

ทฤษฎีของความคลาดและการแกะรอยรังสี



1. ความคลาดของระบบทัศน

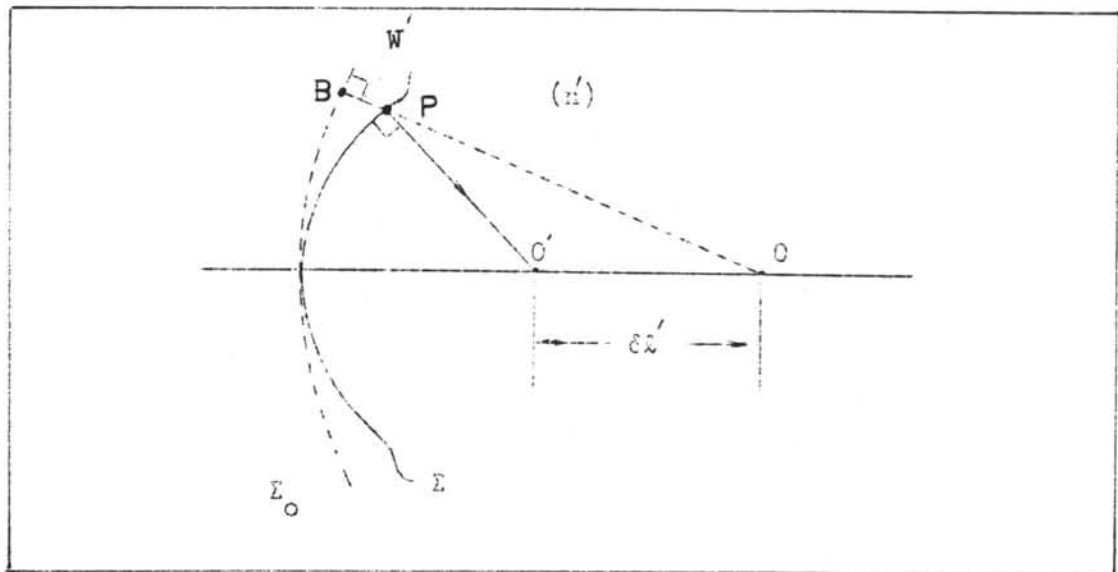
เมื่อแสงจากแหล่งกำเนิดที่เป็นจุดผ่านระบบทัศนแล้วให้ภาพเป็นจุด ภาพที่ได้มีชื่อว่าเป็นภาพที่ลุ่มบูรณ์ ระบบทัศนนั้นเป็นระบบที่ลุ่มบูรณ์ที่สุด แต่ในทางปฏิบัติแสงจากวัตถุที่เป็นจุดจะให้ภาพไม่เป็นจุด และแสงจากจุดต่าง ๆ ที่อยู่ในระยะนาบใดระยะนาบหนึ่งจะให้ภาพไม่อยู่ในระยะนาบเดียวกันหรือหน้าคลื่นไม่เป็นทรงกลม (ทั้งนี้ไม่คำนึงถึงการเลี้ยวเบนของคลื่นแสง) ภาพดังกล่าวเป็นภาพที่ไม่ลุ่มบูรณ์เนื่องจากระบบทัศนมีความบกพร่องที่เรียกว่า ความคลาด (aberration) ของระบบทัศน.

ในกรณีที่แสงขาวผ่านระบบทัศนแล้วแยกออกเป็นแสงสีต่าง ๆ ให้ภาพที่ตำแหน่งต่างกัน ระบบทัศนนั้นมีความคลาดรงค์ (13) (chromatic aberration) และถึงแม้ว่าจะใช้แสงสีเดียวผ่านระบบทัศน ภาพจากจุดวัตถุยังไม่เป็นจุดอีก กล่าวได้ว่า ระบบทัศนนั้นมีความคลาดเอกรงค์ หรือ มีความคลาดจากแสงสีเดียว (9) (monochromatic aberration) ความคลาดของระบบทัศนบอกได้ 2 แบบ คือ

1.1 ความคลาดเอียงรังสี (9) (ray aberration) เป็นความคลาดที่ได้จากการพิจารณารังสีก่อนและหลังผ่านระบบทัศน การหาค่าความคลาดใช้วิธีแกะรอยรังสี (ray tracing) โดยยึดเอาภาพที่ได้จากทัศนศาสตร์ใกล้แกน (paraxial optics) เป็นหลัก ถ้าวัดรังสีที่พิจารณาให้ภาพที่จุดภาพของทัศนศาสตร์ใกล้แกนถือว่าระบบนั้นไม่มีความคลาด แต่ถ้าให้ภาพเกินขอบเขตของทัศนศาสตร์ใกล้แกน ระบบนั้นมีความคลาด ขนาดของความคลาดคือระยะจากจุดภาพของทัศนศาสตร์ใกล้แกนถึงจุดภาพที่เกินขอบเขตของทัศนศาสตร์ใกล้แกน

1.2 ความคลาดเชิงหน้าคลื่น (9) (wavefront aberration) เป็นความคลาดที่ได้จากการพิจารณาหน้าคลื่นทั้งก่อนและหลังผ่านระบบทัศน โดยถือว่า ภาพที่ลุ่มบูรณ์ (ไม่มีความคลาด) หน้าคลื่นของภาพจะเป็นทรงกลมเรียกหน้าคลื่นของภาพที่ลุ่มบูรณ์ว่า หน้าคลื่นอ้างอิง (reference wavefront) หรือทรงกลมอ้างอิง (reference sphere) ขนาดของความคลาด

คือ ระยะระหว่างหน้าคลื่นอ้างอิงกับหน้าคลื่นจริง (1) แสดงความคลาดในทั้งสองแบบได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ความคลาดเชิงรังสี ( $\Delta L'$ ) และความคลาดเชิงหน้าคลื่น ( $W'$ )

ตามรูปที่ 2.1

$\Sigma_0$  และ  $\Sigma$  เป็นหน้าคลื่นอ้างอิงและหน้าคลื่นจริงตามลำดับ

$O$  และ  $O'$  เป็นตำแหน่งของจุดภาพที่สมบูรณ์แบบ และตำแหน่งของจุดภาพจากจุดหน้าคลื่นจริง ตามลำดับ

$\Delta L'$  เป็นความคลาดเชิงรังสี

$W'$  เป็นความคลาดเชิงหน้าคลื่น ( $W' = [BP]$ )

และ

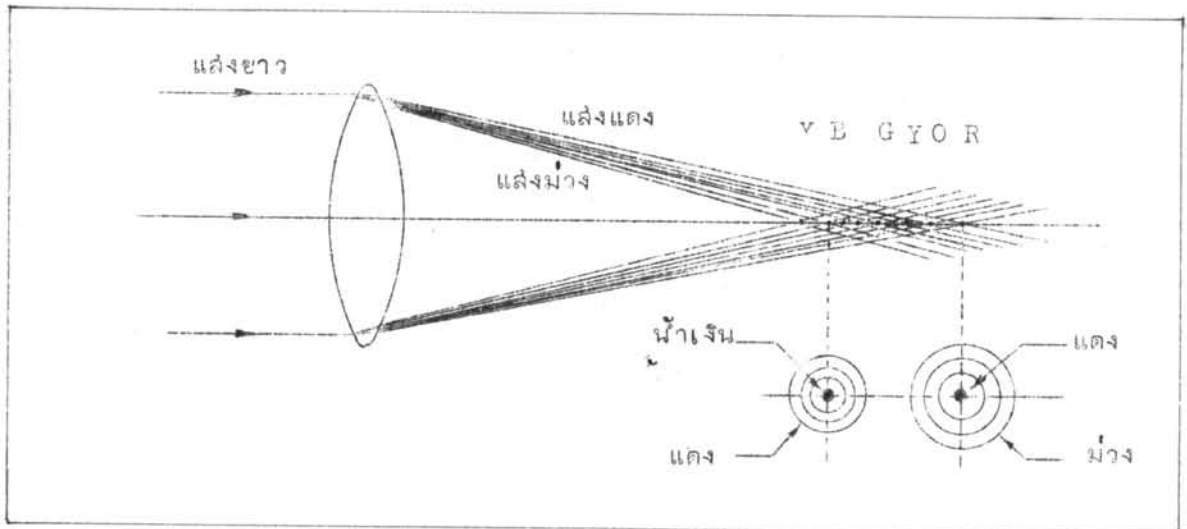
$[BP] = r'(BP)$  เมื่อ  $r'$  เป็นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางด้านภาพ

ในการพิจารณาความคลาดเชิงหน้าคลื่น ถ้าหน้าคลื่นจริงนำหน้าหน้าคลื่นอ้างอิงโดยคิดตามทิศของรังสีจริง ทำความคลาดเชิงหน้าคลื่นเป็นบวก ถ้าตรงกันข้ามกับที่กล่าว ค่าความคลาดจะเป็นลบ และสำหรับความคลาดเชิงรังสี ถ้าตำแหน่งจุดภาพจากหน้าคลื่นจริงอยู่ด้านซ้ายของจุดภาพที่สมบูรณ์แบบ ค่าความคลาดจะเป็นลบ ถ้าตรงกันข้ามกับที่กล่าว ค่าความคลาดจะเป็นบวก ค่าความคลาดเป็นบวกเรียกว่า ความคลาดแก้เกิน (overcorrected aberration) และ ค่าความคลาดเป็นลบ เรียกว่า ความคลาดแก้ขาด (undercorrected aberration) ตามรูปที่ 2.1

ฟ' เป็นบวก แต่  $\phi'$  เป็นลบ

## 2. ความคลาดตรงค้

เนื่องจากค่าดัชนีหักเหของตัวกลาง ขึ้นกับความยาวคลื่นแสงที่ผ่านตัวกลางนั้นตามสมการ (1.1) จะเห็นว่าถ้าความยาวคลื่นสั้นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางมีค่ามาก ถ้าความยาวคลื่นยาวค่าดัชนีหักเหของตัวกลางมีค่าน้อย เมื่อใช้กฎของสเนลล์ แสงแต่ละสีในสเปกตรัมจะให้ภาพที่แต่ละจุด ระยะระหว่างแสงสีแรกถึงสีสุดท้ายที่ได้จากระบบ เรียกว่า ความคลาดตรงค้ของระบบนั้น ในกรณีที่ให้แสงขาวจากจุดวัตถุที่ระยะอนันต์ผ่านเลนส์ แสงแต่ละสีจะไปโฟกัสที่แต่ละจุด ดังแสดงในรูปที่ 2.2 เมื่อพิจารณาภาพที่ตำแหน่งต่าง ๆ เช่น



รูปที่ 2.2 ความคลาดตรงค้

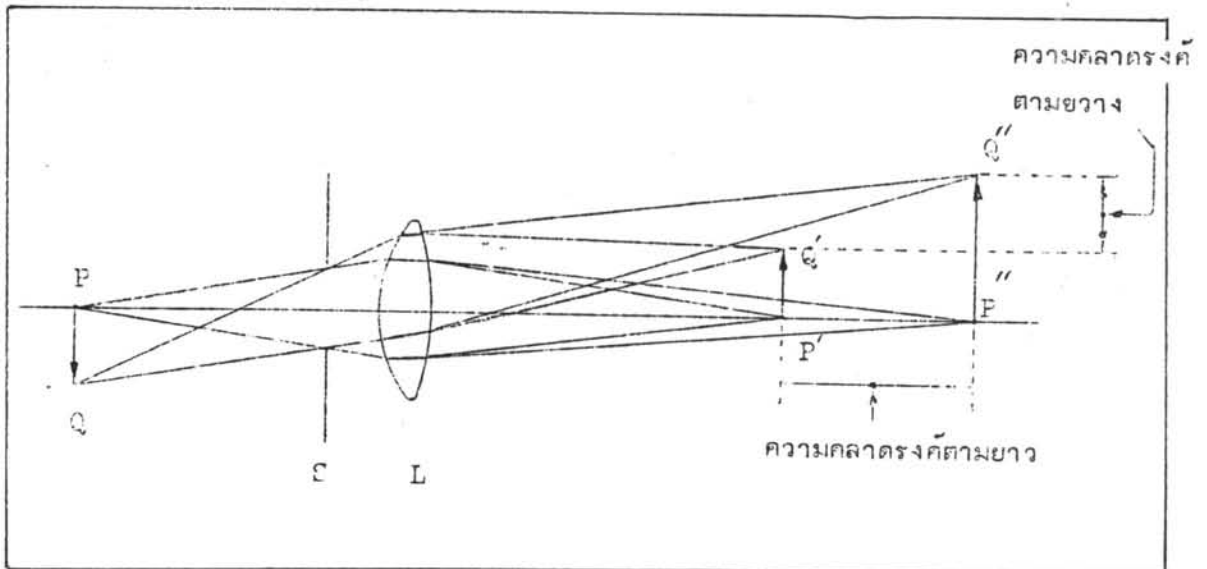
ตรงจุดภาพของแสงน้ำเงิน ภาพจะเป็นจุดน้ำเงินตรงกลางล้อมรอบด้วยวงแหวนสีต่าง ๆ โดยวงนอกสุดเป็นสีแดง และตรงจุดภาพของแสงแดง ภาพจะเป็นจุดแดงตรงกลางล้อมรอบด้วยวงแหวนสีต่าง ๆ โดยวงนอกสุดเป็นสีม่วง เป็นต้น ในทางปฏิบัติอาจสร้างเลนส์ให้จุดภาพของแสงน้ำเงินอยู่ด้านขวาของแสงแดงได้ ตามรูปที่ 2.2 จุดภาพของแสงน้ำเงินอยู่ด้านซ้ายของแสงแดง เรียกความคลาดตรงค้ นี้ว่า ความคลาดตรงค้แก้ขาด (undercorrected chromatic aberration)

ดังนั้น ค่าความคลาดตรงค้ตามรูปที่ 2.2 มีค่าเป็นลบ ความคลาดตรงค้แบ่งออกได้ 2 ชนิด คือ (7,13)

1. ความคลาดตรงค้ตามยาว (1) (longitudinal chromatic aberration)

เกิดจากจุดภาพของแสงสีต่าง ๆ ไปโฟกัสที่แต่ละจุดตามแนวแกนมุขยสำคัญ ดังรูปที่ 2.2 แสดงความคลาดตรงค้ตามยาว เนื่องจากตาของคนเราไว ต่อแสงที่มีความยาวคลื่นประมาณ 550 นาโนเมตรมากที่สุด ความไวต่อสีข้างเคียงจะค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งถึงปลายทั้งล่องของสเปกตรัมความไวของตาเหลืองน้อยที่สุดจะมีค่าประมาณ 10 เปอร์เซ็นต์ของค่าสูงสุด จุดที่มีความไวเป็น 10 เปอร์เซ็นต์ของค่าสูงสุดนี้ประมาณแล้วจะตรงกับแสงน้ำเงิน (F) และแสงแดง (C) ที่ได้จากหลอดไฮโดรเจน ดังนั้นค่าความคลาดตรงค้ตามยาวของเลนส์โดยทั่วไปหมายถึงระยะระหว่างตำแหน่งโฟกัสของแสงแดงกับแสงน้ำเงิน

2. ความคลาดตรงค้ตามขวาง (lateral chromatic aberration) เกิดจากขนาดของภาพของแสงสีต่าง ๆ ไม่เท่ากัน ผลต่างในขนาดของภาพของแสงน้ำเงินและของแสงแดง เป็นค่าความคลาดตรงค้ตามขวางความคลาดทั้งล่องชนิดดังกล่าวอาจแสดงได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ความคลาดตรงค้ตามยาวและตามขวาง

ตามรูปที่ 2.3 PQ เป็นวิถีให้กำเนิดแสงขาวผ่านตัวจำกัดแสง S ไปตกบนเลนส์ ให้ภาพ P'Q' โดยแสงน้ำเงิน และให้ภาพ P''Q'' โดยแสงแดงที่ตำแหน่งต่างกันตามแกนमुखยสำคัญ และขนาดของภาพก็ต่างกัน ดังนั้น ระยะ PP'' เป็นความคลาดตรงค้ตามยาว ระยะ P'Q' - P''Q'' เป็นความคลาดตรงค้ตามขวาง

2.1 ความคลาดตรงค้เชิงรังสี<sup>(1)</sup> พิจารณาระบบที่ค้ค่าล่ตรงที่ประกอบด้วยเลนส์บางที่ม้ค่าล่เป็น  $K_1, K_2, \dots, K_m$  และมีค่าล่รวมเป็น K จะเขียนได้เป็น

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_m$$

หรือ 
$$K = \sum_{i=1}^m K_i \dots\dots\dots(2.1)$$

โดยที่  $K_i = (n_i - 1)(C_{1i} - C_{2i})$   
 และ  $C_{1i} = 1/r_{1i}, C_{2i} = 1/r_{2i}$   
 ในเมื่อ  $n_i$  เป็นค่าดัชนีหักเหของเลนส์บางอันที่ i

$r_{1i}$  และ  $r_{2i}$  เป็นรัศมีความโค้งของผิวที่ 1 และของผิวที่ 2 ของเลนส์อันที่ i ตามลำดับ

$C_{1i}$  และ  $C_{2i}$  เป็นค่าความโค้งของผิวที่ 1 และของผิวที่ 2 ของเลนส์อันที่ i ตามลำดับ

ใช้  $\Sigma$  แทน  $\sum_{i=1}^m$ ,  $C_1$  แทน  $C_{1i}$ ,  $C_2$  แทน  $C_{2i}$  แทนค่า  $K_i$  ในล่สมการ (2.1)

ค่าล่รวมของเลนส์บางจะเป็น

$$K = \Sigma(n - 1)(C_1 - C_2)$$

ค่าดัชนีหักเหของตัวกลาง (n) ขึ้นกับความยาวคลื่นของแสงที่ใช้ ดังนั้น ค่าล่รวมของเลนส์ (K) จะขึ้นกับความยาวคลื่นของแสงด้วย ถ้า n ในล่สมการเป็นค่าดัชนีหักเหสำหรับแสงที่มีความยาวคลื่น  $\lambda$  สมมุติว่าสำหรับแสงที่มีความยาวคลื่น  $\lambda + \delta\lambda$  ค่าดัชนีหักเหของเลนส์จะเป็น  $n + \delta n$  จะหาค่าล่ของเลนส์ที่เปลี่ยนไป ( $\delta K$ ) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta k &= \delta\{\Sigma (n-1)(C_1 - C_2)\} \\ &= \Sigma \delta n \cdot (C_1 - C_2) \end{aligned}$$

หรือ 
$$\delta k = \Sigma \frac{\delta n}{n-1} \cdot K \dots\dots\dots(2.2)$$

แต่  $\frac{n-1}{\delta n}$  คือค่าวี (V - value) โดยที่ n เป็นค่าดัชนีหักเหของเลนส์สำหรับแสงเหลือง ( $n_D$ )  $\delta n$  เป็นผลต่างระหว่างค่าดัชนีหักเหของเลนส์สำหรับแสงน้ำเงิน ( $n_F$ ) และสำหรับแสงแดง ( $n_C$ ) สมการ (2.2) จะเขียนในเทอมของค่าวีได้เป็น

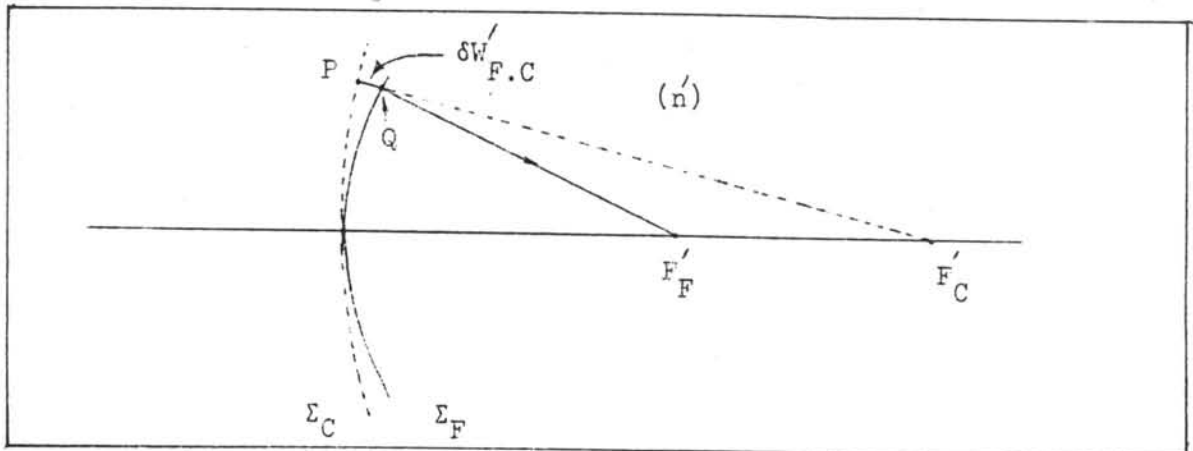
$$\delta K = \Sigma \frac{K}{V} \dots\dots\dots(2.3)$$

จากสมการ (2.3) ถ้าต้องการให้ความคลาดตรงค้ตามยาวเป็นศูนย์ ค่ากำลังที่เปลี่ยนไป ( $\delta k$ ) จะต้องเป็นศูนย์

2.2 ความคลาดตรงค้เชิงหน้าคลื่น

พิจารณาจากหน้าคลื่นของแสงน้ำเงิน ( $\Sigma_F$ ) และหน้าคลื่นของแสงแดง ( $\Sigma_C$ ) ที่ตำแหน่งลำแสงขาเข้าเล็กสุด (entrance pupil) หน้าคลื่นของแสงน้ำเงินและของแสงแดงจะเป็นทรงกลมมีจุดศูนย์กลางที่  $F'_F$  และ  $F'_C$  ตามลำดับ ดังรูปที่

2.4 ความคลาดตรงค้ในที่นี้คือ [PQ] เครื่องหมาย [ ] บอกลึงว่าเป็นระยะทางเชิง

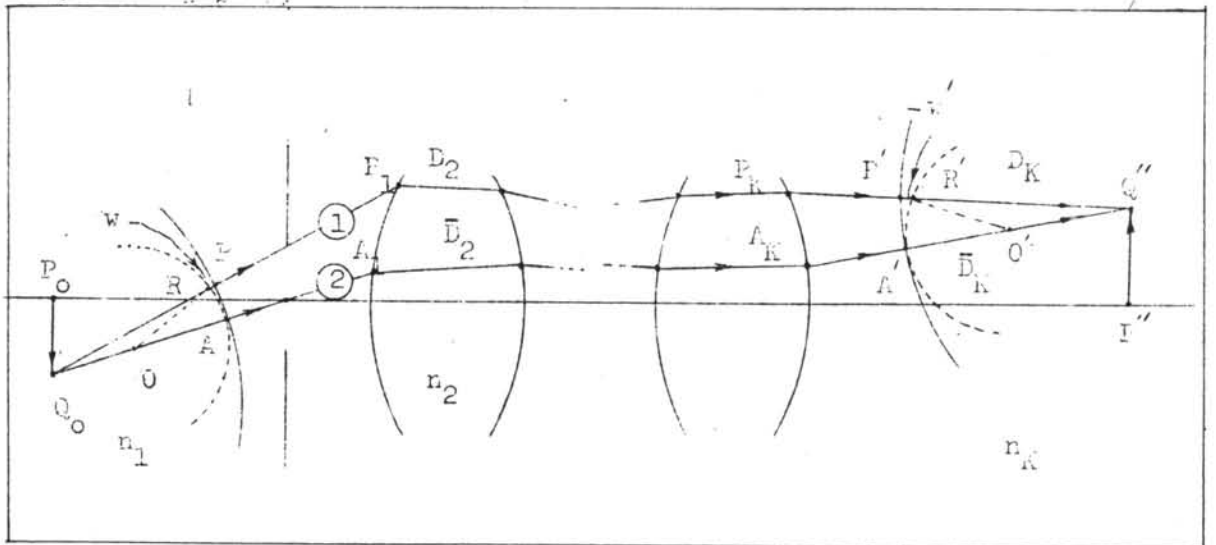


รูปที่ 2.4 ความคลาดตรงค้เชิงหน้าคลื่น

ทัศน ซึ่ง  $[PQ] = n'(PQ)$  เมื่อ  $n'$  เป็นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางที่หน้าคลื่นนั้นอยู่  
 ดังนั้นตามรูปที่ 2.4 ความคลาดตรงคือ

$$\delta W'_{F,C} = [PQ] = n'(PQ)$$

ในการหาความคลาดตรงเชิงหน้าคลื่นของระบบทัศน จะพิจารณาจากทางเดินของแสงที่มีความยาวคลื่นต่าง ๆ กันในระบบทัศนนั้น รูปที่ 2.5 เป็นระบบทัศนที่พิจารณา  $Q_0$  และ  $Q''$  เป็นจุดวัตถุและจุดภาพบนแนวรังสีมุขยสำคัญ  $O$  และ  $O'$  เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมอ้างอิง ด้านวัตถุและด้านภาพ  $w$  และ  $w'$  เป็นความคลาดเชิงหน้าคลื่นของรังสีตกและของรังสีหักเหเมื่อ



รูปที่ 2.5 รังสีผ่านระบบจากวัตถุไปยังภาพ

ผ่านระบบทัศนแล้ว ตามลำดับ ① เป็นเส้นทางหนึ่งของรังสีที่ออกจาก  $Q_0$  ไป  $Q''$  ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นรังสีใกล้แกน ระยะทางที่รังสี ① ผ่านตัวกลางเป็น  $D_1, D_2, \dots, D_K$  ในขณะที่ระยะทางที่รังสีมุขยสำคัญ (รังสี ②) เป็น  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_K$  ดังนั้นความยาวของทางเดินเชิงทัศนจาก  $Q_0$  ไป  $Q''$  ตามแนวรังสี ① คือ  $n_1 D_1 + n_2 D_2 + \dots + n_K D_K = \Sigma n D$  และเช่นกัน ตามแนวรังสี ② คือ  $n_1 \bar{D}_1 + n_2 \bar{D}_2 + \dots + n_K \bar{D}_K = \Sigma n \bar{D}$  นั่นคือ

$$[QR] + [RP] + [PP_1 \dots P_K P'] + [PR] + [RQ''] = \Sigma nD \dots (2.4)$$

$$[QA] + [AA_1 \dots A_K A'] + [AQ''] = \Sigma n\bar{D} \dots (2.5)$$

จากหลักของเฟอร์แมทได้ว่า  $[QR] = [QA]$  ,  $[PP_1 \dots P_K P'] = [AA_1 \dots A_K A']$  ,

และ  $[RQ''] = [AQ'']$  ดังนั้นสมการ (2.5) ลบด้วยสมการ (2.4) จะเป็น

$$- [RP] - [PR'] = \Sigma n\bar{D} - \Sigma nD$$

จากรูปที่ 2.5  $[RP] = w$  และ  $[PR'] = -w'$  ผลต่างของความยาวเชิงหักเหของแนวรังสีทั้งสองจะเป็น

$$W = w' - w = \Sigma (\bar{D} - D) \cdot n \dots (2.6)$$

ถ้า  $W$  เป็นบวกแสดงถึงแสงที่มาทาง ① ถึง  $Q$  ก่อนแสงที่มาทาง ② ถ้าเปลี่ยนความยาวคลื่นของแสงที่มาจาก  $Q_0$  ค่าดัชนีหักเหของตัวกลางจะเปลี่ยนไปจาก  $n_1$  เป็น  $n_1 + \delta n_1$ ,  $n_2$  เป็น  $n_2 + \delta n_2$ , ... และ  $n_K$  เป็น  $n_K + \delta n_K$  ระยะทางเชิงหักเหตามแนวรังสี ① จะเปลี่ยนจาก  $D_1$  เป็น  $D_1 + \delta D_1$ ,  $D_2$  เป็น  $D_2 + \delta D_2$ , ...,  $D_K$  เป็น  $D_K + \delta D_K$  และเช่นกันตามแนวรังสี ② จะเปลี่ยนจาก  $\bar{D}_1$  เป็น  $\bar{D}_1 + \delta \bar{D}_1$ ,  $\bar{D}_2$  เป็น  $\bar{D}_2 + \delta \bar{D}_2$ , ...,  $\bar{D}_K$  เป็น  $\bar{D}_K + \delta \bar{D}_K$  ดังนั้นค่า  $W$  ที่เพิ่มขึ้น จะหาได้จากการดิฟเฟอเรนเชียลของสมการ (2.6) จะได้

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \{ \Sigma (\bar{D} - D) \cdot n \} \\ &= \Sigma \{ \delta (\bar{D} - D) \cdot n \} \\ &= \Sigma \{ n \cdot \delta (\bar{D} - D) + (\bar{D} - D) \cdot \delta n \} \end{aligned}$$

หรือ 
$$\delta W = \Sigma \{ n \cdot \delta \bar{D} - n \cdot \delta D + (\bar{D} - D) \cdot \delta n \} \dots (2.7)$$



ตามหลักของเฟอร์แมท จะได้

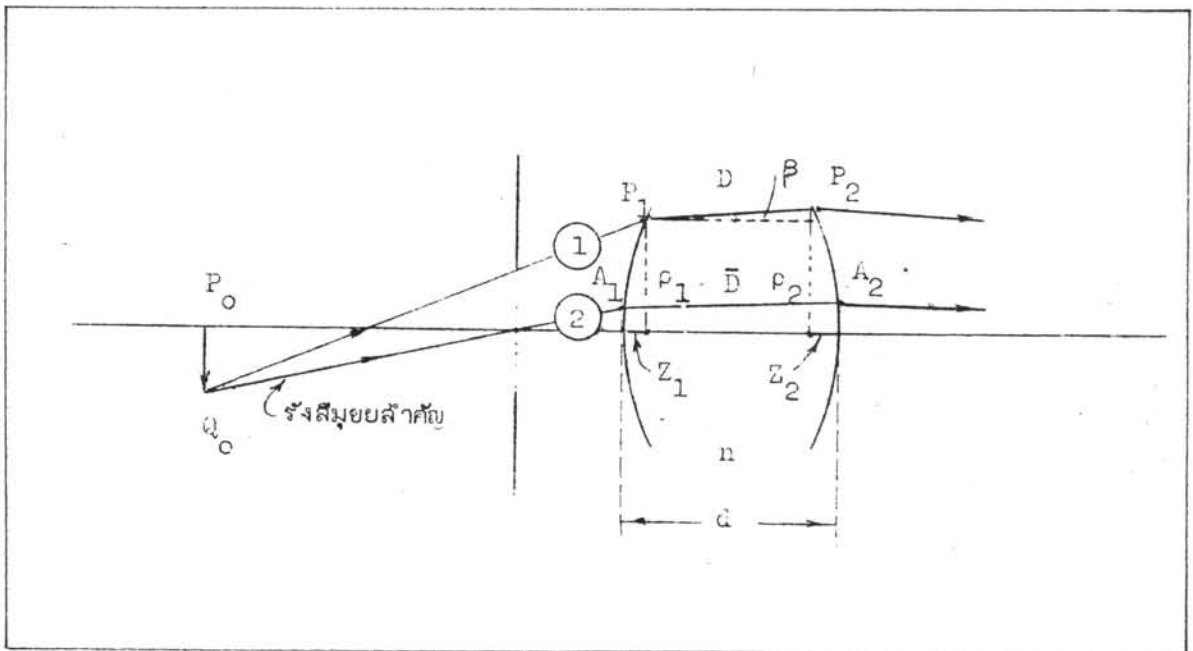
$$n \cdot \delta D = (D + \delta D) \cdot n - D \cdot n = 0$$

และ  $n \cdot \delta \bar{D} = (\bar{D} + \delta \bar{D}) \cdot n - \bar{D} \cdot n = 0$

ดังนั้นสมการ (2.7) จะเขียนได้เป็น

$$\delta W = \int (\bar{D} - D) \delta n \dots\dots\dots(2.8)$$

สมการ (2.6) ใช้หาความคลาดเอกรงค์ และสมการ (2.8) ใช้หาความคลาดตรงก็เพื่อความ  
 ลัดวกจะพิจารณาาระบบทัศนที่มีผิวโค้งทรงกลมสองผิว รัศมีความโค้งเป็น  $r_1$  และ  $r_2$  มี  
 ระยะระหว่างขั้วผิวเป็น  $d$  ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การหาความคลาดตรงก็เชิงหน้ากลืน

ถ้า  $Z_1$  และ  $Z_2$  มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ  $r_1$  และ  $r_2$  ตามลำดับ จะได้  $Z_1 = \frac{p_1^2}{2r_1}$  และ  $Z_2 = \frac{p_2^2}{2r_2}$  เช่นกัน ถ้ามุม  $\beta$  มีค่าน้อยค่า  $\cos \beta = 1$  ดังนั้นค่า  $D \cos \beta = D$

$$\text{และ } p_1 = p_2$$

$$D = d - (Z_1 + Z_2)$$

หรือคือ

$$D = d - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1^2}{r_1} - \frac{p_2^2}{r_2} \right)$$

$$D = d - \frac{p_1^2}{2} (C_1 - C_2)$$

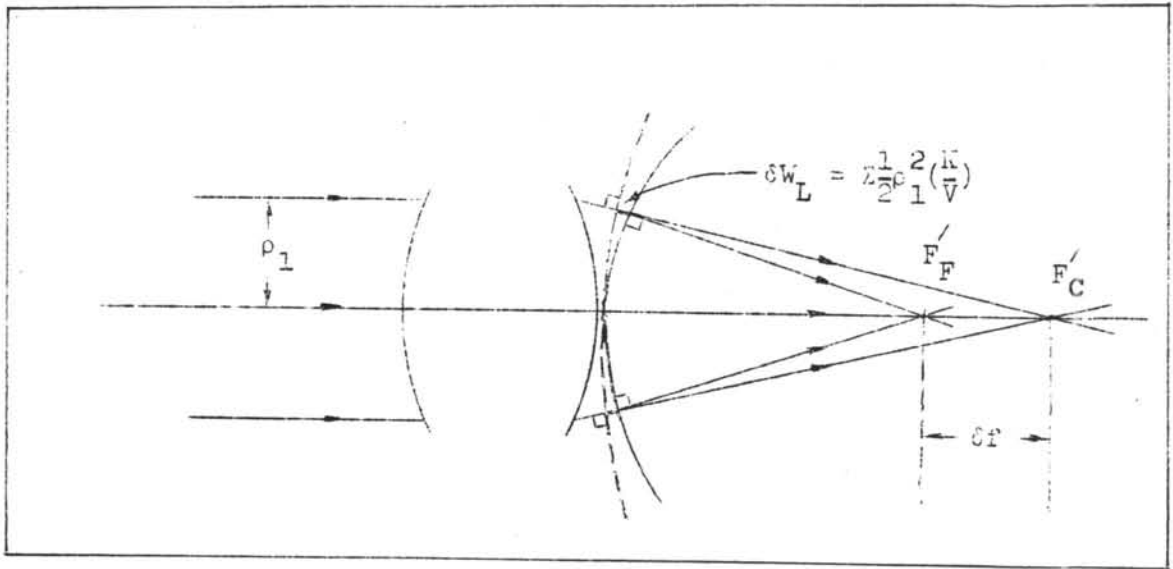
ในทำนองเดียวกัน เมื่อให้รังสี (2) ตกที่ผิวแรกสูงกว่าแกน  $\bar{p}_1$  จะได้

$$\bar{D} = d - \frac{\bar{p}_1^2}{2} (C_1 - C_2)$$

แทนค่า  $D$  และ  $\bar{D}$  ในสมการ (2.8) จะได้สัมภาระของความคลาดตรงคี่เชิงหน้าคลื่นเป็น

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum \left\{ \frac{1}{2} (r_1^2 - \bar{p}_1^2) (C_1 - C_2) \cdot \delta n \right\} \\ &= \sum \left\{ \frac{1}{2} (p_1^2 - \bar{p}_1^2) \cdot \frac{\delta n}{(n-1)} \cdot (n-1) (C_1 - C_2) \right\} \\ \delta W &= \sum \left\{ \frac{1}{2} (p_1^2 - \bar{p}_1^2) \frac{K}{V} \right\} \dots \dots \dots (2.9) \end{aligned}$$

สมการ (2.9) แสดงความคลาดตรงคี่เชิงหน้าคลื่นทั้งหมดของระบบที่ค้น ถ้ารังสีขนานตกกระทบผิวหน้าของระบบที่ค้น ถ้า  $\bar{p}_1$  เป็นศูนย์ จะได้  $\delta W = \sum \frac{1}{2} p_1^2 \left( \frac{K}{V} \right)$  ซึ่งเป็นความคลาดตรงคี่ตามยาวเชิงหน้าคลื่น ความแตกต่างของความคลาดตรงคี่เชิงหน้าคลื่นและความคลาดตรงคี่ตามยาวเชิงรังสี อาจแสดงได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ความผิดพลาดรังสีเชิงรังสีตามยาว ( $\delta f$ ) และเชิงหน้าคลื่นตามยาว ( $\delta W_L$ )

พิจารณารูปที่ 2.8 ให้  $h_p$  เป็นรัศมีของช่องเปิดของตัวจำกัดลำแสง รังสีขีดขอบของช่องเปิดไปตกบนผิวโค้งแรกสูง  $h$  จากรังสีมุมสำคัญ ถ้าให้รังสี (1) ผ่านช่องเปิดของตัวจำกัดลำแสงในลักษณะทำมุม  $\psi$  กับแนวแกน  $Z$  ห่างจากจุดศูนย์กลางของช่องเปิดเป็น  $p_1$  ไปตกบนผิวโค้งแรกที่  $P_1$  ถึง  $P_1$  ห่างจากแกนमुखสำคัญเป็น  $p_1$  รังสีมุมสำคัญ (รังสี (2)) ผ่านจุดศูนย์กลางช่องเปิด ตกบนผิวโค้งแรกที่  $A_1$  สูงกว่าแกน  $p_1$  ดังรูปที่ 2.8 เนื่องจากสามเหลี่ยม  $Q_1 E F$  คล้ายสามเหลี่ยม  $Q_1^A P_1$  และสามเหลี่ยม  $Q_1 E N$  คล้ายสามเหลี่ยม  $Q_1^A M$  จะได้

$$\frac{Q_1^A P_1}{Q_1 E} = \frac{p_1}{p_p} = \frac{h}{h_p}$$



$$\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2 = n^2 r^2 + 2n\bar{h}r\cos\theta \dots\dots\dots(2.13)$$

แทนสมการ (2.13) ใน (2.9) สมการความคลาดตรงค้เชิงหน้าคลื่น คือ

$$\delta W = \Sigma \left\{ \frac{n^2 K}{2V} \cdot r^2 + \frac{n\bar{h} K}{V} \theta r \cos\theta \right\} \dots\dots(2.14)$$

หรือ

$$\delta W = \Sigma \left\{ (\delta W_L) r^2 + (\delta W_T) \theta r \cos\theta \right\} \dots\dots(2.15)$$

สมการ (2.14) แสดงถึงความคลาดตรงค้เชิงหน้าคลื่นทั้งหมด ของระบบทัศนที่พิจารณา

โดย  $(\delta W_L) r^2$  เป็นความคลาดตรงค้ตามยาวเชิงหน้าคลื่น และ  $(\delta W_T) \theta r \cos\theta$  เป็นความคลาดตรงค้ตามขวางเชิงหน้าคลื่น

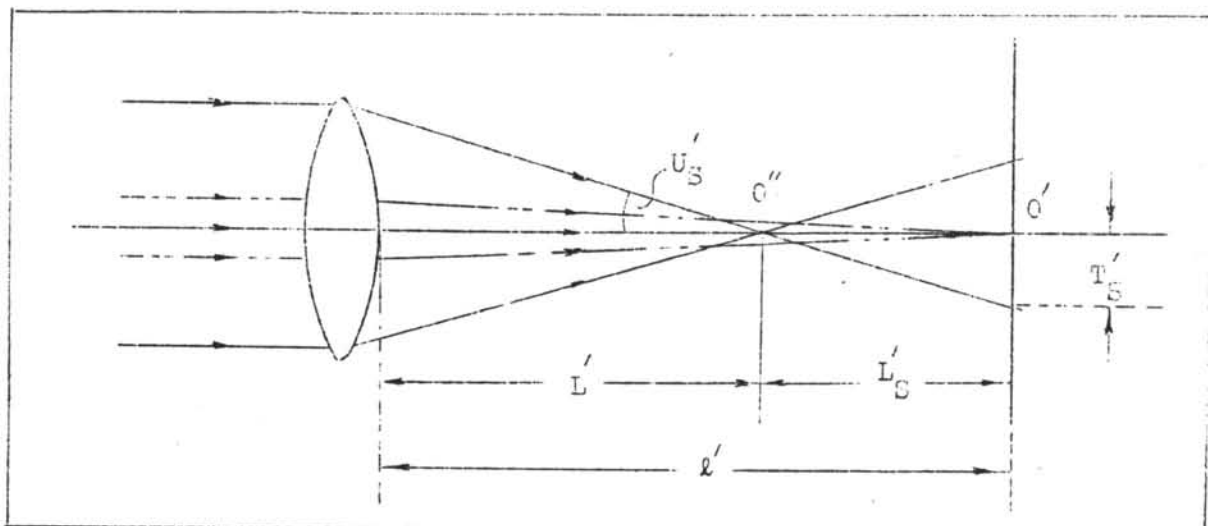
### 3. ความคลาดเอกรงค์ <sup>(1,9,13)</sup>

ในหัวข้อที่ 2 ได้พิจารณาถึงระบบทัศนที่ไ้กับแสงขาว ความคลาดที่เกิดขึ้นเนื่องจากการกระจายแสงของระบบที่ร้ต่อแสงแต่ละสีในแสงขาวไม่เท่ากัน แต่ถึงแม้จะใช่แสงสีเดียวผ่านระบบก็พบว่า ระบบทัศนนั้นยังไ้ความคลาดอื่น ๆ อีกมาก เรียกความคลาดเหล่านี้ว่า ความคลาดเอกรงค์ หรือความคลาดจากแสงสีเดียว หรือความคลาดไซเดิล (seidel aberration) หรือ ความคลาดปฐมภูมิ (primary aberration) ซึ่งได้แก่ ความคลาดทรงกลม, โคม่า, ความคลาดเอียง (astigmatism), ความโค้งของสนาม (field curvature) และ ความบิดเบี้ยว (distortion) จะได้กล่าวถึงความคลาดเหล่านี้ทีละอย่าง และพิจารณาถึงภาพที่ไ้เนื่องจากความคลาดแต่ละอย่างนั้นโดยคิดว่าระบบทัศนไ้มีความคลาดอย่างอื่นนอกจากความคลาดที่กล่าวถึงเท่านั้น

#### 3.1 ความคลาดเอกรงค์เชิงรังสี

3.1.1 ความคลาดทรงกลม เกิดจากการเป็นผิวโค้งรูปทรงกลมของผิวเลนส์ ทำให้รังสีที่ผ่านเลนส์ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ไม่ไปรวมที่จุดเดียวกัน ถ้รังสีที่ผ่านเลนส์ไปรวมที่จุดเดียวกันทั้งหมด เลนส์นั้นไ้มีความคลาดทรงกลม แต่โดยปกติรังสีใกล้แกนและรังสีตกที่ขอบของเลนส์

จะโปรแกรมที่ตำแหน่งต่างกัน ผลต่างของทางยาวโฟกัสของภาพดังกล่าว เป็นค่าความคลาดทรงกลม และแบ่งได้ 2 แบบ คือ ความคลาดทรงกลมตามยาว กับความคลาดทรงกลมตามขวาง แสดงดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ความคลาดทรงกลมเชิงรังสี

ตามรูปที่ 2.9

$O'$  และ  $O''$  เป็นจุดโฟกัสของรังสีใกล้แกนและรังสีตกที่ยอบของเลนส์ตามลำดับ

$L'_S$  เป็นความคลาดทรงกลมตามยาว

$T'_S$  เป็นความคลาดทรงกลมตามขวาง

ค่าความคลาดหาได้โดยวิธีแกะรอยรังสีจากวัตถุโดยใช้ทั้งรังสีใกล้แกน และรังสีใกล้แกน मुख्यสำคัญ เพื่อจะหาจุดตัดของรังสีนั้นกับแกน मुख्यสำคัญ ลมมุติว่าจุดตัดเป็นดังรูปที่ 2.9 ดังนั้นค่าความคลาดทรงกลมตามยาว คือ

$$L'_S = l' - L'$$

และค่าความคลาดทรงกลมตามขวาง คือ

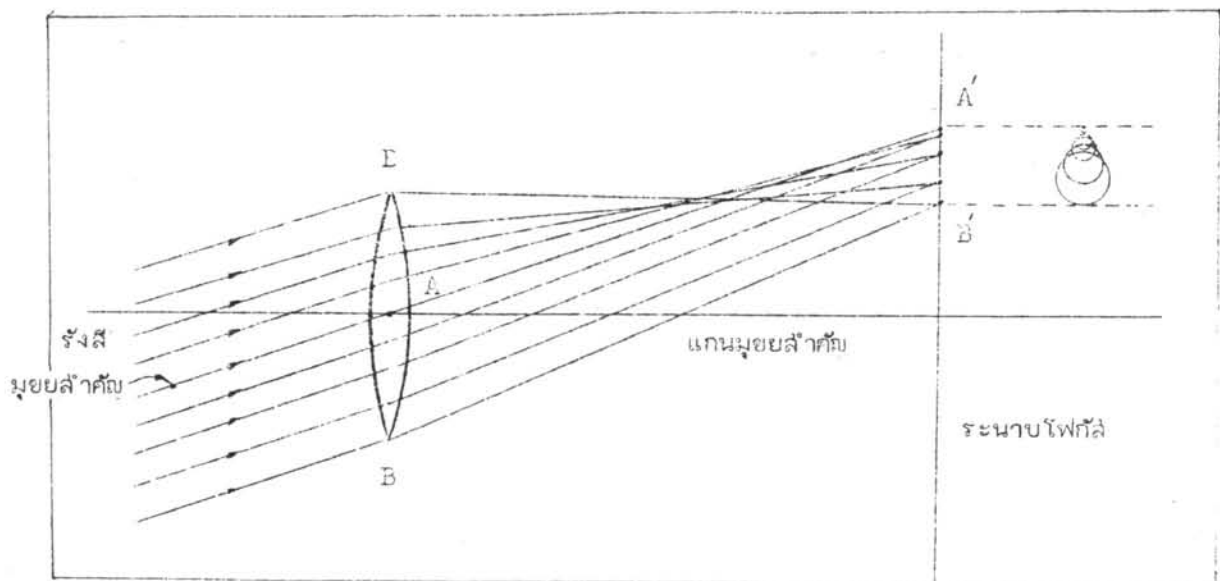
$$T'_S = L'_S \tan U'_S$$

หรือ 
$$U'_S = (l' - L') \tan U'_S$$

ค่าความคลาดทั้ง 2 แบบนี้ มีเครื่องหมายเป็นลบ (ใช้จุด 0' เป็นหลัก ระยะที่อยู่ด้านซ้ายของ 0' จะเป็นลบ) โดยปกติเลนส์รวมแสง (เลนส์นูน) จะให้ความคลาดทรงกลมแก่ขีด เลนส์กระจายแสง (เลนส์เว้า) จะให้ความคลาดทรงกลมแก่เกิน ภาพที่ได้จากเลนส์ที่มีความคลาดทรงกลมจะเป็นจุดสว่างตรงกลางล้อมรอบด้วยวงแหวนสว่าง ทั้งนี้วัตถุนั้นเป็นจุด

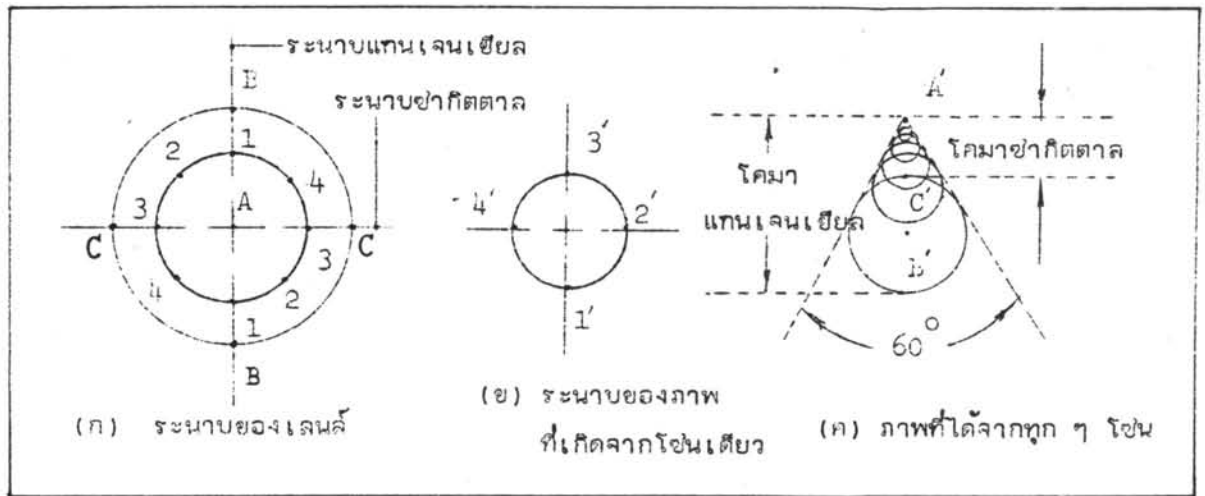
ถ้าหน้ารับแสงและทางยาวโฟกัสของเลนส์มีค่าคงที่ ค่าความคลาดทรงกลมจะขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุและรูปร่างของเลนส์ ซึ่งหมายถึงรัศมีความโค้งของผิวเลนส์ ในการออกแบบรูปร่างของเลนส์จึงใช้วิธีเปลี่ยนรูปร่างของเลนส์ซึ่งเรียกว่า การโค้งเลนส์ (bending) เพื่อให้เหลือความคลาดทรงกลมน้อยที่สุด ในกรณีที่มีเลนส์ทั้งสองอยู่แล้ว ค่าความคลาดทรงกลมสามารถทำให้ลดน้อยลงไปได้โดยใช้ตัวจำกัดแสงกันให้แสงผ่านบริเวณใกล้แกนเท่านั้น

3.1.2 โคมา เกิดขึ้นเมื่อวัตถุอยู่นอกแกนमुखยสำคัญของระบบทัศน โดยที่ระบบนั้นมีการขยายเปลี่ยนไปตามขนาดของช่องเปิดรับแสงซึ่งก็หมายความว่า แต่ละโซนของเลนส์มีกำลังขยายไม่เท่ากัน แสดงโคมาได้ดังรูปที่ 2.10 เลนส์ที่มีโคมา จะทำให้ภาพที่เกิดจากจุดวัตถุไม่เป็นจุด ถ้าพิจารณาที่ระนาบของเลนส์และระนาบของภาพ จะได้ดังรูปที่ 2.11 รังสีใน



รูปที่ 2.10 โคมา

ระนาบแทนเจนเชียลตกบนโขนตรง เลข 1 ในรูปที่ 2.11(ก) ผ่านเลนส์ไปเกิดภาพตรง เลข 1' ในรูปที่ 2.11(ข) รังสีในระนาบซีกิตตาดตกบนโขนตรง เลข 3 ในรูปที่ 2.11(ก) ผ่านเลนส์ไปเกิดภาพตรง เลข 3' ในรูปที่ 2.11(ข) รังสีบิด เช่น รังสีตกบนโขนตรง เลข 4 และเลข 2 ในรูป 2.11(ก) จะไปเกิดภาพตรง เลข 4' และเลข 2' ในรูปที่ 2.11 (ข) ตามลำดับ เมื่อคิดรังสีตกบนทุก ๆ ส่วนของโขนหนึ่ง ๆ ก็จะได้ภาพเป็นรูปวงกลม ถ้าคิดจากเลข 1 ไป 2 ไป 3 ในรูปที่ 2.11(ก) เปรียบเทียบกับในรูปที่ 2.11(ข) จะเห็นว่า ในขณะที่รังสีตก 1/4 ของโขน จะได้ภาพ 1/2 ของโขน ดังนั้น 1 รอบในระนาบของเลนส์จะเป็น 2 รอบในระนาบของภาพ เมื่อ



รูปที่ 2.11 การเกิดโคมา

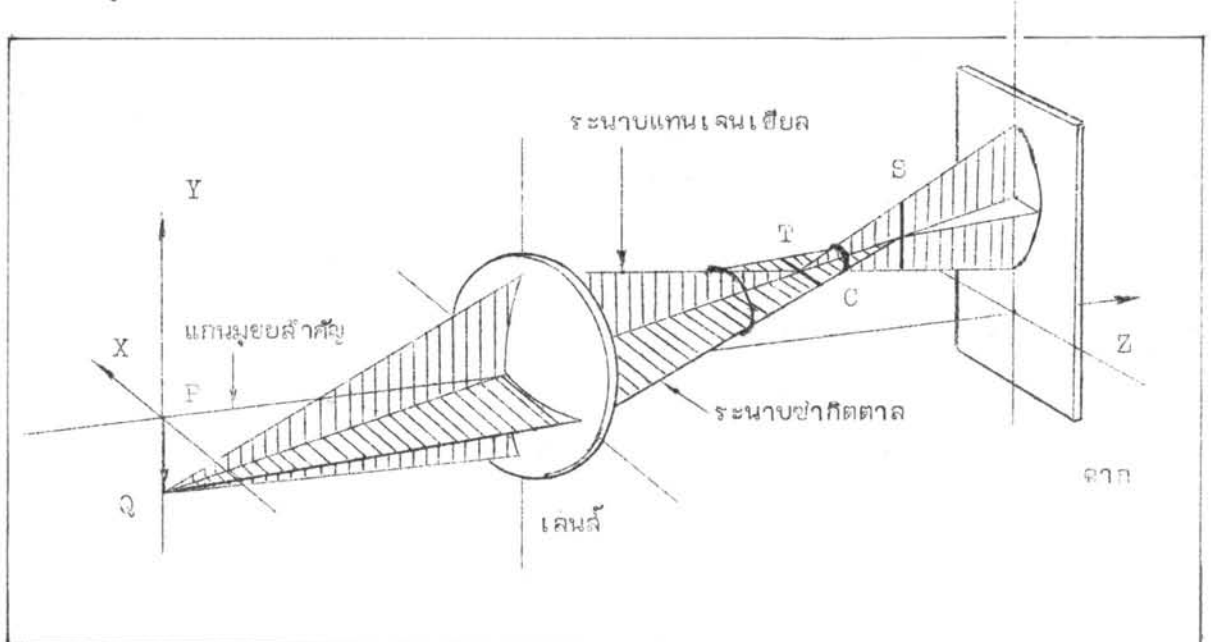
คิดทุก ๆ โขนจะได้ภาพดังรูปที่ 2.11(ค) ผลที่ได้คือ จุด A' จะเป็นจุดสว่างมากแล้วค่อย ๆ จางลงทางด้านล่าง ลักษณะภาพทั้งหมดคล้ายดาวหาง (comet - shape figure) ซึ่งเป็นที่มาของชื่อความคลาดชนิดนี้ว่า โคมา (13)

ภาพที่ปรากฏเช่นนั้นเนื่องจากแต่ละโขนของเลนส์มีกำลังขยายไม่เท่ากัน (7) ถ้ากำลังขยายนับจากจุดกลางเลนส์ออกไปสู่ขอบเลนส์มากขึ้นเรื่อย ๆ จะให้ค่าโคมาเป็นบวก แต่ถ้ากลับกันก็จะให้ค่าโคมาเป็นลบ ตามรูปที่ 2.11 (ค) เป็นภาพของจุดวัตถุจากเลนส์ที่มีค่าโคมาเป็นลบ ประมาณ 55% ของพลังงานทั้งหมดของโคมาจะไปรวมกันอยู่บริเวณสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ระหว่าง A' กับ C' ดังนั้นสิ่งยี่ระบะ AC' บอกขนาดยังผลของโคมาซึ่งเรียกว่า โคมาซีกิตตาด (sagittal coma) มีขนาดเป็น 1/3 ของโคมาแทนเจนเชียล (tangential coma) ดังนั้นรัศมีวงใหญ่สุด



ของภาพจึงเป็น  $1/3$  ของโคมาแทนเจนเซียม ค่าโคมาขึ้นอยู่กับรูปร่างของเลนส์, ตำแหน่งของวัตถุ และขนาดของช่องเปิดแสง ซึ่งแก้โคมาโดยวิธีโค้ง เลนส์พร้อมทั้งลดขนาด, ตำแหน่งของวัตถุ และขนาดของช่องเปิดให้เหมาะสม (13)

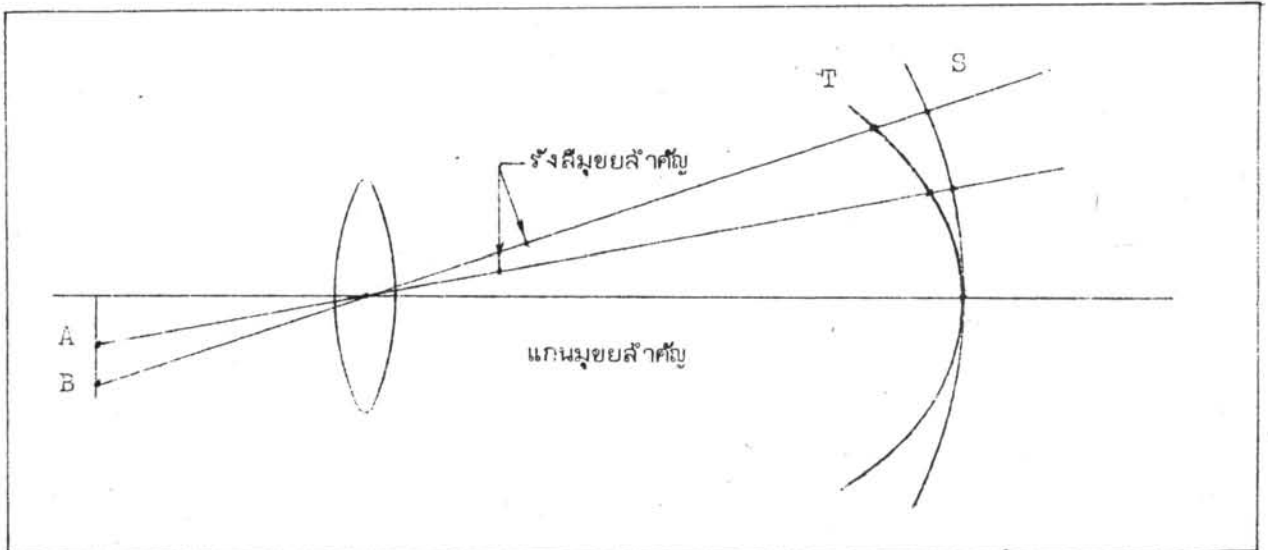
3.1.3 ความคลาดเอียง เกิดจากกำลังของเลนส์ในระนาบต่าง ๆ ไม่เท่ากัน ภาพจะชัดเฉพาะในระนาบใดระนาบหนึ่งเท่านั้น กล่าวคือ ถ้าภาพในระนาบแทนเจนเซียมชัด ภาพในระนาบซ้ากิตตลจะพร่ามัว และในทางกลับกัน หรือกล่าวได้ว่า ภาพจากรังสีในระนาบแทนเจนเซียมและในระนาบซ้ากิตตลไม่อยู่ที่เดียวกัน ในกรณีที่เลนส์พลาใช้ได้มักจะไม่มีความคลาดเอียง เมื่อจุดวัตถุอยู่บนแกนमुखสำคัญ ความคลาดเอียงให้ภาพกระจายเรียงกันในแนวแกนमुखสำคัญ (13) และในชุดของภาพที่เกิดจากเลนส์มีความคลาดเอียง จะมีภาพเป็นเส้นตรง 2 เส้นอยู่ที่ตำแหน่งต่างกัน เส้นหนึ่งเรียกว่า เส้นซ้ากิตตล (เขียนแทนด้วยอักษร S) เพราะเกิดจากรังสีของจุดวัตถุผ่านระนาบซ้ากิตตล เมื่อเอาจากไปปรับภาพตรงบริเวณนั้นจะเห็นเส้นซ้ากิตตลอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบซ้ากิตตล และอีกเส้นหนึ่งเรียกว่า เส้นแทนเจนเซียม (เขียนแทนด้วยอักษร T) เพราะเกิดจากรังสีของจุดวัตถุผ่านระนาบแทนเจนเซียม ภาพที่ได้จะเป็นเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบแทนเจนเซียมของเลนส์ ดังแสดงในรูปที่ 2.12 ระยะระหว่างเส้น T กับ S เป็นค่าความคลาดเอียงเชิงรังสี ภาพที่อยู่



รูปที่ 2.12 การเกิดความคลาดเอียง

ระหว่างเส้นทั้งสองนี้จะเป็นรูปวงรี (ellipse) เกือบทั้งหมด ยกเว้นบริเวณเดียวที่มีภาพเป็นวงกลม เรียกว่าภาพที่เป็นวงกลมนี้ว่า วงกลมที่สับสนน้อยที่สุด (circle of least confusion) ใช้แทนด้วยอักษร C ถ้าดูภาพตั้งแต่เส้นซีกตลาลไปทางเส้นแทนเจนเชียล จะเป็นรูปวงรีตั้งแล้วค่อย ๆ ป่อง ออกจนกลายเป็นวงกลม เมื่อเลยวงกลมจะเป็นรูปวงรีนอนแล้วค่อย ๆ แบนลงจนกลายเป็นเส้นแทนเจนเชียล

ความคลาดเฮียงมีมากหรือน้อยขึ้นกับรูปร่างของเลนส์, ระยะทางจากเลนส์ถึงตัวจำกัดแสง และระยะที่วัตถุห่างจากแกนमुखยสำคัญ ถ้าวัตถุไกลออกไปจากแกนमुखยสำคัญ ก็จะทำให้ค่าความคลาดเฮียงมากขึ้น เมื่อพิจารณาจุดวัตถุที่ระยะต่าง ๆ ในแนวเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนमुखยสำคัญ จะพบว่า โลกัล์ของจุดภาพ T และ S เป็นเส้นโค้งรูปพาราโบลา แสดงดังรูปที่ 2.13 ถ้าวัตถุมีขนาดจะได้ผิว



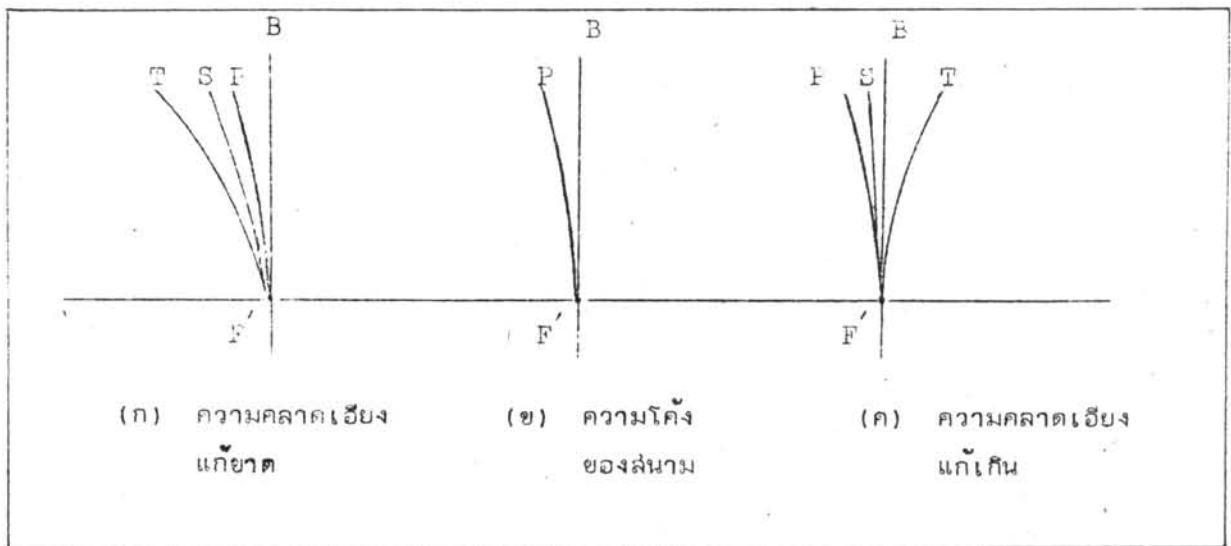
รูปที่ 2.13 โลกัล์ของ T และ S

ของภาพโค้งเป็นรูป พาราโบลา การแก้ไขความคลาดเฮียงทำได้โดยเปลี่ยนรูปร่างของเลนส์ หรือวางตัวจำกัดแสงในตำแหน่งที่เหมาะสมจะทำให้ความคลาดชนิดนี้ลดลงได้

3.1.4 ความโค้งของสนาม ในระบบทัศนใด ๆ ถ้าสามารถทำให้ค่าความคลาดทั้ง 3 ที่กล่าวข้างต้นเป็นศูนย์ได้ จุดวัตถุจะให้ภาพเป็นจุด แต่ภาพของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนจะเป็นรูปโค้ง กล่าวได้ว่า ระบบทัศนมีความโค้งของสนาม<sup>(7)</sup> ซึ่งเป็นความคลาดที่ขึ้นกับค่า  $\theta$

หักเหและรัศมีมีความโค้งของผิวหน้าของระบบทัศนนั้น ลักษณะภาพของระบบที่ตั้งได้ฉากกับแกน  
 มุขยสำคัญ จะเป็นผิวโค้งรูปพาราโบลอย เรียกว่า ผิวเพชชีวาล<sup>(7)</sup> (Petzval surface)  
 ถ้ากำลังและค่าดัชนีหักเหของระบบทัศน คงที่ รูปร่างของผิวเพชชีวาลจะไม่เปลี่ยนแปลง และ  
 ยังไม่มีวิธีใดจะกำจัดผิวเพชชีวาลได้

ถ้าระบบทัศนไม่มีความคลาดเอียง ผิวโค้งแทนเจนเชียลกับผิวโค้ง ฆ่ากิตตลจะอยู่  
 ที่เดียวกัน และอยู่ที่ผิวโค้งเพชชีวาล ถ้าระบบทัศนมีความคลาดเอียงระยะของผิวโค้งแทน  
 เจนเชียลต่อผิวโค้งฆ่ากิตตลจากผิวโค้งเพชชีวาลจะเป็นอัตราส่วน 3 ต่อ 1 เล่มอ



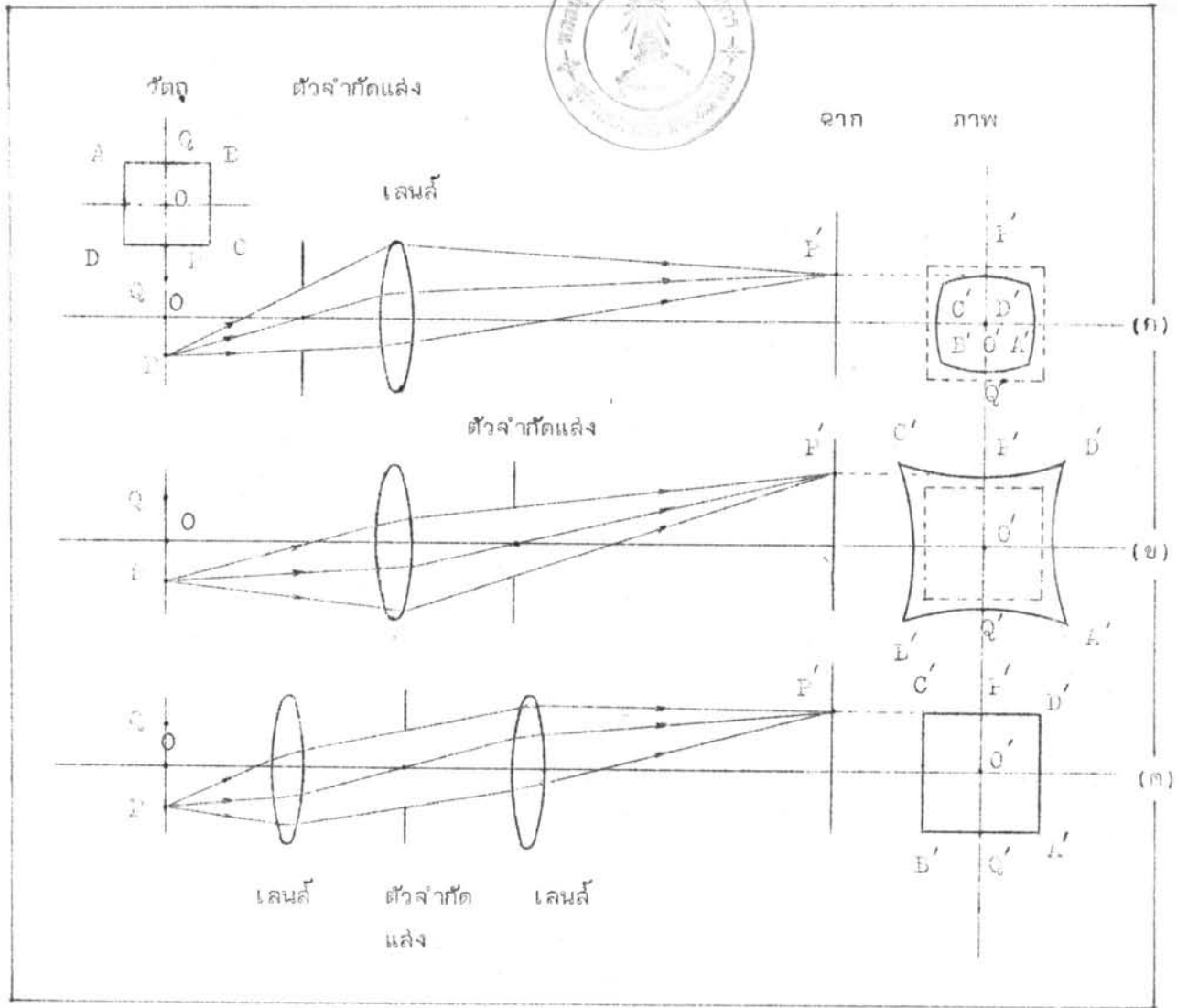
รูปที่ 2.14 ความคลาดเอียงและความโค้งของสนาม

รูปที่ 2.14 แสดงความคลาดเอียงในลักษณะต่าง ๆ และความโค้งของสนามของระบบทัศน  
 ที่มีกำลังและค่าดัชนีหักเหคงที่ เส้นเพชชีวาลจึงไม่เปลี่ยนแปลงและกำหนดให้

- B เป็นผิวของภาพในจุดมคต
- P เป็นผิวเพชชีวาล
- E เป็นผิวภาพ ฆ่ากิตตล
- T เป็นผิวภาพแทนเจนเชียล
- F' เป็นจุดโฟกัส (หรือจุดภาพ) บนแกนมุขยสำคัญ

รูปที่ 2.14 (ก) และ 2.14 (ค) แสดงถึงระบบที่คั่นมีความคลาดเอียงซึ่งทำให้ T, S และ P ไม่อยู่ที่เดียวกัน รูปที่ 2.14 (ก) T และ S อยู่ด้านซ้ายของ P ระบบมีความคลาดเอียงแก้อัด (ค่าความคลาดเป็นลบ) รูปที่ 2.14 (ค) T และ S อยู่ด้านขวาของ P ระบบมีความคลาดเอียงแก่เกิน (ค่าความคลาดเป็นบวก) ทั้งในรูป 2.14 (ก) และ 2.14 (ค) ระยะ  $PT : PS$  ต้องเป็น 3 : 1 เสมอ สำหรับรูป 2.14 (ข) แสดงถึงระบบที่คั่นไม่มีความคลาดเอียง จะทำให้ T, S และ P อยู่ที่เดียวกัน (10) เลนส์นูนจะให้ผิวเพทซ์วาลดังรูปที่ 2.14 (ข) เลนส์เว้าจะให้ตรงกันข้าม ดังนั้นการกำจัดความคลาดเอียง มักนิยมใช้เลนส์นูนประกบกับเลนส์เว้า โดยออกแบบรูปร่างของเลนส์ให้เหมาะสม และใช้ตัวจำกัดแสงช่วย

3.1.5 ความบิดเบี้ยว ความคลาดทรงกลม, โคมา และความคลาดเอียง เป็นความคลาดที่เกิดจากเลนส์ให้ภาพของจุดวัตถุไม่เป็นจุด แต่สำหรับความบิดเบี้ยว เป็นความคลาดที่เกิดจากเลนส์มีกำลังขยายไม่เท่ากัน เมื่อวัตถุอยู่ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในระนาบของวัตถุ หรือ กำลังขยายของระบบนั้นมีค่าไม่คงที่ (13) ถ้ากำลังขยายเพิ่มขึ้นในขณะที่รังสีตกสูงกว่าแกนมากขึ้น จะให้ความบิดเบี้ยวแบบรูปหมอนปักเข็ม (pin - cushion distortion) เป็นความบิดเบี้ยวแก่เกิน (ค่าความคลาดเป็นบวก) ถ้ากำลังขยายลดลงในขณะที่รังสีตกสูงกว่าแกนมากขึ้น จะให้ความบิดเบี้ยวแบบรูปถัง (barrel distortion) ซึ่งเป็นความบิดเบี้ยวแก้อัด (15) (ค่าความคลาดเป็นลบ) แสดงความบิดเบี้ยว ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 การเกิดความบิดเบี้ยว

รูป (ก) แสดงความบิดเบี้ยวแก้อาต

รูป (ข) แสดงความบิดเบี้ยวแก้อิน

รูป (ค) แสดงการแก้ไขความบิดเบี้ยว

โดยใช้ตัวจำกัดแสงวางที่กลางระหว่างเลนส์นูนที่เหมือนกัน 2 อัน

สำหรับเส้นประในรูปที่ 2.15 (ก) และ 2.15 (ข) เป็นภาพที่ได้โดยสมมุติว่าเลนส์มีกำลังขยายคงที่ จะเรียกว่า ภาพในอุดมคติ ขนาดของความบิดเบี้ยวจะเป็นปฏิภาคกับกำลังสามของความสูงของภาพ หรือถ้าคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ก็จะเป็นปฏิภาคกับกำลังสองของความสูงของภาพ ซึ่งวัดจากแกนमुखยสำคัญของระบบทัศนียภาพถึงจุดภาพที่พิจารณา ดังนั้น ถ้าย่านของวัตถุใหญ่ขึ้นก็จะทำให้มีความบิดเบี้ยวมากขึ้น การแก้ไขความบิดเบี้ยวในกรณีที่ระบบเป็นเลนส์เดี่ยว อาจทำได้โดยจัดให้ตัวจำกัดแสงยึดกับเลนส์ แต่ถ้าเป็นเลนส์หลาย ๆ อัน เช่น เลนส์นูนที่เหมือนกัน 2 อัน มักจะวางตัวจำกัดแสงที่กึ่งกลางระหว่างเลนส์ทั้งสองนั้น ดังรูปที่ 2.15 (ค)

สรุปแล้ว (7) การแก้ไขความคลาดของระบบทัศนียภาพขึ้นกับความต้องการจะแก้ไขความคลาดชนิดไหน เช่น ความคลาดทรงกลม, โคม่า และความคลาดรงค์ แก้ไขโดยใช้เลนส์ 2 อันที่ออกแบบรูปร่างอย่างเหมาะสมมาประกบกัน ความคลาดเอียงและความโค้งของสนามแก้ไขโดยจัดเลนส์เป็นชุด ๆ วางให้แต่ละชุดอยู่ในตำแหน่งพอเหมาะ สำหรับความบิดเบี้ยวแก้ไขด้วยการวางตัวจำกัดแสงในตำแหน่งที่เหมาะสม

3.2 ความคลาดเอกรงค์เชิงหน้าคลื่น ในหัวข้อที่ 3.1 เป็นการพิจารณาความคลาดเอกรงค์เชิงรังสี สำหรับในหัวข้อนี้ จะพิจารณาความคลาดเอกรงค์เชิงหน้าคลื่น และความสัมพันธ์ของความคลาดเอกรงค์เชิงรังสีกับเชิงหน้าคลื่น

3.2.1 ทฤษฎีปฐมภูมิ (15) ความคลาดในระบบทัศนียภาพใด ๆ สามารถบอกได้หลายอันดับ ทั้งนี้เพราะระบบทัศนียภาพอาศัยทฤษฎีเกาส์ (Gauss theory) อธิบายการเกิดภาพ ตามยาว และ ตามขวาง ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวอาศัยค่าประมาณจากอนุกรมกำลังของ  $\sin X$  และ  $\cos X$  คือ

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \dots$$

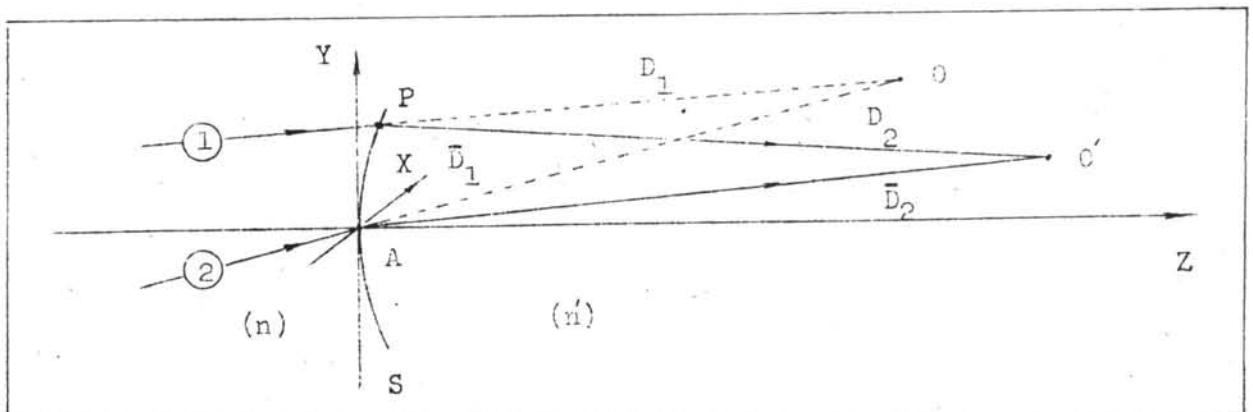
$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} \dots$$

ในเมื่อ  $X$  แทนมุมตกกระทบ, มุมหักเห และมุมย่นใด ๆ โดยพิจารณาที่ก่าลังของ  $X$  ถ้าคิดแต่  
 ทอมที่มี  $X$  ก่าลังหนึ่ง เรียกว่า ทฤษฎีปฐมภูมิ หรือทฤษฎีอันดับที่หนึ่ง (first-order theory)  
 ใช้ค่า  $\sin X = X$  เรเดียนและ  $\cos X = 1$  ทิศนค่าสตร์ที่ใช้ทฤษฎีนี้เรียกว่า ทิศนค่าสตร์  
 เกาส์เซียน (Gaussian Optics) หรือทิศนค่าสตร์ใกล้แกน (paraxial optics) คิดเฉพาะ  
 รังสีในบริเวณใกล้แกนมอยส์สำคัญ ความคลาดของระบบทิศนค่าสตร์ที่ใช้ทฤษฎีนี้ เรียกว่าความคลาด  
 ปฐมภูมิ ถ้าพิจารณาถึงก่าลังที่สองของ  $X$  เรียกว่าทฤษฎีทุติยภูมิ หรือ ทฤษฎีอันดับที่สอง (second-order  
 theory) ใช้ค่า  $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2}$  เรียกความคลาดของระบบทิศนค่าสตร์ที่ใช้ทฤษฎีนี้ว่า  
 ความคลาดทุติยภูมิ ถ้าพิจารณาถึงก่าลังที่สามของ  $X$  เรียกว่า ทฤษฎีอันดับที่สาม (third-order  
 theory) ใช้ค่า  $\sin X = X - \frac{X^3}{3!}$  เรียกความคลาดของระบบทิศนค่าสตร์ที่ใช้ทฤษฎีนี้ว่า  
 ความคลาดอันดับที่สาม

3.2.2 ฟังก์ชันของความคลาดปฐมภูมิ พิจารณารูปที่ 2.16 รังสีมอยส์สำคัญ (2)

จากจุดวัตถุตกบนผิวโค้งทรงกลม (S) ที่จุด A หักเหไปตัดกับรังสี ① รังสี ① (ซึ่งไม่จำเป็น  
 ต้องเป็นรังสีใกล้แกน) มาจากจุดวัตถุเดียวกัน ตกบนผิวโค้งทรงกลมที่จุด P ให้  $n, n'$  เป็น  
 ค่าดัชนีหักเหของตัวกลางด้านวัตถุและด้านภาพตามลำดับ ต่อแนวของรังสีทั้งสอง (ตามเส้นประ)  
 ให้ตัดกันที่จุด 0 ดังนั้นจุด 0 จะเป็นจุดวัตถุเสมือนของภาพจริง 0' จะหาฟังก์ชันของความ  
 คลาดปฐมภูมิได้โดยใช้สมการ(2.6) คือ

$$W = \Sigma(\bar{D} - D) \cdot n \dots \dots \dots (2.6)$$



รูปที่ 2.16 การหาฟังก์ชันของความคลาด

$$\begin{aligned}
 \text{หรือ} \quad W &= \Sigma n \bar{D} - \Sigma n D \\
 &= (n \bar{D}_1 + n' \bar{D}_2) - (n D_1 + n' D_2) \\
 &= n' (\bar{D}_2 - D_2) - n (\bar{D}_1 - D_1)
 \end{aligned}$$

ตามรูปที่ 2.16  $FO = D_1$ ,  $AO = \bar{D}_1$ ,  $FO' = D_2$  และ  $AO' = \bar{D}_2$

ดังนั้นผลต่างของระยะทางเชิงทัศน (W) ในกรณีนี้เป็น

$$W = n' (AO' - FO') - n (AO - FO)$$

$$\text{หรือ} \quad W = \Delta \{n(AO - FO)\} \dots \dots \dots (2.16)$$

สมการ (2.16) มีประโยชน์มากในการหาฟังก์ชันของความคลาดปรุฏุมิ และหาลมการของความคลาดปรุฏุมิ ในกรณีทั่ว ๆ ไปจะพิจารณารังสี (1) ที่ไม่อยู่ในระนาบเดียวกับรังสี (2) โดยสมมุติว่า รังสี (1) ตกบนผิวโค้งทรงกลมที่  $P(X, Y, Z)$  ใด ๆ และรังสี मुख्यสำคัญ (2) ตกบนผิวโค้งทรงกลมที่  $A(0, 0, 0)$  รังสี (2) อยู่ในระนาบ YZ ดังรูปที่ 2.17 ระยะวัตถุคือ  $AO = l$  จะหาระยะ  $FO$  โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (FO)^2 &= (0 - X)^2 + (l \sin \bar{i} - Y)^2 + (l \cos \bar{i} - Z)^2 \\
 &= l^2 + (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2Yl \sin \bar{i} - 2Zl \cos \bar{i} \dots \dots (2.17)
 \end{aligned}$$

หาค่า PA ในเทอมของ Z โดยพิจารณาสมการของผิวโค้งทรงกลมรัศมี r คือ

$$X^2 + Y^2 + (Z - r)^2 = r^2$$

กระจายเทอม  $(Z - r)^2$  แล้วย้ายข้างได้ค่า  $Z = \frac{1}{2r} (X^2 + Y^2 + Z^2)$  จากรูปที่

$$2.17 \text{ (ข) ค่า } (PA)^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) \text{ นั่นคือ } Z = \frac{(PA)^2}{2r} \text{ และค่า } Y = (PA) \cos \phi$$

แทนค่าต่าง ๆ เหล่านี้ในสมการ (2.17) แล้วหาค่า FO ได้เป็น





$$PO = \lambda \left[ 1 - \frac{1}{2\lambda} \left\{ (PA)^2 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) + 2(PA) \cos \phi \sin \bar{I} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{8\lambda^2} \left\{ (PA)^4 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right)^2 + 4(PA)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \bar{I} + 4(PA)^3 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \cos \phi \sin \bar{I} \right\} \right] \dots$$

ได้ผลต่างระหว่าง AO และ PO เป็น

$$AO - PO = \frac{1}{2} \left\{ (PA)^2 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) + 2(PA) \cos \phi \sin \bar{I} \right\} \\ + \frac{1}{8\lambda} \left\{ (PA)^4 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right)^2 + 4(PA)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \bar{I} \right. \\ \left. + 4(PA)^3 \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) \cos \phi \sin \bar{I} \right\} + \dots$$

ใช้ค่า  $PA = \rho$ ,  $h$  เป็นปริมาตรของ PA บนระนาบ XY จากรูปที่ 2.17 ได้ว่า

$$U = (PA)/\lambda$$

$$n \left( \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) h = n \left( \frac{h}{r \cos \bar{I}} - \frac{h}{\lambda} \right) = n(\theta - U) = n\bar{I} = \Delta$$

$$\text{ให้ } \bar{A} = n \sin \bar{I} = n' \sin \bar{I}'$$

จากสูตรการหักเหของรังสีในระนาบซีกิตตล (sagittal refraction formula)

$$\frac{n'}{\lambda'} - \frac{n}{\lambda} = \frac{n' \cos \bar{I}' - n \cos \bar{I}}{r}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ } n' \left\{ \frac{\cos \bar{I}'}{r} - \frac{1}{\lambda'} \right\} - n \left\{ \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right\} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \Delta n \left\{ \frac{\cos \bar{I}}{r} - \frac{1}{\lambda} \right\} = 0$$

จากกฎของสเนลล์  $n' \sin \bar{i}' = n \sin \bar{i}$

จะได้  $\Delta n \sin \bar{i} = 0$

แทนค่าต่าง ๆ เหล่านี้ในสมการ (2.16) จะได้ฟังก์ชันของความคลาดเป็น

$$W = \frac{1}{8} A^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{\rho}{h}\right)^4 + \frac{1}{2} A \bar{A} h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{\rho}{h}\right)^3 \cos \phi$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{\rho}{h}\right)^2 \cos^2 \phi + \dots \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

เปลี่ยนฟังก์ชันของความคลาดให้อยู่ในรูปของค่าแห่งเศษส่วน (fractional value)

โดยที่  $r = (PA/h)$ ,  $(Y/h) = \sigma r \cos \phi$ ,  $PA = \rho$ , และ

$Y = PA \cos \phi$  ดังนั้นสมการ (2.18) จะเป็น

$$W = \frac{1}{8} A^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{PA}{h}\right)^4 + \frac{1}{2} A \bar{A} h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{PA}{h}\right)^2 \left(\frac{Y}{h}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \left(\frac{Y}{h}\right)^2 + \dots$$

หรือ  $W = \frac{1}{8} A^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) r^4 + \frac{1}{2} A \bar{A} h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \sigma r^3 \cos \phi$

$$+ \frac{1}{2} \bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{U}{h}\right) \sigma^2 r^2 \cos^2 \phi + \dots\dots\dots$$

นั่นคือ  $W(\sigma, r, \phi) = \frac{W}{0.40} r^4 + \frac{W}{1.31} \sigma r^3 \cos \phi + \frac{W}{2.22} \sigma^2 r^2 \cos^2 \phi + \dots \quad (2.19)$

ตัวเลขที่เขียนติดอักษร W หมายถึงกำลังของ  $\sigma, r$  และ  $\cos \phi$  ตามลำดับ

ถ้าใช้เทอมที่กำลังของ X ในอนุกรมเทย์เลอร์ดังกล่าวแล้วมากกว่าสอง จะสามารถหาเทอมต่อ ๆ ไป

ในลุ่มการฟังก์ชันของความคลาดได้ ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันของความคลาดปฐมภูมิ (ผลรวมของกำลังของ  $\sigma$  และ  $r$  ไม่เกิน 4) ได้ดังนี้

$$W(\sigma, r, \phi) = {}_0W_{40} r^4 + {}_1W_{31} \sigma r^3 \cos \phi + {}_2W_{22} \sigma^2 r^2 \cos^2 \phi + {}_2W_{20} \sigma^2 r^2 + {}_3W_{11} \sigma^3 r \cos \phi \dots \dots \dots (2.20)$$

ลุ่มการ (2.20) เป็นลุ่มการรูปหัว  $\sigma$  ไปของความคลาดเชิงหน้าคลื่น  $W(\sigma, r, \phi)$

และ ได้ว่า

เทอม	${}_0W_{40} r^4$	คือ	ความคลาดทรงกลม
เทอม	${}_1W_{31} \sigma r^3 \cos \phi$	คือ	โคมา
เทอม	${}_2W_{22} \sigma^2 r^2 \cos^2 \phi$	คือ	ความคลาดเอียง
เทอม	${}_2W_{20} \sigma^2 r^2$	คือ	ความโค้งของลำนาม
เทอม	${}_3W_{11} \sigma^3 r \cos \phi$	คือ	ความบิดเบี้ยว

### 3.2.3 ความสัมพันธ์ของความคลาดเวกอร์กึ่งเชิงหน้าคลื่นและเชิงรังสี พิจารณา

รูปที่ 2.18 เมื่อ  $\Sigma_0$  เป็นหน้าคลื่นของรังสีจริง,  $\Sigma'$  เป็นหน้าคลื่นอ้างอิง และ  $A$  เป็นจุดกึ่งกลางของตำแหน่งลำแสงขาวออกเล็กสุด รังสีไกลเกินจากจุดวัตถุที่อยู่บนแนวแกน ผ่านระบบเกิดภาพที่  $P'$  รังสี (1) (ซึ่งไม่ลำเป็นต้องเป็นรังสีไกลเกิน) มาจากวัตถุเดียวกันกับรังสีไกลเกิน แต่มาจากจุดที่อยู่นอกแกนไปตัดระนาบของภาพที่  $O''$  และรังสีमुखสำคัญ (2) มาจากจุดวัตถุ



$$(PO')^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2$$

แทนค่าโคออร์ดิเนตของ  $(X_1, Y_1, Z_1)$  จะได้

$$(PO')^2 = X^2 + (Y - \eta_0)^2 + (Z - R \cos \bar{I})^2$$

จากรูปที่ 2.18 เมื่อ  $n'$  เป็นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางด้านภาพ จะได้

$$(PO')^2 = (DO' - DP)^2 = \left(R - \frac{W}{n'}\right)^2$$

ดังนั้น สมการของผิวหน้าของคลื่นจริง (จากรังสี (1)) ตรงจุด P เขียนได้เป็น

$$f = f(X, Y, Z) = X^2 + (Y - \eta_0)^2 + (Z - R \cos \bar{I})^2 - \left(R - \frac{W}{n'}\right)^2$$

ดังนั้นได้

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2X + \frac{2R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial X}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = 2(Y - \eta_0) + \frac{2R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y}$$

และ

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = 2(Z - R \cos \bar{I})$$

ทิศทางโคไซน์ (direction cosine) ของเส้นตรง  $PO''$  เมื่อใช้โคออร์ดิเนตของจุด  $O''$  คือ

$$\frac{\delta \xi - X}{\left| \frac{\partial f}{\partial X} \right|} = \frac{(\eta_0 + \delta \eta) - Y}{\left| \frac{\partial f}{\partial Y} \right|} = \frac{R \cos \bar{I} - Z}{\left| \frac{\partial f}{\partial Z} \right|} \dots \dots \dots (2.21)$$

แทนค่า  $\frac{\partial f}{\partial X}$  ,  $\frac{\partial f}{\partial Y}$  และ  $\frac{\partial f}{\partial Z}$  ในสมการ(2.21) จะได้

$$\frac{\delta \xi - X}{\left(X + \frac{R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial X}\right)} = \frac{(\eta_0 + \delta \eta) - Y}{\left(Y - \eta_0 + \frac{R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y}\right)} = -1 \dots \dots \dots (2.22)$$

ความสัมพันธ์ของความคลาดเอกรงค์เชิงหน้าคลื่น (W) และเชิงรังสีตามขวาง ( $\delta \xi$ ,  $\delta \eta$ )

ได้จากสมการ (2.22) ดังนี้

$$\delta \xi = - \frac{R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial X}$$

$$\delta \eta = - \frac{R}{n'} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y}$$

ซึ่งจะรวมเขียนความสัมพันธ์ของความคลาดเอกรงค์เชิงหน้าคลื่นและเชิงรังสีได้ว่า

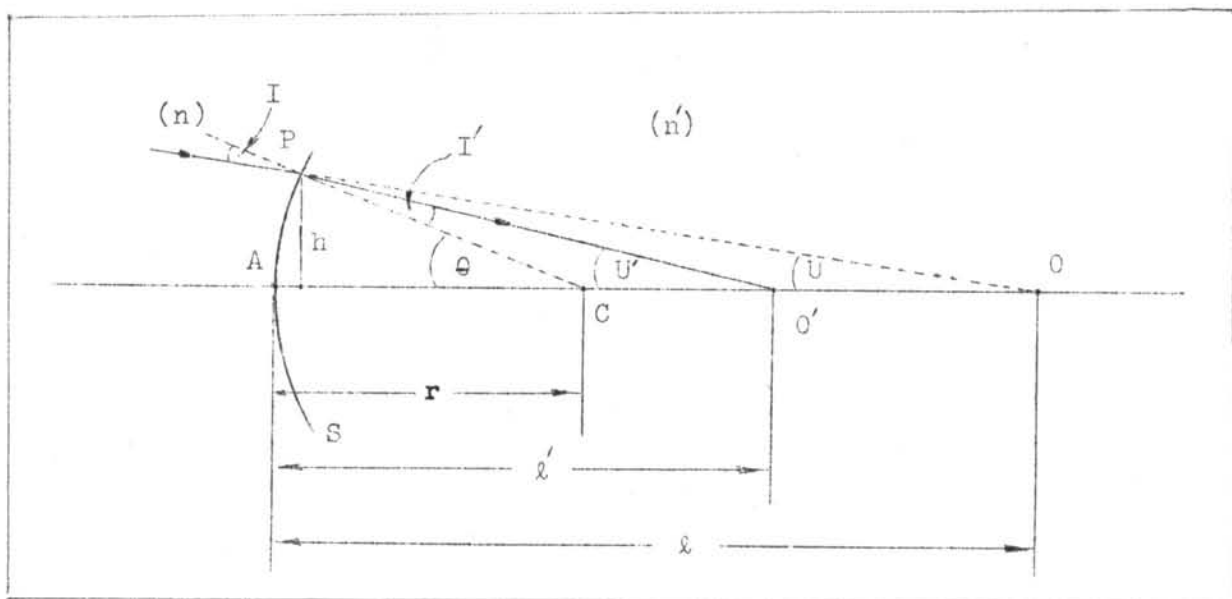
$$W(X, Y) = -n' \int \frac{(\delta \xi dX + \delta \eta dY)}{R}$$

ซึ่งในทางปฏิบัติ จะให้ โคออร์ดิเนต (X, Y) อยู่ในระนาบของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุดมากกว่าที่จะให้อยู่บนทรงกลมอ้างอิง

#### 4. การแกะรอยรังสี (1)

พิจารณารังสีที่มาตกบนผิวทรงกลมเดี่ยว  $\Sigma$  ซึ่ง  $C$  เป็นจุดศูนย์กลาง รังสีมีความโค้งเป็น  $r$  ดังรูปที่ 2.19  $O$  และ  $O'$  เป็นจุดวัตถุและจุดภาพห่างจากผิวโค้งเป็นระยะ  $x$  และ  $x'$  ตามลำดับ รังสีตกอยู่ในตัวกลางที่มีค่าดัชนีหักเห  $n$  ทำมุมตก  $I$  และทำมุม  $U$  กับแกนमुखสำคัญ รังสีหักเหอยู่ในตัวกลางที่มีค่าดัชนีหักเห  $n'$  ทำมุมหักเห  $I'$  และทำมุม  $U'$  กับแกนमुखสำคัญ ตามหลักตรีโกณมิติ จากสามเหลี่ยม CPO จะได้

$$\sin I = \frac{(l - r) \sin U}{r} \dots \dots \dots (2.23)$$



รูปที่ 2.19 การหักเหของรังสีผ่านผิวทรงกลมเดี่ยว

มุม ACP เป็นมุมภายนอกของสามเหลี่ยม CPO' และของสามเหลี่ยม CPO ดังนั้นจะได้

$$\theta = U + I = U' + I' \quad \dots\dots(2.24)$$

หรือ 
$$U' = U + I - I' \quad \dots\dots(2.25)$$

จากกฎการหักเหของแสงได้ว่า

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad \dots\dots(2.26)$$

พิจารณาสองเหลี่ยม CPO' จะได้

$$\sin I' = \frac{(l' - r) \sin U'}{r}$$

หรือ 
$$l' - r = \frac{r \sin I'}{\sin U'} \quad \dots\dots(2.27)$$



สมการ (2.23) ถึง (2.27) ใช้กำหนดหาตำแหน่งของภาพได้ไม่ว่ารังสีที่เข้าจะตกที่จุดใดของผิว หรือไม่ว่าค่า  $h$  จะเป็นเท่าไรก็ตาม แต่วิธีคำนวณไม่ค่อยสะดวกนัก วิธีที่ง่ายและสะดวกกว่านี้ ทำได้โดยให้รังสีที่มาจากบนผิวเป็นรังสีใกล้แกนของผิวทรงกลมซึ่งเรียกว่า ทิศนค่าสัตรีใกล้แกน เมื่อรังสีตกเป็นรังสีใกล้แกนค่าของมุมต่าง ๆ ในรูปที่ 2.19 จะเป็นมุมเล็กหมด

จากสมการ (2.24) กับ (2.26) จะเขียนได้ว่า

$$n \sin (\theta-U) = n' \sin (\theta-U')$$

จากทฤษฎีปรัมฐมิในหัวข้อที่ 3.2.1 เมื่อมุมต่าง ๆ เป็นมุมเล็กหมด ค่าของมุมต่าง ๆ เมื่อ ไขหน่วยเป็นเรเดียน จะเขียนได้ดังนี้

$$n(\theta-U) = n'(\theta-U')$$

หรือ 
$$nU' - nU = \theta(n' - n)$$

หรือ 
$$nU' - nU = \frac{n}{r}(n' - n) \dots\dots\dots(2.28)$$

หารตลอดสมการ (2.28) ด้วย  $h$  จะได้

$$\frac{nU'}{h} - \frac{nU}{h} = \frac{n' - n}{r}$$

นั่นคือ 
$$\frac{n'}{r} - \frac{n}{r} = \frac{n' - n}{r} \dots\dots\dots(2.29)$$

เรียกค่า  $\frac{n' - n}{r}$  ว่า กำลัง (power) ของผิวทรงกลม ไขแทนด้วย  $k$

ดังนั้น 
$$k = \frac{n' - n}{r} = C(n' - n) \dots\dots\dots(2.30)$$

ในเมื่อ  $C$  เป็นความโค้งของผิวทรงกลมมีค่าเท่ากับ  $1/r$

สมการ (2.29) แสดงความสัมพันธ์ของ  $\lambda$  และ  $\lambda'$  โดยไม่มีค่า  $h$  มาเกี่ยวข้อง มีประโยชน์มากในการให้  $\lambda$  เรียกว่า สมการใกล้แกน (paraxial equation) หรือ สมการเกาส์เซียน (Gaussian equation)

นอกจากจะเขียนสมการใกล้แกนได้ดังสมการ (2.29) แล้ว ยังเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ซึ่งสะดวกในการคำนวณหาทางเดินของรังสีที่ผ่านผิวหักเหแสง โดยที่ทราบว่า ถ้าพิจารณาเฉพาะ รังสีใกล้แกนเท่านั้น ค่ามุมทั้งหลายจะเป็นมุมเล็ก ซึ่งให้  $\sin \theta = \tan \theta = \theta$  เราเขียนดังที่กล่าวมาแล้ว จะเขียนได้ว่า  $U = n/\lambda$  และ  $U' = h/\lambda'$  หรือ  $\lambda = h/U$  และ  $\lambda' = h/U'$  แทนค่า  $\lambda$  และ  $\lambda'$  ลงในสมการ (2.29) จะได้

$$\frac{nU'}{h} = \frac{n' - n}{r} + \frac{nU}{h}$$

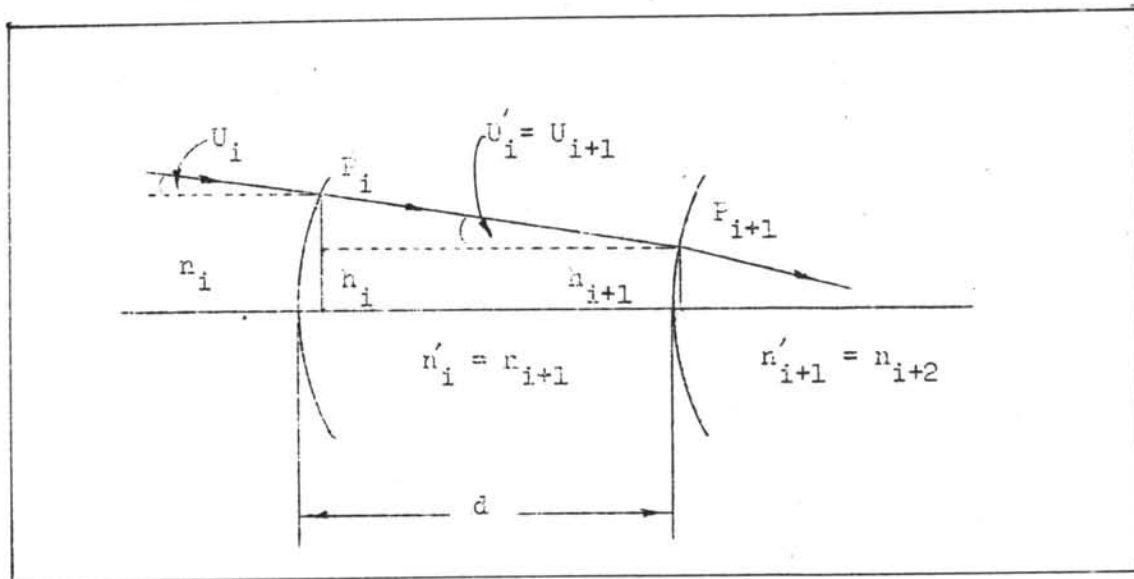
หรือ

$$\begin{aligned} nU' &= \frac{h(n' - n)}{r} + nU \\ &= hc(n' - n) + nU \\ &= hk + nU \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} nU' &= \frac{h(n' - n)}{r} + nU \\ &= hc(n' - n) + nU \\ &= hk + nU \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots(2.31)$$

เรียกสมการ (2.31) ว่า สมการของการแกะรอยรังสี (ray tracing equation)

ในกรณีที่ระบบทัศนียภาพประกอบด้วยผิวโค้งทรงกลมหลายผิว พิจารณารูปที่ 2.20 ซึ่งมีผิวทรงกลม 2 ผิว ห่างกัน  $d$  รังสีตกบนผิวแรก (i) มีจุดตกอยู่สูงกว่าแกน  $h_i$  มุมชนทางด้านวัตถุเป็น  $U_i$  มุมชนทางด้านภาพเป็น  $U'_i$  เมื่อรังสีหักเหผ่านผิวแรกไปยังผิวถัดไป (i + 1) จะตกบนจุดที่สูงกว่าแกน  $h_{i+1}$  มุมชนทางด้านวัตถุ  $U_{i+1}$  มีค่าเท่ากับ  $U'_i$  และมุมชนทางด้านภาพเป็น  $U'_{i+1}$

จากที่กล่าวมาแล้วว่า  $U_{i+1} = U'_i$



รูปที่ 2.20 การหักเหของรังสีผ่านผิวทรงกลมสองผิว

และตัวกลางที่อยู่หน้าผิวที่ล่อง จะเป็นตัวกลางหลังผิวที่หนึ่ง นั่นคือ

$$n_{i+1} = n'_i$$

ดังนั้น  $n_{i+1} U_{i+1} = n'_i U'_i$  .....(2.32)

เมื่อคิดแต่รังสีใกล้แกนเท่านั้น ผลต่างของ  $h_i$  กับ  $h_{i+1}$  จะเป็น  $dh'_i$

นั่นคือ  $h_{i+1} = h_i - dh'_i$  .....(2.33)

สมการ (2.32) และ (2.33) เป็นสมการที่ใช้ในการหาตำแหน่งของรังสีจากผิวหนึ่งมาถึงผิวถัดไปได้ เรียกว่า สมการของการย้ายผิว (transfer equation)

ด้วยวิธีการเช่นนี้ ทำให้สามารถติดตามทางเดินของรังสีได้ ตั้งแต่เริ่มออกจากวัตถุตกบนผิว หลังจากการหักเหที่ผิว รังสีจะมีทิศทางเบนไปทางใดและจะตกบนจุดใดของผิวต่อไป ทำไปดังนี้เรื่อย ๆ จนครบทุกผิว จะได้ตำแหน่งที่รังสีออกจากผิวสุดท้ายตัดกับแกนमुखยสำคัญ ซึ่งเป็นตำแหน่งของภาพนั่นเอง วิธีแบบนี้ เรียกว่า การแกะรอยรังสี (ray tracing)

5. สมการคำนวณหาค่าความคลาดเชิงหน้าคลื่น (1)

การหาค่าความคลาดจะทำได้โดย เริ่มจากการแกะรอยรังสีใกล้แกน (paraxial ray tracing) บนแกนมุขยสำคัญ ไปยังขอบของตัวจำกัดแสงแบบช่องเปิดของระบบจนได้ภาพ และแกะรอยรังสีมุขยสำคัญใกล้แกน (principal ray tracing) จากขอบของสนามของวัตถุ ผ่านจุดที่กลางของตัวจำกัดแสงของระบบ จนได้ภาพเช่นกัน ซึ่งจะทำให้ทราบค่าความสูงจากแกนของรังสี มุมชั้นทางด้านวัตถุ และมุมชั้นทางด้านภาพของทุกผิวที่รังสีนั้นไปถึง สมมุติว่า ค่าต่าง ๆ เหล่านี้ของรังสีใกล้แกนเป็น  $h, U$  และ  $U'$  ส่วนสำหรับรังสีมุขยสำคัญใกล้แกนค่าเหล่านี้เป็น  $\bar{h}, \bar{U}$  และ  $\bar{U}'$  ตามลำดับ

จากสมการ (2.31) ซึ่งเป็นสมการของการหักเหของรังสีที่ผิวโค้งทรงกลมที่มีความโค้ง  $C$

$$n'U' = nU + h(n' - n)C$$

หรือ 
$$n'U' = nU + hn'C - hnC$$

หรือ 
$$n(hC - U) = n'(hC - U')$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกผิวที่มีการหักเหแสง ซึ่งเรียกค่านี้ว่า ค่าผิของของการหักเห (refraction invariant) ให้มีค่าเป็น  $A$

ดังนั้น 
$$A = n(hC - U) = n'(hC - U') \dots\dots\dots(2.34)$$

สำหรับรังสีมุขยสำคัญใกล้แกน จะเขียนค่าผิของของการหักเหได้ เป็น

$$\bar{A} = n(\bar{h}C - \bar{U}) = n'(\bar{h}C - \bar{U}') \dots\dots\dots(2.35)$$

ดังนั้น จากการทราบค่า  $h, U$  และ  $U'$  ของรังสีใกล้แกนที่แต่ละผิวโดยการแกะรอยรังสี ทำให้คำนวณค่า  $A$  ที่แต่ละผิวได้โดยใช้สมการ (2.34) และเช่นเดียวกัน ค่า  $\bar{A}$  ของรังสีมุขยสำคัญใกล้แกน ก็คำนวณได้จากสมการ (2.35)

นอกจากนี้ ถ้าพิจารณาค่าจีของลากรองก์ (Lagrange invariant) สำหรับแต่ละรังสี เรามีสมการหาค่าจีของลากรองก์ เป็น

$$H = nhU = n'h'U'$$

ถ้าต้องการให้มีความสัมพันธ์เกี่ยวโยงกันระหว่างสองรังสีที่ไย้ขณะนี้ คือ รังสีใกล้เคียงกับรังสีมุขย สำคัญใกล้เคียง จะหาค่าจีของลากรองก์ได้ดังนี้

จากสมการ (2.34)  $A = nhC - nU$

คูณตลอดด้วย  $\bar{h}$  จะได้

$$\bar{h}A = nh\bar{h}C - nU\bar{h}$$

และจากสมการ (2.35)  $\bar{A} = nh\bar{C} - n\bar{U}$

คูณตลอดด้วย  $h$  จะได้

$$h\bar{A} = nh\bar{h}C - n\bar{U}h$$

ดังนั้น  $nU\bar{h} - n\bar{U}h = h\bar{A} - \bar{h}A \dots\dots(2.36)$

ค่าของสมการ (2.36) ก็คือ ค่าจีของลากรองก์ ซึ่งแสดงถึงความสมมาตรระหว่างผลที่ได้จากรังสีทั้งสอง นั่นคือ

$$\left. \begin{aligned} H &= h\bar{A} - \bar{h}A \\ &= n(U\bar{h} - \bar{U}h) \\ &= n(\bar{\epsilon} - \epsilon)U\bar{U} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.37)$$

ในเมื่อ  $\epsilon$  คือระยะวัตถุของรังสีใกล้เคียง และ  $\bar{\epsilon}$  คือระยะวัตถุของรังสีมุขยสำคัญใกล้เคียง แล้วนำค่าต่าง ๆ เหล่านี้ไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของความคลาดเอกรงค์

จากสมการ (2.18) จะสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของความคลาดเอกรงค์เชิงหน้า  
คลื่น และผลรวมของไฮเติล (seidel sums) เมื่อระบบทัศนมิติวงโคจรทรงกลมหลายผิวได้  
ดังสมการต่อไปนี้

$${}_0W_{40} = \frac{1}{8} S_I = \frac{1}{8} \Sigma A h^2 \Delta \left(\frac{U}{n}\right) \dots\dots\dots(2.38)$$

$${}_1W_{31} = \frac{1}{2} S_{II} = \frac{1}{2} \Sigma A \bar{A} h \Delta \left(\frac{U}{n}\right) \dots\dots\dots(2.39)$$

$${}_2W_{22} = \frac{1}{2} S_{III} = \frac{1}{2} \Sigma \bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{U}{n}\right) \dots\dots\dots(2.40)$$

$${}_2W_{20} = \frac{1}{4} (S_{III} + S_{IV}) = \frac{1}{4} \left\{ \Sigma \bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{U}{n}\right) - H^2 \Sigma C \Delta \left(\frac{1}{n}\right) \right\} \dots\dots(2.41)$$

$${}_3W_{11} = \frac{1}{2} S_V = \frac{1}{2} \left\{ \Sigma \frac{\bar{A}^3}{A} h \Delta \left(\frac{U}{n}\right) - H^2 \Sigma \frac{\bar{A}}{A} C \Delta \left(\frac{1}{n}\right) \right\} \dots\dots(2.42)$$

โดยที่  $A = n(hC - U) = n'(hC - U') \dots\dots\dots(2.43)$

$$\bar{A} = n(\bar{h}C - \bar{U}) = n'(\bar{h}C - \bar{U}') \dots\dots\dots(2.44)$$

$$H = nhU = n'hU'$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left(\frac{U}{n}\right) &= \frac{U'}{n'} - \frac{U}{n} \\ \text{และ } \Delta \left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.45)$$

$S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}$  และ  $S_V$  ต่างก็เป็นผลรวมของไฮเติลหรือต่างก็คือ ผลที่ได้  
จากการรวมความคลาดไฮเติล หรือ ความคลาดปฐมภูมิที่มีแต่ละผิวของระบบทัศนมิติเข้าด้วยกัน  
โดยที่

$S_I$	คือ ผลรวมของไฮเดิลของความคลาดทรงกลม
$S_{II}$	คือ ผลรวมของไฮเดิลของโคมา
$S_{III}$	คือ ผลรวมของไฮเดิลของความคลาดเอียง
$S_{IV}$	คือ ผลรวมของไฮเดิลของความโค้งของลำนาม
$S_V$	คือ ผลรวมของไฮเดิลของความบิดเบี้ยว
${}^0W_{40}$	คือ สัมประสิทธิ์ของความคลาดทรงกลม
${}^1W_{31}$	คือ สัมประสิทธิ์ของโคมา
${}^2W_{22}$	คือ สัมประสิทธิ์ของความคลาดเอียง
${}^2W_{20}$	คือ สัมประสิทธิ์ของความโค้งของลำนาม
และ ${}^3W_{11}$	คือ สัมประสิทธิ์ของความบิดเบี้ยว

ใช้สมการต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้นคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของความคลาดเอกรงค์เชิงหน้าคลื่น และ เนื่องจากระบบทัศนศาสตร์ที่มีทางยาวโฟกัสค่าหนึ่ง สามารถสร้างได้หลายแบบ และรูปร่างแต่ละแบบจะให้ความคลาดแต่ละชนิดค่าหนึ่ง นำค่าความคลาดที่คำนวณได้ไปพิจารณารูปร่างของระบบทัศนศาสตร์โดยการเขียนกราฟ และจากกราฟสามารถเลือกรูปร่างของระบบทัศนศาสตร์ที่ให้ค่าความคลาดที่ต้องการได้ วิธีนี้เรียกว่าการโค้งเลนส์