราความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวิธีการเปรียบเทียบพหุคูณด้วยวิธีเอสของเชฟเฟย์ มีค่าน้อยกว่าวิธีอื่นๆ วิธีทดสอบของทูก็ และวิธีทดสอบของนิวแมนคูลล์ให้อัตราความคลาดเคลื่อนสูงกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในระดับ .05 แต่อย่างไรก็ตามวิธีทดสอบของทูก็ ยังให้อัตราความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าวิธีทดสอบของนิวแมนคูลล์ และวิธีทดสอบของทูก็ใช้ได้ดีแม้ขนาดกลุ่มตัวอย่างจะมีขนาดใหญ่ขึ้น

¹ Thomas J. Boardman and Donald R. Moffitt, "Graphical Monte Carb Type I Error Rates for Multiple Comparison Procedures," Biometric, (September 1971), pp. 738-744.

² S. G. Carmer and M. R. Swanson, "An Evaluation of Ten Pairwise Multiple Comparison Procedures Monte Carlo Methods," Journal of the American Statistical Association, (March 1973), pp. 66-74

Bernhardson¹ (1975) ได้เปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการเปรียบเทียบพหุคูณ 5 วิธี คือ LSD HSD วิธีเอส์ของเซฟเฟย์ การทดสอบของนิวแมนคูลส์ และการทดสอบช่วงพหุคูณของตันแคน การวิจัยครั้งนี้ทำการวิจัยเฉพาะขนาดกลุ่มตัวอย่าง 15 และกระทำภายหลังจากวิเคราะห์ความแปรปรวนด้วยการทดสอบเอส์ กำหนดพารามิเตอร์ $\mu = 50$, $\sigma = 15$ ภายใต้การแจกแจงของประชากรแบบปกติโดยใช้สปรูทิน โปรแกรม Gauss ผลการวิจัยสอดคล้องกับการวิจัยของ Boardman และ Maffitt แต่ Bernhardson สรุปรว่าถ้าทำการเปรียบเทียบพหุคูณภายหลังจากวิเคราะห์ความแปรปรวนด้วยการทดสอบเอฟแล้วผลของอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จะลดน้อยลงอันเนื่องมาจากการทดสอบเอฟนั้นได้ป้องกันอัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบ

¹Clemens S. Bernhardson, "Type I Error Rates When Multiple Comparison Procedures Follow a Significant F test of Anova," Biometrics 31 (March 1975) pp. 229-232.