บทที่ ๒

การกระจายของความเค้นรอบรูวงรีในแผ่นความเค้น

รูวงรีในแผ่นความเค้นสองมิติ

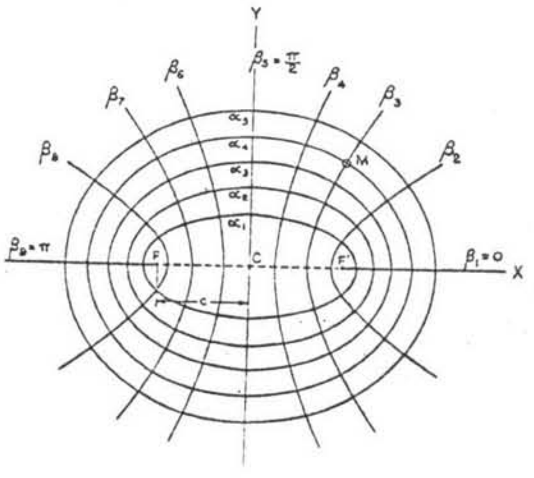
รูปที่ ๑ แสดงพิกัดอีลีพทิค ซึ่งแต่ละจุดในระนาบแทนพิกัด α และ β ใน เทอมของพิกัดคาร์เทเซี่ยน

$$x = c \cosh\alpha \cdot \cos\beta \qquad y = c \sinh\alpha \cdot \cos\beta \quad ..(a)$$

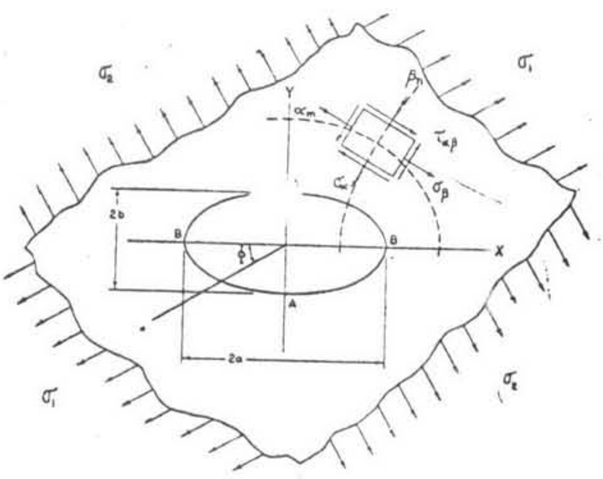
ซึ่ง c เป็นระยะโฟกัสร่วมของคอนฟอคอล–อีลีพ(confocal ellipse) และคอนฟอคอล–ไฮเพอโบล่า (confocal hyperbola) ในสมการ

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2\alpha} + \frac{y^2}{c^2\sinh^2\alpha} = 1; \text{ เมื่อ } \beta \text{ คงที่} \quad ..(b)$$

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\beta} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\beta} = 1; \text{ เมื่อ } \alpha \text{ คงที่} \quad ..(c)$$



รูปที่ ๑ พิกัดอีลิพทิค จุด M เป็นพิกัด $\alpha_4 \beta_3$



รูปที่ ๒ ความเค้นรอบรูวงรีในแผ่นความเค้น

กรณีที่รูวงรีในแผ่นราบได้รับความเค้น σ_1 และ σ_2 กระจายสม่ำเสมอและตั้งฉากกัน กระทำในทิศทางที่ทำมุม ϕ และ $(90 + \phi)$ กับแกนยาวของรูวงรี ดังรูปที่ ๒ หาการกระจายของความเค้นที่บางจุดในแผ่นราบ โดยพิจารณาสภาวะของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดตัดของคอนฟอคอลอีลีพและคอนฟอคอลไฮเพอโบลา โดยด้านขนานกับเส้นสัมผัสที่จุดของการตัดกัน ซึ่ง

σ_α = ความเค้นในทิศทางขนานกับเส้นสัมผัสไฮเพอโบลา

σ_β = ความเค้นในทิศทางขนานกับเส้นสัมผัสวงรี

$\tau_{\alpha\beta}$ = ความเค้นเฉือนบนผิวของอนุภาค

เราสามารถหาการกระจายของความเค้นรอบ ๆ ขอบรูวงรี ซึ่ง

$\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ ได้จากสมการ (๑)

$$\sigma_\beta = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)\ \sinh 2\alpha_o + (\sigma_1 - \sigma_2)\left[\cos 2\phi - e^{2\alpha_o}\cos 2(\phi - \beta)\right]}{\cosh 2\alpha_o - \cos 2\beta} \quad ..(1)$$

ซึ่ง σ_1 และ σ_2 = ความเค้นหลัก ที่จุดไกลจากรูวงรี

2a และ 2b = ความยาวของแกนยาวและแกนสั้นของรู

α_o = พิกัดอีลีพทิค (elliptical coordinate) ซึ่งคงที่ตามขอบของรู

ϕ = มุมระหว่างแกนยาวของวงรีกับทิศทาง σ_1

β = มุมเอ็คเซ็นทริค(eccentric angle)ของวงรี

ความเค้นกระทำในแนวแกนของรูวงรี

เมื่อทิศทางของ σ_1 และ σ_2 อยู่ในแนวแกนเดียวกับแกน 2a และ 2b ของรูวงรีตามลำดับ กำหนดให้อัตราส่วนของ $\sigma_1/\sigma_2 = n$ จากสมการ (๑) เมื่อ $\phi = 0^\circ$ ได้

$$\sigma_\beta = \sigma_2 \frac{(n+1)\sinh 2\alpha_0 + (n-1)(1-e^{2\alpha_0}\cos 2\beta)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \quad \ldots(2)$$

จากสมการ(a) จะได้ว่าที่ขอบรูวงรีซึ่ง $\alpha = \alpha_0$

$\cosh\alpha_0 = a/c$ และ $\sinh\alpha_0 = b/c$

ดังนั้น $c = \sqrt{a^2-b^2}$

และได้ $\sinh 2\alpha_0 = 2\sinh\alpha_0 \cdot \cosh\alpha_0 = 2ab/c^2$

$\cosh 2\alpha_0 = \cosh^2\alpha_0 + \sinh^2\alpha_0 = (a^2+b^2)/c^2$

แทนค่าไฮเพอโบลิคฟังก์ชั่นทั้งหมดลงในสมการ (๒) ได้

$$\sigma_\beta = \sigma_2 \left\{ \frac{2(n+1)ab + (n-1)\left[a^2-b^2-(2ab+a^2+b^2)\cos 2\beta\right]}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\beta} \right\}$$

กำหนดให้อัตราส่วน $a/b = k$ ซึ่งได้

$$\sigma_\beta = \sigma_2 \left[\frac{2(n+1)k + (n-1)(k^2+1) - (n-1)(k+1)^2\cos 2\beta}{k^2+1-(k^2-1)\cos 2\beta} \right] \quad \ldots(3)$$

จาก $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \dfrac{2x^2}{c^2\cosh^2\alpha_0} - 1 = 2(x/a)^2 - 1$

แทนค่า $\cos 2\beta$ ลงในสมการ(๓) ได้การกระจายของความเค้นที่สัมผัสขอบรู, σ_t, จากจุดปลายแกนสั้น (x=0) ถึงปลายแกนยาว (x = a) ดังนี้

$$\sigma_t = \sigma_2 \left\{ \frac{2(n+1)k+(n-1)(k^2-1)-(n-1)(k+1)^2\left[2(x/a)^2-1\right]}{(k^2+1)-(k^2-1)\left[2(x/a)^2-1\right]} \right\} \ldots(4)$$

ดังนั้นสำหรับความเค้นที่ปลายแกนสั้น (x/a = 0) และที่ปลายแกนยาว (x/a = 1)

$$\sigma_A = \sigma_2 \left[\frac{2(n+1)k+(n-1)(2k^2+2k)}{2k^2} \right]$$

$$= \sigma_2 \left[n(\frac{2}{k} + 1) - 1 \right]$$

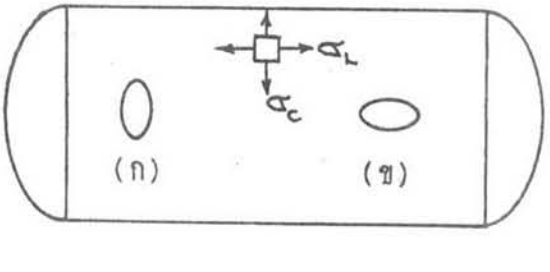
$$\sigma_B = \sigma_2 \left[\frac{2(n+1)k + (n-1)(-2k-2)}{2} \right]$$

$$= \sigma_2 \ (2k+1-n)$$

<u>การจัดวางแนวแกนรูวงรีในถังความดันทรงกระบอก</u>

กรณีการเจาะรูวงรีในถังความดัน เมื่อความโค้งของรูเจาะน้อยมาก สามารถใช้สมการ(๔) หาการรวมจุดความเค้นได้ ในการเจาะรูวงรีเราจัดแนวแกน ๒ แบบ (รูปที่ ๓) คือ แนวแกนยาวของรูวงรีอยู่ในแนวเส้นรอบวงกับอยู่ในแนวยาวของถัง จากสมการ(๔) หาการรวมจุดความเค้นสูงสุดที่ขอบรูวงรีซึ่งให้ผลเช่นเดียวกับฮาร์วีย์[๒] (Harvey) กล่าวคือแบบแรกเกิดการรวมจุดความเค้นสูงสุดรอบรูต่ำกว่าแบบที่สอง ที่อัตราส่วน a/b เดียวกัน

ดังนั้นจึงพิจารณาค่าตัวประกอบการรวมจุดความเค้นเฉพาะกรณีแนวแกนยาวของรูอยู่ในแนวเส้นรอบวง(รูปที่ ๓ ก) ดังแสดงในตารางที่ ๑



รูปที่ ๓ แนวการเจาะรูวงรีในถังความดัน

ตารางที่ ๑ การแปรเปลี่ยนความเค้นรอบรูวงรี เมื่อ n = 2
แกนยาวของรูอยู่ในแนวเส้นรอบวง

อัตราส่วนแกนยาวต่อแกนสั้น k	ระยะ x/a					
	0	0.25	0.50	0.75	0.90	1.00
	σ_t/σ_c					
1.00	2.500	2.375	2.000	1.375	0.880	0.500
1.25	2.100	2.004	1.863	1.491	1.112	0.750
1.50	1.833	1.809	1.726	1.550	1.288	1.000
1.56	1.782	1.763	1.700	1.532	1.322	1.060
1.75	1.643	1.643	1.604	1.527	1.414	1.250
2.00	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500
3.00	1.167	1.176	1.214	1.333	1.600	2.500

หมายเหตุ x เป็นระยะจากศูนย์กลางของรูวงรีไปตามแนวแกนยาวของรู