หอสมุดกลาง
จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

บทที่ 4

สมมุติฐานของการวิเคราะห์และวิธีวิเคราะห์พฤติกรรมทางโครงสร้าง ระหว่างมวลข้าวเปลือกกับไซโลที่ใช้บรรจุโดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์

กล่าวนำ

ตามทฤษฎีกลศาสตร์[๑] สมการพื้นฐานที่บรรยายพฤติกรรมของวัตถุเมื่อถูกแรงกระทำจากภายนอกนั้นจะอยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล (Partial Differential Equations) ภายใต้เงื่อนไขบนพื้นผิววัตถุ ซึ่งเรียกโดยทั่วไปว่า Boundary Value Problems ดังนั้นการวิเคราะห์พฤติกรรมหรือหาคำตอบแน่นอนของสมการเหล่านี้จะกระทำได้ก็ต่อเมื่อรูปทรงทางเรขาคณิตและกลสมบัติของวัตถุนั้น ๆ รวมทั้งเงื่อนไขบนพื้นผิวอยู่ในแบบง่าย ๆ เท่านั้น

ด้วยเหตุที่กล่าวข้างต้นในกรณีที่เงื่อนไขที่กำหนดไว้มีความซับซ้อน การวิเคราะห์จึงกระทำได้แต่เพียงการหาคำตอบโดยประมาณทั้งนี้ก็โดยพยายามเปลี่ยนรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียลไปเป็นชุดของสมการเชิงเส้น ซึ่งสะดวกในการหาคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณคอมพิวเตอร์ วิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ (Finite Element Method) ก็เป็นวิธีวิเคราะห์คำตอบโดยประมาณวิธีหนึ่งตามที่กล่าวมานี้ซึ่งกำลังได้รับความนิยมอย่างสูงเนื่องจากมีขอบเขตการใช้วิเคราะห์ปัญหาได้กว้างขวางมาก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงนำเอาวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์มาใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ด้วย

เพราะฉะนั้นในที่จะได้กล่าวต่อไป จะเป็นสมมุติฐานที่ใช้เป็นแนวทาง การสร้างสูตรพื้นฐานและการนำวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์มาประยุกต์รวมทั้งการจำลองสภาพของมวลข้าวเปลือกและไซโลที่ใช้บรรจุสำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรมโดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ดังกล่าวนี้

สมมุติฐานในการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์

สมมุติฐานสำหรับเป็นแนวทางในการวิเคราะห์พฤติกรรมทางโครงสร้างของมวลข้าวเปลือกและไซโลที่ใช้บรรจุโดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์กล่าวได้เป็นข้อ ๆ ดังนี้

ก. มวลของข้าวเปลือกและไซโลจะพิจารณารวมกันเป็นระบบโครงสร้าง 3 มิติ ระบบหนึ่งซึ่งประกอบด้วยวัสดุมวลเม็ดมีกลสมบัติเป็นวัสดุอีลาสติกชนิดไร้เชิงเส้น (Nonlinear Elastic Material) ตามผลที่ได้จากการทดลองตรวจสอบในบทที่ 3 บรรจุอยู่ในโครงสร้างรูปทรงกระบอกกลมผนังทำด้วยคอนกรีตเสริมเหล็กซึ่งสมมุติให้เป็นวัสดุอีลาสติกชนิดเชิงเส้น (Linear Elastic Material)

ข. การวิเคราะห์จะพิจารณาจากสภาพเป็นจริงของการบรรจุมวลข้าวเปลือกลงในไซโล ซึ่งกำหนดให้บรรจุเพิ่มขึ้นเป็นชั้น ๆ โดยในชั้นที่เพิ่มขึ้นใหม่ของมวลข้าวเปลือกจะมีน้ำหนักต่อหน่วยปริมาตรในสภาพหลวมตัวปกติที่ได้ทดลองตรวจสอบมาแล้ว คือ 617.9 กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร

ค. มวลข้าวเปลือกที่บรรจุลงทุก ๆ ชั้นจะถูกแบ่งออกเป็น "ไฟไนท์อีลีเมนต์" ตามหลักการแยกออกเป็นส่วนย่อยของวิธีนี้จำนวนหนึ่งซึ่งอีลีเมนต์เหล่านี้จะเป็นพารามิเตอร์พื้นฐาน (Basic Unknown Parameter) ที่จะต้องวิเคราะห์พฤติกรรมเพื่อรวมประกอบกันเข้าเป็นพฤติกรรมของมวลข้าวเปลือกทั้งหมด

ง. การวิเคราะห์จะกระทำแบบลำดับขั้น (Incremental Procedure) เพื่อให้รับกับลักษณะการบรรจุข้าวเปลือกเป็นชั้น ๆ ตามข้อ ข. ทั้งนี้ในการวิเคราะห์จะกำหนดให้ปรากฏการณ์ความฝืดระหว่างมวลข้าวเปลือกกับผนังไซโลเป็นสภาพเงื่อนไข (Boundary Condition) รวมทั้งจะได้พิจารณาถึงอิทธิพลของการยืดหดตัวของผนังไซโลที่จะมีผลต่อการวิเคราะห์ด้วย

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์โดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์

ด้วยเหตุที่ผลจากการทดลองตรวจสอบแสดงว่าข้าวเปลือกเป็นวัสดุอีลาสติกชนิดไร้เชิงเส้น ดังนั้นการวิเคราะห์พฤติกรรมทางโครงสร้างจะกระทำได้โดยวิธีการแบบลำดับขั้น (Incremental Formulation) เท่านั้น จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องทราบถึงหลักการวิเคราะห์แบบดังกล่าวนี้ก่อน

1. การวิเคราะห์แบบลำดับขั้นสำหรับพฤติกรรมทางโครงสร้างของวัสดุชนิดไร้เชิงเส้น

ในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น ลำดับพฤติกรรมของวัตถุจะถูกแบ่งออกเป็นหลาย ๆ สภาพสมดุลย์ ได้แก่ ${}^{0}\Omega$, ${}^{1}\Omega$,....., ${}^{n}\Omega$, ${}^{n+1}\Omega$,....., ${}^{f}\Omega$ โดยที่

${}^{0}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้นของการเปลี่ยนรูปทรงของวัสดุ

${}^{f}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดสุดท้ายของลำดับพฤติกรรม

${}^{n}\Omega$ คือสภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบันในการวิเคราะห์

สมมุติว่าเราทราบค่าของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง คือ สเตรช, สเตรน, ระยะเคลื่อนที่ และประวัติการกระทำของแรงโดยการวิเคราะห์จนถึงสภาพสมดุลย์ปัจจุบัน ก็จะสามารถเขียนสมการของพลังงานสมมุติส่วนที่เพิ่มขึ้น (Equations of Incremental Virtual Work) เพื่อแสดงสภาวะสมดุลย์ของวัตถุ ณ จุด ${}^{n+1}\Omega$ สำหรับวิเคราะห์ค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่กล่าว ณ จุด ${}^{n+1}\Omega$ ดังกล่าวนี้ ซึ่งการวิเคราะห์จะต้องอ้างอิงถึงสภาพใดสภาพหนึ่งที่ทราบมาก่อนเนื่องจากสภาพของวัตถุ ณ จุด ${}^{n+1}\Omega$ นั้นยังไม่ทราบค่า โดยทั่วไปมักจะเลือกสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้นหรือจุดปัจจุบัน ซึ่งเป็นการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นชนิดลากรางจ์และออยเลอร์ (Lagrangian and Eulerian) ตามลำดับ โดยวิธีการเช่นนี้ก็จะทำให้สามารถวิเคราะห์สภาพสมดุลย์ได้จนถึง ณ จุดสุดท้าย ${}^{f}\Omega$ ตามที่ต้องการ

2. การสร้างสมการพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์

การสร้างสมการพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์นี้จำเป็นที่จะต้องทราบถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในรูปของชุดสมการบรรยายพฤติกรรมของวัตถุภายใต้แรงกระทำ

อันเป็นพื้นฐานความรู้ทางกลศาสตร์ชั้นสูง[3] ร่วมกับวิธีการประมาณการ เพื่อเปลี่ยนชุดของสมการดังกล่าวซึ่งเป็นสมการไร้เชิงเส้นไปเป็นชุดของสมการเชิงเส้นสำหรับใช้เป็นสมการพื้นฐานในการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ตามต้องการ

2.1 พื้นฐานความรู้ทางกลศาสตร์ชั้นสูง

ตัวแปรจำนวน 3 ชุด ที่จำเป็นสำหรับการบรรยายพฤติกรรมของวัตถุภายใต้แรงกระทำ คือ สเตรช (S_{ij}) สเตรน (E_{ij}) และระยะเคลื่อนที่ (U_i) เมื่อพิจารณาสภาพสมดุลย์ของวัตถุที่ 3 จุดด้วยกัน คือ

- สภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้น, C_o ซึ่งเป็นสภาพที่ตัวแปรทุกตัวอ้างอิงถึง
- สภาพสมดุลย์ ณ จุดปัจจุบัน, C_1 ซึ่งเป็นสภาพที่วัตถุเปลี่ยนรูปทรง
- สภาพสมดุลย์ ณ จุดต่อจากจุดปัจจุบัน, C_2

ตัวแปรข้างต้นจะมีความสัมพันธ์ในรูปของสมการบรรยายกฎแห่งธรรมชาติ[9] ดังนี้

2.1.1 **Kinematic Relations** คือชุดของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตรนกับระยะเคลื่อนที่ (Strain-Displacement Relationships) ได้แก่

$$E_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \qquad (4\text{–}1)$$

โดยที่ $$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,{}^{1}u_{k,j} + {}^{1}u_{k,i}u_{k,j}$$

และ $$2\eta_{ij} = u_{k,i}u_{k,j}$$

เมื่อตัวเลขมุมบนซ้ายของตัวแปรหมายถึงหมายเลขของสภาพสมดุลย์ (เช่น ${}^{1}u_{k,j}$ หมายถึงค่าของ $u_{k,j}$ ในสภาพสมดุลย์ C_1 เป็นต้น) และเครื่องหมาย "," หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับแกนโคออร์ดิเนทอ้างอิงที่ C_o

2.1.2 **Equilibrium Relations โดย Principle of Virtual Work** เป็นชุดสมการแสดงความสมดุลย์ของจุดทุก ๆ จุดภายในวัตถุซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ในระหว่างตัวแปรสเตรช เราอาจสร้างสมการแสดงความสมดุลย์นี้ในรูปของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นได้ คือ

$$\int_{{}_0V} \left[S_{ij}(\delta e_{ij} + \delta\eta_{ij}) + {}^1S_{ij} \cdot \delta\eta_{ij} \right] dV$$

$$= \int_{{}_2A} \delta u_i \cdot {}^2t_i d\bar{a} + \int_{{}_2V} \delta u_i \cdot {}^2f_i d\bar{v}$$

$$- \left[\int_{{}_1A} \delta u_i \cdot {}^1t_i d\bar{a} + \int_{{}_1V} \delta u_i \cdot {}^1f_i d\bar{v} \right] \qquad (4\text{-}2)$$

เมื่อ t_i และ f_i คือเวคเตอร์ของหน่วยแรงกระทำภายนอก (External Force Vector) และหน่วยแรงมวล (Body Force Vector) ตามลำดับ

A และ V คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ ณ จุดเริ่มต้น C_0

a และ v คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ปัจจุบัน ณ จุด C_1

$\bar{a}$ และ $\bar{v}$ คือพื้นที่และปริมาตรของวัตถุอ้างอิงกับสภาพสมดุลย์ ณ จุด C_2

2.1.3 **Constitutive Relations** เป็นชุดสมการที่แสดงถึงคุณสมบัติของวัสดุซึ่งประกอบขึ้นเป็นมวลวัตถุที่พิจารณาและอยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างสเตรซกับสเตรน เมื่อเป็นวัสดุอีลาสติก ชุดสมการนี้จะเขียนได้เป็น

$$S_{ij} = C_{ijmn} E_{mn} \qquad (4\text{-}3)$$

โดยที่ C_{ijmn} เป็นสัมประสิทธิ์แสดงคุณสมบัติของวัสดุ

ความสัมพันธ์ในระหว่างตัวแปรทั้ง 3 ชุดที่กล่าวมาทั้งหมดเมื่อแสดงเป็นแผนภูมิจะเป็นดังรูปที่ 15

2.2 <u>วิธีสร้างชุดสมการเชิงเส้นในเทอมของตัวแปรระยะเคลื่อนที่</u>

การใช้ชุดสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กล่าวในข้อ 2.1 วิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุนั้นมักนิยมลดรูปของชุดสมการทั้ง 3 ให้อยู่ในรูปของตัวแปรระยะเคลื่อนที่เพียงชุดเดียว ซึ่งเรียกลักษณะการวิเคราะห์เช่นนี้ว่า **Displacement Approach**

ดังนั้นในกรณีนี้เมื่อเราลดรูปสมการทั้ง 3 ชุด ลงเหลือเพียงชุด สมการ Equilibrium ในเทอมของตัวแปรระยะเคลื่อนที่ซึ่งจะให้ความสะดวกในการวิเคราะห์หาคำตอบโดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ ก็จะได้ชุดสมการไร้เชิงเส้นในตัวแปรไม่ทราบค่าของระยะเคลื่อนที่ u_i ดังนี้

$$\int_{{}_0V}\left[C_{ijmn}e_{mn}\delta e_{ij}+C_{ijmn}(e_{mn}\delta\eta_{ij}+\eta_{mn}\delta e_{ij})+C_{ijmn}\eta_{mn}\delta\eta_{ij}+{}^1S_{ij}\delta\eta_{ij}\right]dV$$

$$=\int_{{}_2A}\delta u_i{}^2t_i d\bar{a}+\int_{{}_2V}\delta u_i{}^2f_i d\bar{v}-\left[\int_{{}_1A}\delta u_i{}^1t_i da+\int_{{}_1V}\delta u_i{}^1f_i dv\right] \qquad (4\text{-}4)$$

การหาคำตอบของสมการ (4–4) ข้างต้น ไม่อาจกระทำได้โดยตรงเพราะเป็นสมการไร้เชิงเส้น เพราะฉะนั้นจึงต้องเปลี่ยนให้อยู่ในชุดของสมการเชิงเส้นโดยวิธีประมาณการ ซึ่งอาศัยการตั้งสมมุติฐานเพื่อการประมาณการที่เหมาะสม สมการที่ (4–4) เมื่อผ่านขบวนการประมาณการที่กล่าวก็จะได้ชุดสมการดังนี้ คือ

$$\int_{{}_0V}\left[C_{ijmn}e_{mn}\delta e_{ij}+C_{ijmn}(e_{mn}\delta\eta_{ij}+\eta_{mn}\delta e_{ij})+C_{ijmn}\eta_{mn}\delta\eta_{ij}+{}^1S_{ij}\delta\eta_{ij}\right]dV$$

$$=\int_{{}_0A}\delta u_i{}^2t_i dA+\int_{{}_0V}\delta u_i{}^2f_i dV-\int_{{}_0V}{}^1S_{ij}\delta e_{ij}dV \qquad (4\text{-}5)$$

สมการ (4–5) นี้เป็นชุดสมการเชิงเส้นแสดงพฤติกรรมสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นในเทอมของตัวแปรระยะเคลื่อนที่ u_i และเป็นสมการพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์

3. <u>การประยุกต์วิธีการของไฟไนท์อีลีเมนต์สำหรับวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุโดยใช้ตัวแปรระยะเคลื่อนที่เป็นหลัก</u>

หลักการของวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุมีอยู่ 3 ประการ คือ

3.1 <u>การแยกออกเป็นส่วนย่อย (Discretization)</u> ได้แก่การแบ่งอาณาบริเวณของวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นส่วนย่อยเล็ก ๆ ที่เรียกว่า "ไฟไนท์อีลีเมนต์" ซึ่งแต่ละส่วนย่อยหรือไฟไนท์อีลีเมนต์นี้จะต่อเข้าด้วยกันด้วยจุดเชื่อมต่อ **Nodal Points** ดังแสดงในรูปที่ 16 และมีคุณสมบัติตามสมการดังนี้ คือ

$$ {}^{\alpha}u_k(x) = \phi^m(x)\ {}^{\alpha}\hat{q}_{mk} \qquad (4\text{–}6) $$

เมื่อ ${}^{\alpha}u_k(x)$ คือองค์ประกอบของเวคเตอร์ระยะเคลื่อนที่ ณ จุดใด ๆ ภายในไฟไนท์อีลีเมนต์เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลย์ C_α

$\phi^m(x)$ คือฟังก์ชั่นแห่งการประมาณ (**Interpolation Functions**) ที่จุด **m** ของ **Nodal Point** ในแต่ละอีลีเมนต์

${}^{\alpha}\hat{q}_{mk}$ คือองค์ประกอบของเวคเตอร์ระยะเคลื่อนที่ ณ จุด **m** ของ **Nodal Point** ของแต่ละไฟไนท์อีลีเมนต์

สมการนี้แสดงความหมายว่า ค่าของระยะเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ ภายในไฟไนท์อีลีเมนต์จะหาได้โดยการประมาณจากค่าระยะเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น ณ **Nodal Point** ของอีลีเมนต์นั้น ๆ เพราะฉะนั้นโดยอาศัยคุณสมบัติตามสมการ (4–6) ดังกล่าว และสมการแสดงพฤติกรรมสมดุลย์ของวัตถุ (4–5) กรณีของไฟไนท์อีลีเมนต์ชนิด "**Isoparametric**" ที่ใช้ในการวิจัยนี้ จะมีสมการแสดงพฤติกรรมในการวิเคราะห์แบบลำดับขั้นจากสภาพสมดุลย์ C_1 ไปสู่ C_2 เป็น

$$ \delta\hat{q}\cdot\left[\left\{K_L({}^{1}\hat{q}) + K_G({}^{1}S)\right\}\cdot\hat{q}\right] = \delta\hat{q}\cdot\left[{}^{2}P - {}^{1}R\right] \qquad (4\text{–}7) $$

โดยที่

$$ \delta\hat{q}\cdot K_L\cdot\hat{q} = \int_{{}^{0}V} C_{ijmn}\, e_{mn}\, \delta e_{ij}\, dV $$

$$ \delta\hat{q}\cdot K_G\cdot\hat{q} = \int_{{}^{0}V} {}^{1}S_{ij}\, \delta\eta_{ij}\, dV $$

$$\delta \hat{q} \cdot {}^{1}R = \int_{{}^{o}V} {}^{i}S_{ij}\, \delta e_{ij}\, dV$$

และ $$\delta \hat{q} \cdot {}^{2}P = \int_{{}^{o}A} \delta u_i\, {}^{2}t_1 dA + \int_{{}^{o}V} \delta u_i\, {}^{2}f_i\, dV$$

สำหรับแมทริซ (Matrices) ในสมการ (4–7) ข้างต้น มีชื่อเรียกดังนี้

K_L เรียกว่า **Linear Stiffness Matrix**

K_G เรียกว่า **Geometric Stiffness Matrix** ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของสเตรชที่สภาวะสมดุลย์ C_1

${}^{2}P$ เรียกว่า **Generalized Nodal Load** ซึ่งเป็นเวคเตอร์รวมของหน่วยแรงกระทำภายนอกและหน่วยแรงมวล

${}^{1}R$ เรียกว่า **Load Correction Vector** คือเวคเตอร์ของหน่วยแรงที่ทำให้เกิดสภาพสมดุลย์แท้จริง ณ จุด C_1

3.2 <u>การรวมส่วนย่อยโดยตรง (Direct Stiffness Assembling Process)</u>

โดยวิธีการของการรวมส่วนย่อยโดยตรง สมการแสดงพฤติกรรมของแต่ละไฟไนท์อีลีเมนต์ (4–7) ก็จะประกอบเป็นชุดของสมการแสดงพฤติกรรมของวัตถุในเทอมของตัวแปรไม่ทราบค่าระยะเคลื่อนที่ ณ จุด **Nodal Point** ดังนี้

$$\delta q \cdot \left[\left\{ \bar{K}_L + \bar{K}_G \right\} \cdot q \right] = \delta q \cdot \left[{}^{2}\bar{P} - {}^{1}\bar{R} \right] \qquad (4\text{–}8)$$

โดยที่ $$\bar{K}_L = \sum_{e=1}^{M} K_L^{(e)}$$

$$\bar{K}_G = \sum_{e=1}^{M} K_G^{(e)}$$

$$2_{\bar{P}} = \sum_{e=1}^{M} 2_P(e)$$

$$1_{\bar{R}} = \sum_{e=1}^{M} 1_R(e)$$

เมื่อ $\sum_{e=1}^{M}$ หมายความถึงการรวมส่วนย่อยโดยตรงตามวิธี Direct Stiffness Assembling Process ตั้งแต่อีลีเมนต์ที่ 1 ถึงอีลีเมนต์สุดท้าย คือ M

3.3 <u>การหาสภาพสมดุลย์ของวัตถุโดย Minimization Process</u> สมการที่ (4–8) แสดงถึงความสมดุลย์ของวัตถุในรูปของการแปรผันค่าระยะการเคลื่อนที่ของจุด Nodal Point ทั้งหมด การแปรผันนี้จะให้สภาพสมดุลย์ของวัตถุที่แท้จริงสำหรับค่าระยะเคลื่อนที่ใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

$$\{\bar{K}_L + \bar{K}_G\} \cdot q = 2_{\bar{P}} - 1_{\bar{R}} \qquad (4–9)$$

ซึ่งเป็นชุดของสมการเชิงเส้นในเทอมของตัวแปรไม่ทราบค่าระยะเคลื่อนที่ของจุด Nodal Point ทั้งหมด การวิเคราะห์แบบลำดับขั้นสำหรับพฤติกรรมของวัตถุชนิดไร้เชิงเส้น ก็จะกระทำได้โดยอาศัยสมการที่ (4–9) นี้

การวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ที่กล่าวมาทั้งหมด เราสามารถเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการคำนวณโดยมีขั้นตอนต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 17

<u>การจำลองสภาพมวลข้าวเปลือกและไซโลสำหรับการวิเคราะห์</u>

1. <u>สภาพและรูปทรงทางเรขาคณิต</u>

การจำลองสภาพและรูปทรงทางเรขาคณิตในที่นี้หมายถึง การพิจารณาสภาพของการ

บรรจุข้าวเปลือกลงในไซโลโดยจำลองให้เป็นการวิเคราะห์แบบลำดับขั้น ซึ่งกำหนดให้การบรรจุมวลข้าวเปลือกเพิ่มขึ้นเป็นขั้น ๆ โดยในขั้นที่เพิ่มขึ้นมวลข้าวเปลือกจะมีความหนาแน่นที่สภาพหลวมตัวปกติดังได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นของบท การบรรจุลงในไซโลนี้กำหนดให้มีจำนวนขั้นทั้งหมดเท่ากับ 10 ขั้น สำหรับไซโลทุกขนาด แต่ละขั้นจะมีความหนาแน่นเริ่มต้น (ก่อนเกิดการยุบตัว) ที่แกนศูนย์กลางของไซโลเท่ากับ 2.50 เมตร ในไซโลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 6, 8 และ 10 เมตร ส่วนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 และ 15 เมตร จะมีความหนาของมวลข้าวเปลือกที่บรรจุชั้นแรกเท่ากับ 5 เมตร และความหนาขั้นต่อ ๆ ไปเท่ากับ 2.22 เมตร นอกจากนั้นขั้นของมวลข้าวเปลือกเหล่านี้จะลาดลงจากศูนย์กลางเป็นมุมเท่ากับมุมลาดชันปกติ (ϕ , Angle of Repose) ซึ่งมีค่าตามการทดลองตรวจสอบที่กล่าวในบทที่ 3 เท่ากับ 22.75 องศา การจำลองสภาพการบรรจุเช่นนี้ จะเห็นได้ว่าถ้าจำลองความหนาของมวลข้าวเปลือกแต่ละขั้นบางลงเท่าใด จำนวนขั้นของการบรรจุให้เต็มไซโลก็จะมีมากขึ้นเท่านั้น ขณะเดียวกันก็จะให้สภาพเหมือนกับการค่อย ๆ บรรจุลงทีละน้อยอย่างต่อเนื่อง

โดยหลักการแยกออกเป็นส่วนย่อยตามวิธีการของไฟไนท์อีลีเมนต์รูปทรงของไซโลเป็นแบบทรงกระบอกกลมจึงสามารถทำการวิเคราะห์แบบสมมาตรรอบแกนศูนย์กลาง (Axisymmetric) โดยมวลข้าวเปลือกแต่ละขั้นจะถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์วงแหวนจำนวน 4 อีลีเมนต์ และเป็นไฟไนท์อีลีเมนต์แบบ Isoparametric ชนิดที่มีจุดเชื่อมต่อ Nodal Points จำนวน 8 จุด ซึ่งมีชื่อเรียกว่า 8-point Isoparametric Quadrilateral Ring Element ดังแสดงในรูปที่ 18 ส่วนในรูปที่ 19 แสดงตัวอย่างการแบ่งมวลข้าวเปลือกเป็นไฟไนท์อีลีเมนต์ดังกล่าวในไซโลขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 เมตร นอกจากนี้การพิจารณาผลของการยืดหดในผนังไซโลเมื่อมีแรงกระทำด้านข้าง ผนังของไซโลขนาดความสูงเท่ากับความหนาของชั้นมวลข้าวเปลือกที่บรรจุจะถูกจำลองเป็น Hoop Element ซึ่งมีสภาพเหมือนกับที่รองรับยืดหยุ่น โดยมีสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงในแนวเส้นรอบวงแหวน (P , Hoop Force) กับระยะการเคลื่อนที่ตามแนวรัศมีของไซโล (s_r) ดังนี้

$$P_i = \frac{H_i \, E_i}{R} \, s_{r_i} \qquad (4\text{-}10)$$

เมื่อ P_i คือ Hoop Force ในอีลีเมนต์ที่ i

s_{r_i} คือ ระยะเคลื่อนที่ของผนังไซโลตามแนวรัศมี สำหรับอีลีเมนต์ที่ i

H_i คือ ความสูงของอีลีเมนต์ที่ i

E_i คือ Hoop Force ต่อหนึ่งหน่วยความสูงของผนังไซโลที่ทำให้เกิดหนึ่งหน่วยสเตรนในแนวเส้นรอบวงแหวน

R คือ รัศมีของไซโล

สำหรับไซโลคอนกรีตเสริมเหล็ก ค่าของ E_i ในหน่วยกิโลกรัมต่อเมตร จะหาได้จาก

$$E_i = 100\, bE_c + A_s E_s \qquad (4\text{–}11)$$

โดยที่ E_c คือ โมดูลัสแห่งการยืดหยุ่นของคอนกรีตมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 240,000 กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร

E_s คือ โมดูลัสแห่งการยืดหยุ่นของเหล็กเสริมมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 2,040,000 กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร

b คือ ความหนาของผนังไซโลหน่วยเป็นเซนติเมตร

และ A_s คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมในผนังตามแนวเส้นรอบวง (Hoop Reinforcement) ของไซโลหน่วยเป็นตารางเซนติเมตร

เมื่อนำสมการ (4–10) รวมเข้ากับสมการแสดงความสมดุลย์ของมวลวัตถุ (4–7) โดยวิธีการรวมส่วนย่อยโดยตรงของวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ ก็จะทำให้เกิดสภาพต่อเนื่องกันตามสภาพจริงระหว่างผนังไซโลและมวลข้าวเปลือก

2. <u>ปรากฏการณ์ความฝืดระหว่างมวลข้าวเปลือกและผนังไซโล</u>

ในกรณีนี้จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขสภาพพื้นผิวของมวลบรรจุ (Boundary Conditions) จะมีการเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างสภาพเงื่อนไขมีแรงเสียดทานกระทำที่ผิวและสภาพตรึงแน่นของผิวสัมผัส (Force to Displacement Boundary Conditions) กล่าวคือ ที่บริเวณผิวสัมผัสระหว่างผนังไซโลและมวลข้าวเปลือก ระยะเคลื่อนที่ในแนวรัศมีตั้งฉากกับผิวสัมผัส (s_n , Normal Displacement) ของผนังไซโลและมวลข้าวเปลือกย่อม

เท่ากัน ส่วนระยะเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสกับผิว, s_f และหน่วยแรงเฉือนจากความฝืด, σ_f จะขึ้นอยู่กับการตั้งสมมุติฐานการเกิดพฤติกรรมความฝืดระหว่างผิวสัมผัสซึ่งเขียนเป็นสภาพเงื่อนไขบนพื้นผิวได้ดังนี้

s_n และหน่วยแรงตั้งฉากกับผิวสัมผัส, σ_n, มีความต่อเนื่องระหว่างผิวสัมผัสเสมอ

σ_f และ s_f, ขึ้นกับสมมุติฐานการเกิดความฝืด

นั่นคือ $\sigma_f = 0$ เมื่อไม่มีความฝืด และ s_f มีสภาพต่อเนื่องระหว่างผิวสัมผัสสำหรับกรณีที่มีความฝืดเกิดขึ้นเต็มที่

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ประยุกต์สมมุติฐานของคูลอมบ์ (Coulomb Friction) สำหรับบรรยายพฤติกรรมการเกิดความฝืด นั่นคือ ระยะเคลื่อนที่ในแนวสัมผัสของไฟไนท์อีลิเมนต์ซึ่งใช้แทนมวลข้าวเปลือกจะเหมือนกับระยะเคลื่อนที่ของผนังไซโลที่สัมผัสกันอยู่ ตราบเท่าที่ขนาดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นกับไฟไนท์อีลิเมนต์ของมวลข้าวเปลือกที่คำนวยกว่าค่าของหน่วยแรงเฉือนในสมการที่ (3-11) นอกจากนี้ถ้าสมมุติว่าผนังไซโลมีความแข็งแรงในแนวดิ่งมากพอที่จะไม่เกิดการหรุดตัวอย่างเด่นชัด จะเขียนเป็นสภาพเงื่อนไขบนพื้นผิวได้ดังนี้

ก. $s_f = 0$ และต่อเนื่องระหว่างผิวสัมผัสเมื่อ $|\sigma_f| < \mu'_{static}\, \mathring{\sigma}_n$

ซึ่งจะเป็นสภาพเงื่อนไขชนิดซึ่งกำหนดให้ระยะเคลื่อนที่เป็นศูนย์

ข. เมื่อสภาพเงื่อนไขตามข้อ ก. สิ้นสุด อีลิเมนต์ของมวลข้าวเปลือกจะลื่นไหลเทียบกับผนังไซโล สภาพเงื่อนไขที่ผิวสัมผัสจะเปลี่ยนเป็นชนิดซึ่งกำหนดให้มีแรงเฉือนกระทำที่ผิวสัมผัสโดยมีขนาดเป็น

$$\sigma_f = \pm\, \mu'_{dynamic}\, \mathring{\sigma}_n \qquad (4\text{-}12)$$

เนื่องจากขนาดของหน่วยแรงฝืด σ_f ประมาณค่าได้ยากมาก เพราะเกี่ยวพันกับพารามิเตอร์อื่น ๆ งานวิจัยนี้จึงได้กำหนดให้ $\sigma_f = 0$ เมื่อไฟไนท์อีลิเมนต์ของมวลข้าวเปลือกนั้นมีการลื่นไถลตามสภาพเงื่อนไขข้อ ข.

สภาพเงื่อนไขทั้งหมดที่กล่าวมานี้สามารถเขียนระหัสคอมพิวเตอร์ได้โดยง่ายและเป็นหลักการในการบรรยายพฤติกรรมการเกิดความฝืดที่ผิวสัมผัสระหว่างผนังไซโลและมวลข้าวเปลือกสำหรับงานวิจัยนี้