คอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระบนเซมิกรุป

นางสาว จินตนา จันทรประทิน

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๑

CONGRUENCE-FREE CONGRUENCES ON SEMIGROUPS

MISS JINTANA JUNTARAPRATIN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1978

หัวข้อวิทยานิพนธ์	คอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระบนเซมิกรุป
โดย	นางสาว จินตนา จันทรประทิน
แผนกวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ. ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

สุประดิษฐ์ บุนนาค .... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุประดิษฐ์ บุนนาค)

คณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์

มารค ตามไท .... ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร. มารค ตามไท)

ทวี ศรีแสงทอง .... กรรมการ

(ผศ. ทวี ศรีแสงทอง)

ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ .... กรรมการ

(ผศ. ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	คอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระบนเซมิกรุป
ชื่อนิสิต	นางสาว จินตนา จันทรประทิน
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ. ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ
แผนกวิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	๒๕๒๑

บทคัดย่อ

ให้ ρ เป็นคอนกรูเอนซ์บนเซมิกรุป S เรียก ρ ว่า <u>คอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระ</u>บน S ถ้าเซมิกรุป S/ρ เป็นเซมิกรุปชนิดคอนกรูเอนซ์อิสระ

คอนกรูเอนซ์ ρ บนเซมิกรุป S เป็นคอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระ ที่ไม่เป็นยูนิเวอร์ซัล เมื่อและต่อเมื่อ ρ เป็นคอนกรูเอนซ์ที่ไม่เป็นยูนิเวอร์ซัล และไม่เล็กกว่าคอนกรูเอนซ์ที่ไม่เป็นยูนิเวอร์ซัลใด ๆ ของ S.

เราสามารถให้ลักษณะของคอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระใด ๆ บนเซมิกรุปที่น่าสนใจของเลขจำนวนบางชนิดได้ดังนี้

(i) คอนกรูเอนซ์ ρ บนเซมิกรุปของเลขจำนวนเต็มภายใต้การคูณจะเป็นคอนกรูเอนซ์อิสระ เมื่อและต่อเมื่อ มี A ซึ่งเป็นสับเซ็ตของเซ็ตของเลขจำนวนเฉพาะที่มีคุณสมบัติ $(a, b) \in \rho$ เมื่อและต่อเมื่อ สามารถเขียนค่าสัมบูรณ์ของ a และ b อยู่ในรูปผลคูณของตัวเลขที่ได้จากการยกกำลังของสมาชิกในเซ็ต A.

(ii) คอนกรูเอนซ์ ρ ที่ไม่เป็นยูนิเวอร์ซัลบนเซมิกรุป $\bar{N}$ ของเลขจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ภายใต้การบวก จะเป็นคอนกรูเอนซ์อิสระ เมื่อและต่อเมื่อ

$\rho = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a, b$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ หรือ

$\rho = \{(a, b) \mid a, b \in \bar{N}, a \equiv b \pmod{p}\}$ สำหรับบางค่าของจำนวนเฉพาะ p

(iii) คอนกรูเอนซ์ ρ ที่ไม่เป็นยูนิเวอร์ซัลบนเซมิกรุปของเลขจำนวนจริง ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง ภายใต้การคูณ จะเป็นคอนกรูเอนซ์อิสระ เมื่อและต่อเมื่อ $\rho = \{(0, 0)\} \cup ((0, 1] \times (0, 1])$ หรือ $\rho = ([0, 1) \times [0, 1)) \cup \{(1, 1)\}$

ผลงานที่สำคัญอีกอันหนึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ การให้ลักษณะของคอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระใด ๆ บนเซมิกรุปผกผันสมมาตรบนเซ็ตเคาทาเบิลใด ๆ ได้ ในการศึกษานี้เรานำเอาผลงานของ ทรอทเทอร์ ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับลักษณะของเซมิกรุปผกผันที่มีศูนย์ชนิดคอน-กรูเอนซ์อิสระไว้แล้วมาประยุกต์ใช้ เราพิสูจน์ได้ว่า เซมิกรุปผกผันสมมาตรบนเซ็ต X, I_X, โดยที่ X เป็นเซ็ตเคาทาเบิลและไม่ใช่เซ็ตว่าง จะมีคอนกรูเอนซ์แบบคอนกรูเอนซ์อิสระ และไม่เป็นยูนิเวอร์ซัลเพียงอันหนึ่งและอันเดียวเท่านั้น ซึ่งเขียนแทนด้วย δ_X และให้สูตรของ δ_X ได้ดังนี้ ถ้า X เป็นเซ็ตจำกัดแล้ว $\delta_X = (G_X \times G_X) \cup \left[(I_X \setminus G_X) \times (I_X \setminus G_X)\right]$ โดย G_X คือกรุปสมมาตรบนเซ็ต X ถ้า X เป็นเซ็ตดินิวเมอเรเบิลแล้ว $\delta_X = \{(\alpha, \beta) \in I_X \times I_X \mid \Delta\alpha \setminus D(\alpha, \beta)$ และ $\Delta\beta \setminus D(\alpha, \beta)$ เป็นเซ็ตจำกัด$\}$ โดยกำหนดว่า สำหรับ $\alpha, \beta \in I_X$ ใด ๆ สัญญลักษณ์ $\Delta\alpha$ แทนโดเมนของ α และ $D(\alpha, \beta) = \{x \in \Delta\alpha \cap \Delta\beta \mid x\alpha = x\beta\}$.

Thesis Title Congruence-free Congruences on Semigroups

Name Miss Jintana Juntarapratin

Thesis Advisor Assist. Prof. Dr. Yupaporn Tirasupa

Department Mathematics

Academic Year 1978

ABSTRACT

A congruence ρ on a semigroup S is called a <u>congruence-free congruence</u> if the semigroup S/ρ is congruence-free.

A congruence ρ on a semigroup S is a nonuniversal congruence-free congruence if and only if ρ is a maximal nonuniversal congruence on S.

One of the main results is giving characterizations of congruence-free congruences on some interesting semigroups of numbers. The following are obtained :

(i) A congruence ρ on the semigroup of integers under usual multiplication is congruence-free if and only if there exists a subset A of prime numbers such that $(a, b) \in \rho$ iff the absolute values of a and b are both or are neither finite products of some powers of elements from A.

(ii) A nonuniversal congruence ρ on the semigroup $\bar{\mathbb{N}}$ of non-negative integers under usual addition is congruence-free if and only

if either $\rho = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a, b \text{ are positive integers}\}$ or $\rho = \{(a, b) \mid a, b \in \bar{\mathbb{N}}, a \equiv b \pmod{p}\}$ for some prime p.

(iii) A nonuniversal congruence ρ on the semigroup $[0, 1] = \{x \mid x \text{ is a real number such that } 0 \leq x \leq 1\}$ under usual multiplication is congruence-free if and only if either $\rho = \{(0, 0)\} \cup ((0, 1] \times (0, 1])$ or $([0, 1) \times [0, 1)) \cup \{(1, 1)\}$.

An another main result of this thesis is to characterize congruence-free congruences on symmetric inverse semigroups on countable sets. This is an application of Trotter's work of characterizing congruence-free inverse semigroup with zero. It is proved that the symmetric inverse semigroup on any countable nonempty set X, I_X, has exactly one nonuniversal congruence-free congruence δ_X, that is, δ_X is the maximum nonuniversal congruence of I_X. The explicit form of δ_X is as follows : If X is finite, $\delta_X = (G_X \times G_X) \cup [(I_X \setminus G_X) \times (I_X \setminus G_X)]$ where G_X is the symmetric group on X. If X is denumerable, $\delta_X = \{(\alpha, \beta) \in I_X \times I_X \mid \Delta\alpha \setminus D(\alpha, \beta) \text{ and } \Delta\beta \setminus D(\alpha, \beta) \text{ are finite}\}$ where for $\alpha, \beta \in I_X$, $\Delta\alpha$ denotes the domain of α and $D(\alpha, \beta) = \{x \in \Delta\alpha \cap \Delta\beta \mid x\alpha = x\beta\}$.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to express her sincere gratitude to Dr. Yupaporn Tirasupa, for introducing her to this subject and for her valuable assistance in preparing this thesis.

CONTENTS