

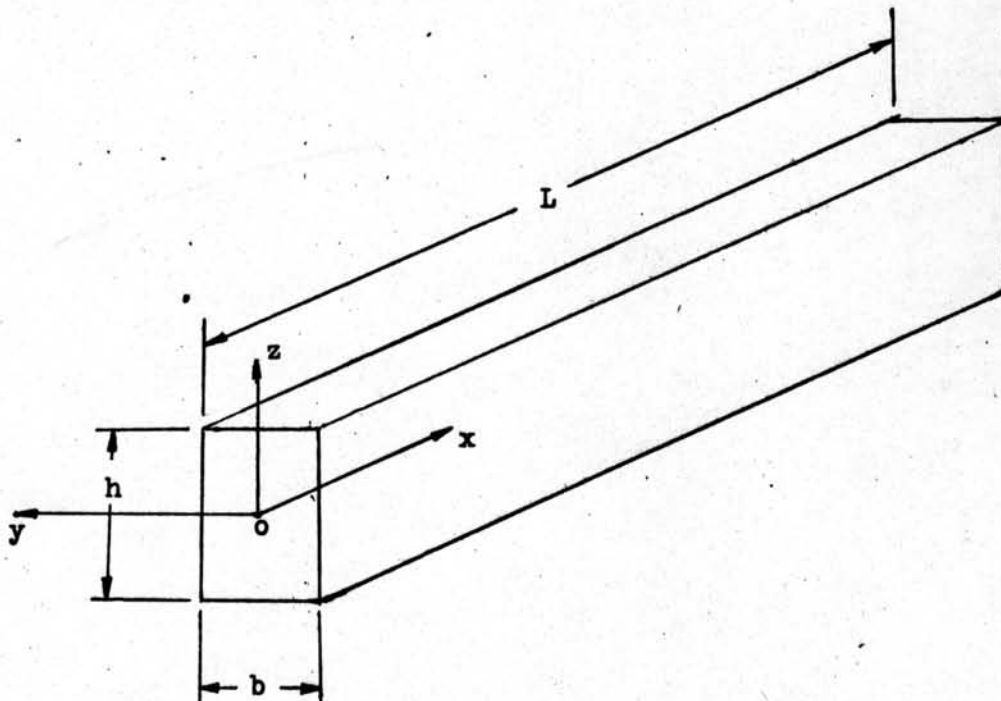


ทฤษฎีการโก่งงอของคานไม้และคานไม้เสริมผิว

2.1 การโก่งงอของคานไม้

การออกแบบคานโดยทั่วไปจะไม่คิดผลของแรงเฉือนในการหาระยะโก่งของคาน เพราะถือว่ามีผลน้อย นอกจากจะเป็นคานที่มีอัตราส่วนของความยาวช่วงคานกับความลึกมีค่าน้อย บางครั้งก็จำเป็นต้องคิดผลของแรงเฉือนด้วย เพราะระยะโก่งเนื่องจากแรงเฉือนจะมีค่ามากขึ้นเมื่ออัตราส่วนของความยาวช่วงคานกับความลึกมีค่าน้อยลง แต่ในกรณีที่คานมีค่าโมเมนต์ของแรงเฉือนค่ามาก เมื่อเทียบกับโมเมนต์ของความยืดหยุ่นในแนวความยาวของคาน จะเป็นผลให้ระยะโก่งที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงเฉือนมีค่ามากขึ้นด้วย

2.1.1 การหา governing equations และ solutions สำหรับการโก่งงอของคานไม้โดยคิดผลของแรงเฉือนด้วย



รูปที่ 2.1 การกำหนดขนาดรูปร่างและแกนอ้างอิงของคานไม้

ถ้ากำหนดให้ข้อสมมุติต่าง ๆ เหมือนกับการวิเคราะห์ classical beam theory เพียงแต่คิดผลของแรงเฉือนด้วย และสมมุติค่าความเค้นต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในคาน ดังนี้ (12)

$$\sigma_x = \frac{Mz}{I} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = \frac{3}{4} \frac{q}{b} \left[\frac{z}{h/2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h/2} \right)^3 \right] \quad (2.3)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yz} = \sigma_{yx} = 0 \quad (2.4)$$

และกำหนด displacements ดังนี้

$$u = z\alpha(x) \quad (2.5)$$

$$w = w(x) \quad (2.6)$$

Governing equations ที่ได้จากการวิเคราะห์โดย Reissner's variational method ในเทอมของ M , Q , α , และ w คือ

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{6}{5} \frac{1}{EA} q - \frac{M}{EI} = 0 \quad (2.9)^*$$

$$\alpha + \frac{dw}{dx} - \frac{6}{5} \frac{Q}{GA} = 0 \quad (2.10)^*$$

* การกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด shear correction factor ที่ใช้กันได้แก่

Timoshenko ใช้ $\frac{2}{3}$, Reissner ใช้ $\frac{5}{6}$, และ Mindlin ใช้ $\frac{\pi^2}{12}$

ในสมการที่ 2.7 และสมการที่ 2.8 จะเหมือนกับสมการสมคูล์ตามทฤษฎีพื้นฐานของคาน ในสมการที่ 2.10 จะเห็นว่าค่า $\alpha + w'$ คือมุมที่เปลี่ยนไประหว่างระนาบคัตขวางของคาน กับระนาบตามแนวคานหลังจากเกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือน ซึ่งจะเป็นอัตราส่วนตรงกับ Q/A หรือค่าแรงเฉือนโดยเฉลี่ยบนพื้นที่หน้าคัตของคาน ตามสมการที่ 2.10 จะเห็นว่าเมื่อค่า G เป็นอินฟินิตี้ จะไม่เกิดการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือน ซึ่งจะตรงตามข้อสมมุติฐานของทฤษฎีการโก่งงอของคาน เทอมที่ 3 ของสมการที่ 2.9 ขึ้นอยู่กับค่าแรงภายนอก q และ poisson's ratio, ν เมื่อกำหนดให้ ν เป็นศูนย์ ก็จะตรงตามข้อสมมุติฐานของทฤษฎีการโก่งงอของคาน

การหา solutions จาก governing equations ข้างบนนั้นในที่นี้จะพิจารณาหน้าหนักบรรทุกสองแบบ คือแบบแรงกระทำเป็นจุดที่กึ่งกลางคาน และแบบแรงกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวช่วงคาน และใช้ boundary conditions 2 แบบ คือ simple supports และ both ends fixed.

2.1.1 Simple supports, center load.

B.C.'s

$$\begin{aligned} Q &= P/2 & \text{ณ } x &= 0 \\ M &= w = 0 & \text{ณ } x &= 0 \\ \alpha &= 0 & \text{ณ } x &= L/2 \end{aligned}$$

solutions;

$$\begin{aligned} Q &= P/2 & ; & 0 \leq x \leq L/2 \\ M &= \frac{Px}{2} & ; & 0 \leq x \leq L/2 \\ \alpha &= \frac{Px^2}{4EI} - \frac{PL^2}{16EI} & ; & 0 \leq x \leq L/2 \\ w &= \frac{PL^2x}{16EI} - \frac{Px^3}{12EI} + \frac{6}{10} \frac{Px}{Gb} & ; & 0 \leq x \leq L/2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \left[1 + 1.2 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (2.12)$$

2.1.2 Both ends fixed, center load.

B.C.'s

$$Q = P/2 \quad \text{at } x = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \text{at } x = 0$$

$$w = 0 \quad \text{at } x = 0$$

$$w' = 0 \quad \text{at } x = 0$$

Solutions;

$$Q = P/2$$

$$M = \frac{P}{8}(4x - 1) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$\alpha = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{Px^2}{8EI} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$w = \frac{PLx^2}{16EI} - \frac{Px^3}{12EI} + \frac{6}{10} \frac{Px}{Gbh} \quad (2.13)$$

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{192EI} \left[1 + 4.8 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (2.14)$$

2.1.3 Simple supports, uniform load.

B.C.'s

$$Q = \frac{qL}{2} \quad \text{at } x = 0$$

$$M = 0 \quad \text{at } x = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \text{at } x = L/2$$

$$w = 0 \quad \text{at } x = 0$$

Solutions;

$$Q = qx - \frac{qL}{2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M = \frac{qx^2}{2} - \frac{qLx}{2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$\alpha = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qLx^2}{4EI} + \frac{qL^3}{24EI} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$w = \frac{qx}{24EI} \left[L^3 - 2Lx^2 + x^3 + \frac{6}{5} \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 (L^3 - Lx^2) \right] \quad (2.15)$$

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \left[1 + 0.8 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

2.1.4 Both ends fixed, uniform load.

B.C.'s

$$Q = \frac{qL}{2} \quad \text{at } x = 0, L$$

$$\alpha = 0 \quad \text{at } x = 0, L$$

$$w = 0 \quad \text{at } x = 0, L$$

$$w' = 0 \quad \text{at } x = 0, L$$

Solutions;

$$q = qx - \frac{qL}{2}$$

$$M = \frac{q}{12} (6Lx - 6x^2 - L^2)$$

$$\alpha = \frac{q}{12} (3Lx^2 - 2x^3 - L^2x)$$

$$w = \frac{qx(L-x)}{24EI} \left[(1-x)x + \frac{6}{5} \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 L^2 \right] \quad (2.17)$$

$$w_{\max} = \frac{qL^4}{384EI} \left[1 + 4 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

จาก solutions ทั้ง 4 กรณี จะเห็นว่า ผลของแรงเฉือนที่มีต่อระยะโก่งของคาน จะมีความมากที่สุดสำหรับคานในสภาพ both ends fixed, center load และมีผลน้อย ที่สุดสำหรับคานในสภาพ simple supports, uniform load.

เมื่อเปรียบเทียบระยะโก่งที่ได้จากการวิเคราะห์นี้ กับระยะโก่งที่ได้จากทฤษฎีพื้นฐานของคาน ซึ่งหาระยะโก่งของคานโดยไม่คิดผลของแรงเฉือนสำหรับคานที่มีลักษณะการยึดปลายคานทั้ง 4 แบบ และวัสดุที่ใช้ทำคานมีอัตราส่วนของโมดูลัสของความยืดหยุ่นตามแนว

ความยาวคานกับโมเมนต์ของแรงเฉือน 3 ค่า ตามรูปที่ ข-1 ถึงรูปที่ ข-4 ในภาคผนวก ข โดยกำหนดให้

$$\text{อัตราส่วนระยะโก่ง, } \frac{w}{w_0} = \frac{\text{ระยะโก่งของคานเมื่อคิดผลของแรงเฉือนด้วย}}{\text{ระยะโก่งของคานเมื่อไม่คิดผลของแรงเฉือน}}$$

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความยืดหยุ่นจริงกับโมเมนต์ของความยืดหยุ่นประสิทธิผล การทดสอบการค้ำเพื่อหาค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นโดยใช้ classical theory จะได้ค่าที่ไม่ถูกต้องนัก เพราะทฤษฎีนี้ไม่ได้คิดผลของแรงเฉือนในการหาระยะโก่ง ถ้าสมมุติให้ค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นที่หาได้โดยวิธีนี้เป็นค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นประสิทธิผล, E_{eff} ดังนั้นในกรณีของคานแบบ simple supports, center load ระยะโก่งที่จุดกึ่งกลางคาน ซึ่งหาได้จาก classical beam theory คือ

$$w = \frac{PL^3}{48E_{\text{eff}}I} \quad (2.20)$$

ระยะโก่งซึ่งหาได้จาก Timoshenko beam theory คือ

$$w = \frac{PL^3}{48EI} \left[1 + 1.2 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (2.21)$$

$$\text{ดังนั้น } E_{\text{eff}} = \frac{E}{1 + 1.2 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2} \quad (2.22)$$

จากสมการที่ 2.22 จะเห็นว่า ค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นประสิทธิผลเป็น hyperbolic function ของ $\left(\frac{h}{L} \right)^2$ เมื่อเปลี่ยนรูปของสมการที่ 2.22 เป็นสมการเส้นตรงจะได้

$$\frac{\left(\frac{L}{h} \right)^2}{E_{\text{eff}}} = \frac{1.2}{G} + \frac{1}{E} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \quad (2.23)$$

เมื่อทำการทดลองโดยวิธี static bending test วัดระยะโก่งแล้วแทนค่าในสมการที่ 2.20 ก็จะได้ค่า E_{eff} ออกมาสำหรับแต่ละค่าของ L/h แล้วนำมาเขียนเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\frac{\left(\frac{L}{h} \right)^2}{E_{\text{eff}}}$ กับค่า $\left(\frac{L}{h} \right)^2$ ก็สามารถหาค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นกับโมเมนต์ของแรงเฉือนได้โดยที่ความลาดเอียงของเส้นตรงตามสมการที่ 2.23 ก็คือค่าส่วนกลับของ

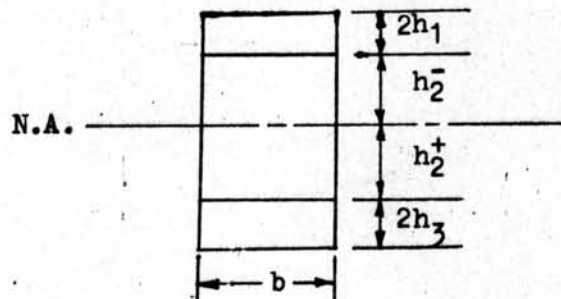
โมเมนต์ของความยืดหยุ่นและจุดค้ำของ เส้นนี้กับแกนในแนวตั้งก็คือค่า $\frac{1}{6}$

2.3 การปรับแต่งสูตรที่ได้จาก classical beam theory มาใช้กับคานไม้เสริมผิว เมื่อทราบขนาดและรูปร่างของคาน และได้กำหนดความเค้นที่ยอมให้สำหรับไม้ หรือแผ่นประกบ และทราบค่า elastic properties ของไม้และแผ่นประกบแล้ว ก็สามารถหาโมเมนต์ค้ำที่ยอมให้ตามทฤษฎีได้ (13)

$$M = \frac{6_1 \sum EI}{zE_1} \quad (2.24)$$

เนื่องจากสูตรนี้ไม่ได้คิดผลของแรงเฉือนและ local bending moment ในแต่ละชั้นของคานซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการบิดตัวในเนื้อไม้เพราะแรงเฉือน ดังนั้น ถ้าจะใช้สูตรนี้ในการหาความเค้นค้ำ หรือโมเมนต์ค้ำในคาน ความผิดพลาดจะมีมากขึ้นเพียงใดก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของคาน การยึดปลายคาน และสภาพของน้ำหนักบรรทุกที่คานรองรับ ซึ่งจะมีผลทำให้การกระจายความเครียดเฉือนในคานแตกต่างกันออกไปด้วย

2.3.1 โมเมนต์ค้ำของคานไม้เสริมผิว



รูปที่ 2.2 รูปหน้าค้ำของคานไม้เสริมผิว

จากรูปที่ 2.2 ค่าแห่งแกนสะเทินของคานคือ

$$N = \frac{\sum E_i A_i z_i}{\sum E_i A_i} \quad (2.25)$$

เมื่อ E_i คือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นในแต่ละชั้นของคาน

A_i คือค่าพื้นที่หน้าค้ำของคานแต่ละชั้น

z_i คือระยะจากแกนสะเทินไปยังจุดศูนย์กลางมวลของคานแต่ละชั้น

ค่า E_1 สำหรับไม้ก็คือค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นในทางดึง, E_c^+ และโมเมนต์ของความยืดหยุ่นในทางอัด, E_c^- ค่า z_1 สำหรับไม้คือ z_c^+ , z_c^-

Criteria ของโมเมนต์ค้ำขึ้นอยู่กับการคำนวณเค้นดัดที่ยอมให้ของแผ่นประกบหรือของไม้ว่าอย่างไรจะสามารถรับโมเมนต์ค้ำได้น้อยกว่ากัน

ถ้าแผ่นประกบเป็น limiting factor ของคานจะได้อ

$$M = \frac{6_1 \sum E_i I_i}{[h_1 + h_2^-] E_1} \quad (2.26)$$

หรือ

$$M = \frac{6_3 \sum E_i I_i}{[h_3 + h_2^+] E_3} \quad (2.27)$$

เมื่อ 6_1 , 6_3 เป็นค่าความเค้นดึงหรือความเค้นอัดที่ยอมให้ของแผ่นประกบ

ถ้าไม้เป็น limiting factor ในทางดึงจะได้อ

$$M = \frac{6_2^+ \sum E_i I_i}{h_2^+ E_2} \quad (2.28)$$

เนื่องจากค่าโมเมนต์ของความยืดหยุ่นประสิทธิผลของไม้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความยาวช่วงคานกับความลึก ดังนั้นเมื่อแผ่นประกบมีโมเมนต์ของความยืดหยุ่นสูงกว่าเนื้อไม้ ก็จะทำให้ค่าความลึกประสิทธิผลของคานเพิ่มขึ้นดังนี้

ให้ I_t เป็น moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดสำหรับคานที่มีความลึกประสิทธิผล h_t จะได้อ

$$I_t = I_c + I_f \left[\frac{E_f}{E_c} \right] = \frac{bh_t^3}{12}$$

ดังนั้น

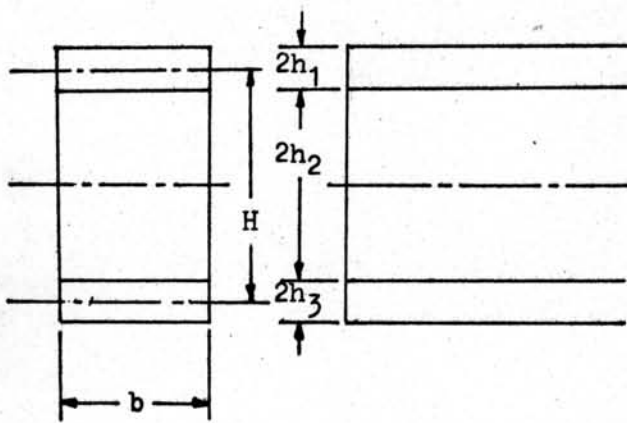
$$h_t = \sqrt[3]{\frac{I_c + I_f \left[\frac{E_f}{E_c} \right]}{b/12}} \quad (2.29)$$

เมื่อ I_c คือ moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดส่วนที่เป็นไม้

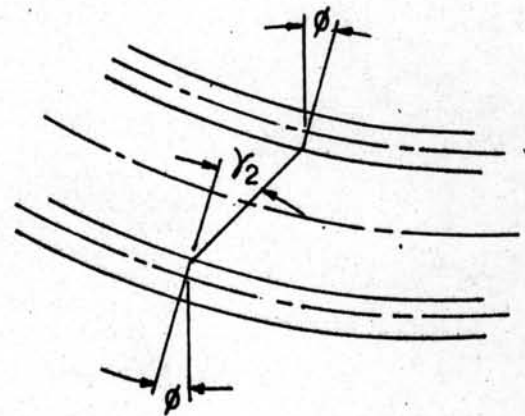
I_f คือ moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดส่วนที่เป็นแผ่นประกบ

2.4 ทฤษฎีการโก่งงอของคานไม้เสริมผิว จากผลการวิเคราะห์คานสอกใส่

ในกรณีที่คานไม้เสริมผิวใช้แผ่นประกบหนา การปรับแต่งให้คานเป็นวัสดุเนื้อเดียว โดยใช้ความลึกประสิทธิภาพแทนความลึกจริงของคาน หรือใช้โมเมนต์ของความยืดหยุ่นประสิทธิภาพ แทนโมเมนต์ของความยืดหยุ่นจริงของคาน จะมีข้อผิดพลาดมากขึ้น เพราะผลของการโก่งงอเนื่องจาก local bending moment จะมีมากขึ้นเมื่อใช้แผ่นประกบหนา ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้จึง เปรียบเทียบผลการทดลองกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์คานสอกใส่ ซึ่งพิจารณาผลของ local bending moment ในแต่ละชั้นของคานด้วย



ก. รูปร่างของคานก่อนได้รับน้ำหนักบรรทุก



ข. รูปร่างของคานหลังจากได้รับน้ำหนักบรรทุก

รูปที่ 2.3 รูปร่างของคานสอกใส่ ก่อนและหลังจากได้รับน้ำหนักบรรทุก

เมื่อคานได้รับน้ำหนักบรรทุก จะสมมุติว่า ระยะเวลาที่ตั้งฉากกับแกนสะเทินเดิมของแต่ละชั้น จะเลื่อนไปจากตำแหน่งเดิมแบบ translation และ rotation พร้อมกัน และสมมุติว่า ไม่เกิดการยีกตัวและหดตัวในแนวตามขวางกับแกนสะเทิน จากข้อสมมุติดังนี้ ก็สามารถหาพลังงานของคาน หลังจากได้รับน้ำหนักบรรทุกคือ (14)

ก. พลังงานเนื่องจากการยีกตัวและหดตัวในแนวแกนสะเทินของแต่ละชั้น คือ

$$U = \frac{1}{2}k_1 \int_0^L (u_1')^2 dx + \frac{1}{2}k_2 \int_0^L (u_2')^2 dx + \frac{1}{2}k_3 \int_0^L (u_3')^2 dx \quad (2.30)$$

ข. พลังงานเนื่องจากการคัก ในแต่ละชั้นของคาน คือ

$$V = \frac{1}{2}B_1 \int_0^L (\phi_1')^2 dx + \frac{1}{2}B_2 \int_0^L (\phi_2')^2 dx + \frac{1}{2}B_3 \int_0^L (\phi_3')^2 dx \quad (2.31)$$

ค. พลังงานเนื่องมาจากแรงเฉือนในแต่ละชั้นของคาน คือ

$$S = \frac{1}{2}G_1 \int_A 2h_1 \gamma_1^2 dA + \frac{1}{2}G_2 \int_A 2h_2 \gamma_2^2 dA + \frac{1}{2}G_3 \int_A 2h_3 \gamma_3^2 dA \quad (2.32)$$

เมื่อ $K_i = E_i A_i$

$u_i =$ displacement ในแนวแกน x

$B_i = E_i I_i$ หรือความเกร็งในแต่ละชั้นของคาน

$\phi_i = \frac{\partial w_i}{\partial x}$ หรือมุมปิกตัวในแต่ละชั้นของคาน

$\gamma_i =$ ความเครียดเฉือนในแต่ละชั้นของคาน

สมมุติให้

$$\frac{1}{2}K_2 \int_0^L (u_2')^2 dx = 0$$

$$\frac{1}{2}B_2 \int_0^L (\phi_2')^2 dx = 0$$

$$\frac{1}{2}G_1 \int_A 2h_1 \gamma_1^2 dA + \frac{1}{2}G_3 \int_A 2h_3 \gamma_3^2 dA = 0$$

เพราะเทอมเหล่านี้มีค่าน้อย เมื่อเทียบกับค่าอื่นที่เหลือในแต่ละสมการ ดังนั้นจากสมการที่ 2.30 ถึงสมการที่ 2.32 เมื่อลดจำนวนเทอมลงตามข้อสมมุติ จะได้

$$U = \frac{1}{2}K_1 \int (u_1')^2 dx + \frac{1}{2}K_3 \int (u_3')^2 dx \quad (2.33)$$

$$V = \frac{1}{2}B_1 \int_0^L (\phi_1')^2 dx + \frac{1}{2}B_3 \int_0^L (\phi_3')^2 dx \quad (2.34)$$

$$S = \frac{1}{2}G_2 \int_A 2h_2 \gamma_2^2 dA \quad (2.35)$$

จากรูปร่างของคานที่กำหนด เมื่อสมมุติว่า แต่ละชั้นของคานมีระยะโค้งเท่ากันจะได้

$$2h_2 \gamma_2 = u_1 - h_1 \phi - u_3 - h_3 \phi - 2h_2 \phi \quad (2.36)$$

ดังนั้น สมการที่ 2.35 เขียนใหม่ได้เป็น

$$S = \frac{1}{2} \int_A \frac{G_2}{2h_2} (u_1 - h_1 \phi - u_3 - h_3 \phi - 2h_2 \phi)^2 dA \quad (2.37)$$

งานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุก $q(x)$ คือ

$$W = \int_0^L q(x) w dx \quad (2.38)$$

จากวิธี variations of potential energy,

$$\delta (U + V + S - W) = 0$$

จะได้ governing equations 3 สมการ สำหรับตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ

u_1, u_3 และ ϕ ดังนี้

$$-K_1 u_1'' + \frac{G_2 b}{2h_2} (u_1 - u_3 - H\phi) = 0 \quad (2.39)$$

$$-K_3 u_3'' - \frac{G_2 b}{2h_2} (u_1 - u_3 - H\phi) = 0 \quad (2.40)$$

$$(B_1 + B_3) \phi'' + \frac{G_2 H b}{2h_2} (u_1' - u_3' - H\phi') - q = 0 \quad (2.41)$$

เมื่อนำสมการที่ 2.39 บวกกับสมการที่ 2.40 จะได้

$$K_1 u_1'' + K_3 u_3'' = 0 \quad (2.42)$$

คุณสมบัติสมการที่ 2.39 ด้วย K_3 และคุณสมบัติสมการที่ 2.40 ด้วย K_1 แล้วลบกันได้

$$(u_1 - u_3)'' - \frac{G_2 b}{2h_2} \left[\frac{K_1 + K_3}{K_1 K_3} \right] (u_1 - u_3 - H\phi) = 0 \quad (2.43)$$

จากสมการที่ 2.43 และสมการที่ 2.41 ได้

$$(u_1 - u_3)'' = \frac{q'2h_2}{G_2 Hb} - \frac{(B_1 + B_3)2h_2}{G_2 Hb} \phi^{iv} + H\phi'' \quad (2.44)$$

แทนค่า $(u_1 - u_3)''$ ลงในสมการที่ 2.43 จะได้

$$(u_1 - u_3) = H\phi + \frac{2h_2 K_1 K_3}{G_2 (K_1 + K_3) b} \left[\frac{q'2h_2}{G_2 Hb} - \frac{(B_1 + B_3)2h_2}{G_2 Hb} \phi^{iv} + H\phi'' \right] \quad (2.45)$$

differentiate สมการที่ 2.45 แล้วแทนค่าในสมการที่ 2.41 เพื่อหาค่า w ได้

$$w^{vi} - w^{iv} g(1 + Y) - \frac{q''}{B_1 + B_3} + \frac{qg}{B_1 + B_3} = 0 \quad (2.46)$$

$$\text{เมื่อให้ } g = \frac{G_2 b}{2h_2} \left[\frac{K_1 + K_3}{K_1 K_3} \right] \quad (2.47)$$

$$\text{และ } Y = \frac{K_1 K_3 H^2}{(K_1 + K_3)(B_1 + B_3)} \quad (2.48)$$

ตัวอย่าง solutions ของสมการที่ 2.46

ก. Both ends fixed, uniform load.

B.C.'s ; $q(x) = q_0 =$ ทั่วคงที่

$$\text{ณ } x = \pm \frac{L}{2},$$

จะได้ $w = w' = z = 0$

จากสมการที่ 2.46 จะได้

$$w^{vi} - w^{iv} g(1 + Y) + \frac{q_0 g}{B_1 + B_3} = 0 \quad (2.49)$$

solution ของสมการนี้คือ

$$w = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 e^{kx} + C_5 e^{-kx} + \frac{q_0 x^4}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \quad (2.50)$$

เมื่อ $k = g(1 + Y)$

เนื่องจาก w เป็น even function ดังนั้น $C_1 = C_3 = 0$

สมการที่ 2.50 จะลดลงเหลือ

$$w = C_0 + C_2 x^2 + C_6 \cosh kx + \frac{q_0 x^4}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \quad (2.51)$$

หาค่าตัวคงที่จาก boundary conditions ได้

$$C_6 = \frac{q_0 YL}{2(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[\frac{1}{k^3 \sinh \frac{kL}{2}} \right]$$

$$C_2 = -\frac{1}{L} \left[\frac{q_0 L^3}{48(B_1 + B_3)(1 + Y)} + C_6(k) \sinh \frac{kL}{2} \right]$$

$$C_0 = \frac{L}{4} \left[\frac{q_0 L^3}{48(B_1 + B_3)(1 + Y)} + C_6(k) \sinh \frac{kL}{2} \right] - \frac{q_0 L^4}{16 \times 24(B_1 + B_3)(1 + Y)} - C_6 \cosh \frac{kL}{2}$$

แทนค่าตัวคงที่เหล่านี้ ลงในสมการที่ 2.51 ได้

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{q_0 x^4}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} - x^2 \left[\frac{q_0 L^2}{48(B_1 + B_3)(1 + Y)} \right. \\
 & + C_6 \left(\frac{k}{L} \right) \sinh \frac{kL}{2} \left[+ \frac{q_0 L^4}{16 \cdot 24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \right. \\
 & \left. \left. + C_6 \left[\cosh kx + \left(\frac{kL}{4} \right) \sinh \frac{kL}{2} - \cosh \frac{kL}{2} \right] \right] \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

๗. Simple supports, uniform load.

B.C.'s ; $q(x) = q_0 =$ ทั่วคงที่

$$\text{ณ } x = \pm \frac{L}{2}$$

จะได้ $w = w'' = u_1' = u_3' = 0$

ทั่วคงที่ในสมการที่ 2.51 สำหรับสภาพบริเวณแบบนี้คือ

$$C_6 = \frac{q_0 Y}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[\frac{1}{k^4 \cosh \frac{kL}{2}} \right]$$

$$C_2 = \frac{-q_0 L^2}{16(B_1 + B_3)(1 + Y)} - \frac{q_0 Y k^{-2}}{2(B_1 + B_3)(1 + Y)}$$

$$C_0 = \frac{q_0 L^4}{16 \times 24(B_1 + B_3)(1 + Y)} - \frac{q_0 Y}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} - C_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

แทนค่าทั่วคงที่เหล่านี้ลงในสมการที่ 2.51 จะได้

$$\begin{aligned}
 w(x) = & - \frac{q_0 L^4}{16 \times 24(B_1 + B_3)(1 + Y)} - \frac{q_0 Y k^{-4}}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \\
 & + \frac{q_0}{2(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[\frac{L^2}{8} + \frac{Y}{k^2} \right] \frac{L^2}{4} - \frac{q_0 x^2}{2(B_1 + B_3)(1 + Y)} \\
 & \times \left[\frac{L^2}{8} + \frac{Y}{k^2} \right] + \frac{q_0}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[\frac{\cosh kx}{k^4 \cosh \frac{kL}{2}} \right] \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{q_0 x^4}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \quad (2.53)$$

ความเค้นค้ำในคาน

ความเค้นค้ำที่ผิวนอกของแผ่นประกบ คือ

$$\sigma_3 = E_3(u_3' - h_3\phi') \quad (2.54)$$

เนื่องจาก $u_1 = -\frac{K_3}{K_1} u_3$

ดังนั้น $(u_1 - u_3)' = -\frac{u_3'(K_1 + K_3)}{K_1}$ (2.55)

จากสมการที่ 2.41 เปลี่ยนรูปใหม่ได้

$$(u_1 - u_3)' = \frac{H}{gY} \left(\frac{q}{B_1 + B_3} - \phi'' \right) + H\phi' \quad (2.56)$$

ดังนั้น ค่าความเค้นค้ำที่ผิวนอกของแผ่นประกบ คือ

$$\sigma_3 = -E_3 \left[h_3\phi' + \frac{K_1 H}{(K_1 + K_3)gY} \left(\frac{q}{B_1 + B_3} - \phi'' + gY\phi' \right) \right] \quad (2.57)$$

เมื่อ q เป็นค่าน้ำหนักบรรทุกแบบสม่ำเสมอ และลักษณะการยึดปลายคานเป็นแบบ simple supports จะได้ค่าความเค้นค้ำที่ผิวนอกของแผ่นประกบ คือ

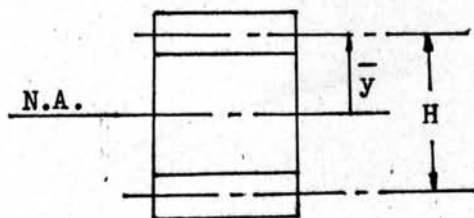
$$\sigma_3 = -E_3 \left\{ - \left[h_3 \frac{q_0}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left(\frac{L^2}{8} + \frac{Y}{k^2} - \frac{x^2}{2} - \frac{Y}{k^2} x \frac{\cosh kx}{\cosh \frac{kL}{2}} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{K_1 H q_0}{(K_1 + K_3)(B_1 + B_3)(1 + Y)} x \left[\left(1 - \frac{\cosh kx}{\cosh \frac{kL}{2}} \right) \left(\frac{1}{k^2} \right) - \frac{L^2}{8} \right] \right. \\ \left. + \frac{x^2}{2} \right\} \quad (2.58)$$

เมื่อ q เป็นค่าน้ำหนักบรรทุกทุกแบบสม่ำเสมอ และลักษณะการยึดปลายคานเป็นแบบ both ends fixed จะได้ค่าความเค้นค้ำที่ผิวนอกของแผ่นประกบ คือ

$$\sigma_3 = -E_3 \left\{ h_3 \phi' + \frac{K_1 H q_0}{(K_1 + K_3)(B_1 + B_3)(1 + Y)} \right. \\ \left. \times \left[\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{24} + \frac{(2 \sinh \frac{kL}{2} - kL \cosh kx)}{2k^2 \sinh \frac{kL}{2}} \right] \right\} \quad (2.59)$$

$$\text{เมื่อ } \phi' = \frac{q_0}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left\{ -\frac{L^2}{24} + \frac{Y}{k^2} \left[\left(\frac{kL}{2}\right) \frac{\cosh kx}{\sinh \frac{kL}{2}} - 1 \right] \right\}$$

เมื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของระยะโค้ง และความเค้นค้ำในคานที่ได้จากการวิเคราะห์เมื่อคิดผลของแรงเฉือน และผลของ local bending moment กับค่าที่ได้จาก classical theory ของคานสอดได้ เนื่องจากค่า B_1 , B_3 และ B_2 คือค่าความเกร็งเมื่อเทียบกับแกนสะเทินของแต่ละชั้นของคาน และจากทฤษฎีพื้นฐานของคานสอดได้ ค่าความเกร็งในการค้ำ คือ $B_1 I_1$ โดยเทียบกับแกนสะเทินของคาน



รูปที่ 2.4 การกำหนดค่าแทนแกนสะเทินของคานสอดได้

จากรูปที่ 2.4 จะได้

$$\bar{y} = \frac{K_3}{K_1 + K_3} H \\ \sum E_i I_i = B_1 + B_3 + K_3 (H - \bar{y})^2 + K_1 \bar{y}^2 \\ = (B_1 + B_3) \left[1 + \frac{K_1 K_3 H^2}{(K_1 + K_3)(B_1 + B_3)} \right] \\ = (B_1 + B_3)(1 + Y) \quad (2.60)$$

เมื่อไม่คิดผลของแรงเฉือน คือให้ $G = \infty$ จะได้สูตรของระยะโก่งสำหรับคานในลักษณะ simple supports, uniform load คือ

$$w_0 = \frac{q_0}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[\frac{5L^4}{16} - \frac{3L^2x^2}{2} + x^4 \right] \quad (2.61)$$

และสำหรับคานในลักษณะ both ends fixed, uniform load,

$$w_0 = \frac{q_0}{24(B_1 + B_3)(1 + Y)} \left[x^4 - \frac{L^2x^2}{2} + \frac{L^4}{16} \right] \quad (2.62)$$

ความเค้นค้ำที่ผิวนอกของแผ่นประกบ เมื่อไม่คิดผลของแรงเฉือน คือให้ $G = \infty$ สำหรับคานในลักษณะ simple supports, uniform load,

$$\delta_0 = E_3 \left(h_3 + \frac{K_1 H}{K_1 + K_3} \right) \left[\frac{L^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right] \frac{q_0}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \quad (2.63)$$

สำหรับคานในลักษณะ both ends fixed, uniform load,

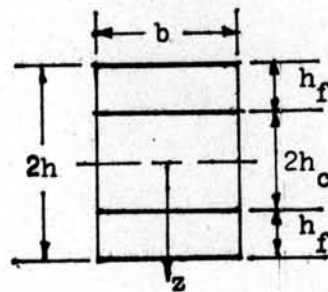
$$\delta_0 = E_3 \left(h_3 + \frac{K_1 H}{K_1 + K_3} \right) \left[\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{24} \right] \frac{q_0}{(B_1 + B_3)(1 + Y)} \quad (2.64)$$

การเปรียบเทียบระยะโก่ง และความเค้นค้ำในคาน เมื่อคิดผลเนื่องจากแรงเฉือน ภาย กับค่าที่ได้จากการสมมุติให้ค่าโมเมนต์ของแรงเฉือนเป็น อินฟินิตี้ ตามสมการที่ 2.19 และ

$$\text{อัตราส่วนความเค้นค้ำ, } \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{\text{ความเค้นค้ำของแผ่นประกบ เมื่อคิดผลของแรงเฉือน}}{\text{ความเค้นค้ำเมื่อสมมุติให้ } G = \infty} \quad (2.65)$$

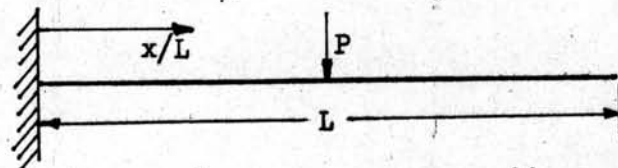
ในการคำนวณออกแบคานไม้เสริมผิวที่มีแผ่นประกบข้าง สามารถใช้ทฤษฎีนี้ได้ สะดวกขึ้น โดยหาระยะโก่งและความเค้นค้ำจากทฤษฎีพื้นฐานของคานสองไส้ ซึ่งสมมุติให้โมเมนต์ของแรงเฉือน สำหรับไม้และแผ่นประกบ เป็นอินฟินิตี้ แล้วใช้ค่าอัตราส่วนระยะโก่ง หรืออัตราส่วนความเค้นค้ำ จากตารางที่ ข-1 ถึง ข-4 มาเป็นตัวปรับแต่ง ก็จะได้ค่าที่ถูกต้องยิ่งขึ้น

Dusan Krajcinovic (15) ได้วิเคราะห์คานสอดใส่โดยวิธี variational of potential energy เพื่อหา governing equations สำหรับคานที่มีแผ่นประกบเท่ากัน และสมมุติให้ แกนสะเทินอยู่กึ่งกลางคานพอดี ในการวิเคราะห์นี้ ได้ศึกษาผลของแรงเฉือนในแผ่นประกบด้วย สำหรับ solutions ของ governing equations ของคานในสภาพ simple supports, center load และ both ends fixed, center load นั้น Krajcinovic (16) ใช้วิธี transfer matrix ทหาระยะโค้งและความเค้นในคานได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 รูปหน้าตัดของคานสอดใส่ที่มีแผ่นประกบเท่ากัน

ก. คานยื่นที่มีแรงกระทำเป็นจุด ที่กึ่งกลางคาน

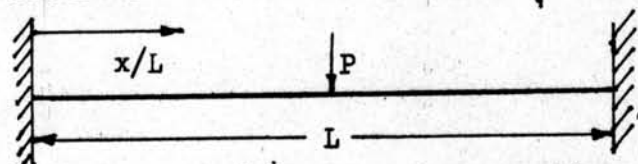


รูปที่ 2.6 คานยื่น มีแรงกระทำเป็นจุด ที่กึ่งกลางคาน

ระยะโค้งที่จุดปลายคาน คือ

$$w = \frac{PL^3}{E_f I_c} \left[\frac{5}{48} + \frac{K_2 I_e}{2\lambda^2 A_c I_o} - \frac{K_1^3 I_e}{\lambda^3 A_c^2 I_o} (1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}) \right] \quad (2.66)$$

ข. คานยึดแน่นที่ปลายทั้งสองข้าง มีแรงกระทำเป็นจุด ที่กึ่งกลางคาน



รูปที่ 2.7 คานยึดแน่น มีแรงกระทำเป็นจุด ที่กึ่งกลางคาน

ระยะโก่งที่จุดกึ่งกลางคาน คือ

$$w = \frac{PL^3}{E_f I_e} \left[\frac{1}{24} + \frac{K_2 I_e}{2\lambda^2 A_e I_o} - \frac{K_1^2 I_e}{\lambda^3 I_o A_e^3} (1 - e^{-\lambda}) \right] \quad (2.67)$$

ความเค้นคดในคาน หาได้จากสูตร

$$\sigma = \frac{Mz}{I_e} + \frac{M_o \bar{z}}{I_o} \quad (2.68)$$

เมื่อกำหนดให้ $I_e = \frac{2b}{3} \left[m_1 h_c^3 + h_f (h^2 + h_f^2 + h h_f) \right]$

$$A_e = (m_2 A_c + A_f)$$

$$K_1 = h_c (1 + n - m_2) A_f$$

$$K_2 = h_c \left[h_c (1 + n)^2 + m_2 h_f A_f \right]$$

$$I_o = \frac{1}{3} h_c^2 h_f^2 \left[m_1 h_c + (1 - n + n^2) \right] A_f$$

$$n = \frac{2m_1 h_c^2 + h_f (2h + h_c)}{h (2h + h_c)}$$

$$m_1 = \frac{E_c}{E_f}$$

$$m_2 = \frac{G_c}{G_f}$$

$$\lambda^2 = \frac{G_f L^2}{E_f I_o A_e} (K_2 A_e - K_1^2)$$

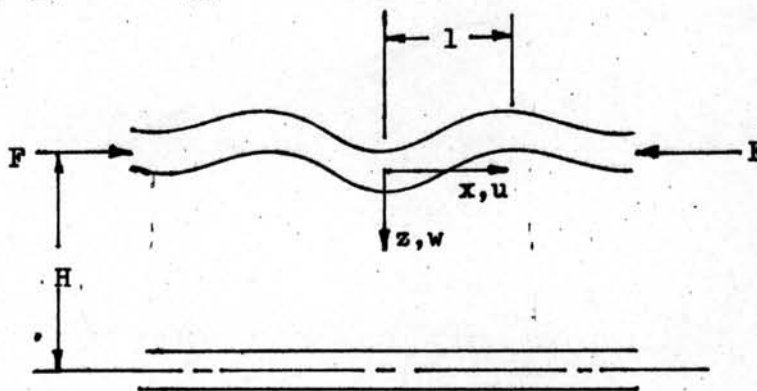
$$\bar{z} = \begin{cases} -h_f z & ; z \leq h_c \\ h_c (1 + n)(z - h_c) - h_c h_f & ; z > h_c \end{cases}$$

2.5 Flexural Wrinkling

ขอบเขตความสามารถในการรับแรงอัดของแผ่นประกบ คือ แรงวิกฤติพอดิ ที่จะเริ่มทำให้เกิดการยุบตัวของแผ่นประกบ ในการวิเคราะห์หาแรงวิกฤตินี้ มีอยู่หลายทฤษฎีด้วยกัน แต่ส่วนใหญ่มีจุดมุ่งหมายที่จะหาแรงวิกฤติสำหรับเสาสอดใส่ ซึ่งอาจจะสมมุติให้เกิดรอยยุบ ของแผ่นประกบทั้งสองหน้าพร้อมกัน และการเกิดรอยยุบนี้ จะสมมาตรหรือไม่สมมาตรก็ได้ แล้วแต่กรณี ในการวิเคราะห์หาแรงวิกฤติ สำหรับผิวประกบค้ำรับแรงอัดของคานไม้เสริมฝิวนั้น จะแตกต่างจากการวิเคราะห์สำหรับเสาสอดใส่ ซึ่งได้รับแรงอัดจนทำให้เกิดรอยยุบนบนแผ่นประกบ ทั้งสองข้างพร้อมกัน แต่สำหรับคาน เมื่อได้รับโมเมนต์คัก ก็สมมุติให้แผ่นประกบค้ำรับแรงอัด เป็นเสา มีไม้เป็นตัวรองรับค้ำข้าง และทำหน้าที่เป็นสปริง และวางอยู่บนฐาน คือแผ่นประกบค้ำรับแรงคิง

สมการ differential สำหรับการแปรรูปของแผ่นประกบค้ำรับแรงอัดคือ (17)

$$E_f I_f \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = 0 \quad (2.69)$$



รูปที่ 2.8 ลักษณะการเกิดรอยยุบของผิวประกบค้ำรับแรงอัด

- เมื่อ
- E_f = โมดูลัสของความยืดหยุ่น ของแผ่นประกบ
 - I_f = moment of inertia ค่อนหน่วยความกว้างของแผ่นประกบค้ำรับแรงอัด
 - k = spring constant ของไม้ ในแนวความลึกของคาน
 - F = แรงอัดค่อนหน่วยความกว้างของแผ่นประกบค้ำรับแรงอัด

1 = ครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นรอยย่น

ให้ solution ของสมการที่ 2.69 อยู่ในรูปของสมการ

$$w = A \sin ax \quad (2.70)$$

เมื่อ A คือแอมพลิจูดของคลื่นรอยย่น

$$\text{และ } a = \frac{\pi}{l}$$

แทนค่าสมการที่ 2.70 ลงในสมการที่ 2.69 ได้

$$F = E_f I_f a^2 + \frac{k}{a^2} \quad (2.71)$$

สำหรับการ เปลี่ยนรูปของไม้ เมื่อกำหนด Airy stress function, ϕ

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = 0 \quad (2.72)$$

และให้ solution อยู่ในรูปของ

$$\phi(x, z) = f(z) \sin ax \quad (2.73)$$

แทนค่า ϕ จากสมการที่ 2.73 ลงในสมการที่ 2.72 จะได้

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z^4} - 2a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + a^4 f = 0 \quad (2.74)$$

solution ของสมการที่ 2.74 คือ

$$f(z) = C_1 \cosh az + C_2 \sinh az + C_3 z \cosh az + C_4 z \sinh az \quad (2.75)$$

หาค่า C_1, C_2, C_3, C_4 จาก boundary conditions ได้

$$\text{ณ } z = 0; f_z = -q_m \sin ax, \epsilon_x = 0$$

$$\text{ณ } z = H; \epsilon_x = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

เมื่อ q_m คือแอมพลิจูดของแรงกดบนไม้ เนื่องจากการย่นของแผ่นประกบ

ความสัมพันธ์ ระหว่างความเค้นกับความเครียด ในเนื้อไม้คือ

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_c} \left[(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_z \right] \quad (2.76)$$

ความเครียดเฉือน,

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.77)$$

หรือ
$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \quad (2.78)$$

หรือ
$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{G \partial x} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.79)$$

เมื่อ
$$G = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (2.80)$$

ค่าความเค้น ในเทอมของ stress function, ϕ คือ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.81)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.82)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad (2.83)$$

แทนค่าจากสมการที่ 2.76, 2.80 และ 2.83 ลงในสมการที่ 2.79 ได้

$$E_c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -(2 + \nu - \nu^2) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} - (1 - \nu^2) \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (2.84)$$

integrate สมการที่ 2.84 เทียบกับ x ได้

$$E_c \frac{\partial w}{\partial x} = -(2 + \nu - \nu^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - (1 - \nu^2) \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (2.85)$$

จากสมการที่ 2.76, 2.82, 2.85 และ boundary conditions สามารถหาค่า

c_1, c_2, c_3 และ c_4 ใต้ และเมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ 2.75 แล้วหาค่า stress function, ϕ ใต้

$$\phi = \frac{q_m}{a^2} \sin ax \left\{ \cosh az - \frac{az}{2(1-\nu)} \sinh az - \left[(1-\nu)\theta^2 + \sinh^2 \theta (-6 + 8\nu + 6\nu^2 - 8\nu^3) \right] \times \frac{a}{2(1-\nu)_m} \sinh az - \left[a^2 \sinh^2 \theta (3 - \nu - 4\nu^2) \frac{z \cosh az}{2(1-\nu)_m} \right] \right\} \quad (2.86)$$

$$\text{เมื่อ } m = -a \left[(1+\nu)\theta + (3-\nu-4\nu^2) \sinh \theta \cosh \theta \right] \quad (2.87)$$

$$\text{และ } \theta = aH \quad (2.88)$$

แทนค่า derivatives ของสมการที่ 2.86 ลงในสมการที่ 2.85 แล้ว integrate ใต้

$$w_0 = w \Big|_{z=0} = \frac{\sin ax}{E_c} \cdot \frac{q_m}{2a(1-\nu)_m} \left\{ a(1-\nu) \left[(1+\nu)\theta^2 + (-6 + 8\nu + 6\nu^2 - 8\nu^3) \sinh^2 \theta \right] - (1-\nu-2\nu^2) \left[a \sinh^2 \theta \times (2-\nu+4\nu^2) \right] \right\} \quad (2.89)$$

ค่า spring constant, k คือ

$$k = -\frac{6}{w_0} = q_m \frac{\sin ax}{w_0} \quad (2.90)$$

$$\text{หรือ } k = E_c \theta^2 \frac{f(\theta, \nu)}{H} \quad (2.91)$$

$$\text{เมื่อ } f(\theta, \nu) = \frac{2(1-\nu)_m}{\theta} \left\{ a(1+\nu) \left[(1+\nu)\theta^2 + (-6 + 8\nu + 6\nu^2 - 8\nu^3) \sinh^2 \theta \right] - (1-\nu-2\nu^2) \left[a \sinh^2 \theta \times (3-\nu-4\nu^2) \right] \right\}^{-1} \quad (2.92)$$

เมื่อแทนค่า k จากสมการที่ 2.91 ลงในสมการที่ 2.71 และหาแรงวิกฤติ, F_{cr} ด้วยวิธี variation แรง F เมื่อเทียบกับ θ จะได้

$$2E_f I_f \left(\frac{\theta}{H^2} \right) + E_c H \frac{\partial(\theta, v)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.93)$$

$$\text{หรือ } R = \frac{h_f}{H} \left[\frac{E_f}{E_c} \right]^{1/3} = \frac{6}{\theta} \left[\frac{\partial f(\theta, v)}{\partial \theta} \right]^{1/3} \quad (2.94)$$

เมื่อนำสมการที่ 2.94 ไปเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า R และค่า θ ก็จะได้ลักษณะของเส้นความสัมพันธ์ตามรูปที่ ข-9 และจากสมการที่ 2.71 จะได้

$$\theta_{cr}^0 = \frac{F}{h_f} = \lambda (E_f E_c^2)^{1/3} \quad (2.95)$$

$$\text{เมื่อ } \lambda = \frac{R^2 \theta_{cr}^2}{12} + \frac{f(\theta, v)}{R} \quad (2.96)$$

ในรูปที่ ข-10 จะแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างค่า λ และค่า R ตามสมการที่ 2.96 และความเค้นวิกฤติที่ผิวนอกของแผ่นประกบ คือ

$$\sigma_{cr} = \left(1 + \frac{h_f}{H} \right) \sigma_{cr}^0 \quad (2.97)$$

เมื่อ σ_{cr} คือค่าความเค้นวิกฤติที่ผิวนอกของแผ่นประกบ

σ_{cr}^0 คือค่าความเค้นวิกฤติที่แกนสะเทินของแผ่นประกบ