ไฮเปอร์กราฟพีชคณิต

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นาย เจียมศักดิ์ ตรีศิริรัตน์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ.๒๕๒๓

000513

I15328387

ALGEBRAIC HYPERGRAPHS

MR. JEAMSAK TRISIRIRAT

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1980

Thesis Title Algebraic Hypergraphs

By Mr. Jeamsak Trisirirat

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

S. Bunnag

.... Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

.... Chairman

(Associate Professor Sawai Nualtaranee Ph.D.)

Sidney S. Mitchell

.... Member

(Sidney S.Mitchell Ph.D.)

.... Member

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

Copyright of the Graduate School, Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ไฮเปอร์กราฟพีชคณิต

ชื่อ นายเจียมศักดิ์ ตรีศิริรัตน์

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๒

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อ

เรานิยามไฮเปอร์กราฟว่าเป็นคู่ลำดับ $(V,\mathcal{E})$ โดยที่ V เป็นเซทจำกัดไม่ว่างเปล่า และ $\mathcal{E}$ เป็นเซทของซับเซทของ V เราเรียกสมาชิกของ V และ $\mathcal{E}$ ว่าเป็น จุดยอด และ ขอบ ตามลำดับ ในการศึกษาเรื่องนี้เราจะพิจารณาเฉพาะไฮเปอร์กราฟที่ขอบมีสมาชิกเท่ากัน เราเรียกจำนวนสมาชิกดังกล่าวนี้ว่า ยศของไฮเปอร์กราฟ สำหรับทุก ๆ จุดยอด v ของไฮเปอร์กราฟเราจะสร้างไฮเปอร์กราฟ $H_v = (V_v, \mathcal{E}_v)$ โดยที่ $\mathcal{E}_v = \{E - \{v\} \mid E \in \mathcal{E}$ และ $v \in E\}$ และ $V_v = \cup \mathcal{E}_v$.

ไอโซมอร์ฟิสซึมจากไฮเปอร์กราฟ $(V, \mathcal{E})$ ไปยังไฮเปอร์กราฟ $(V_1, \mathcal{E}_1)$ หมายถึงฟังก์ชั่น หนึ่งต่อหนึ่ง จาก V ไปเต็ม V_1 ซึ่งทุก ๆ ซับเซท A ของ V เราจะได้ว่า A อยู่ใน $\mathcal{E}$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $\psi(A)$ อยู่ใน $\mathcal{E}_1$ เท่านั้น ในที่นี้ $\psi(A)$ หมายถึง $\{\psi(a) \mid a \in A\}$, เราจะเรียกไอโซมอร์ฟิสซึมจากไฮเปอร์กราฟ H ไปยัง H เองว่าออโตมอร์ฟิสซึมของ H เซท $\Gamma(V,\mathcal{E})$ ของบรรดาออโตมอร์ฟิสซึมทั้งหมดเป็นกรุ๊ปภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน

เรากล่าวว่าไฮเปอร์กราฟ $H = (V, \mathcal{E})$ เป็นไฮเปอร์กราฟสม่ำเสมอ ถ้าทุก ๆ สมาชิก u, v ของ V มีไอโซมอร์ฟิสซึม ψ_{uv} จาก H ไปยัง H_v ยิ่งกว่านั้น ถ้ามีระบบของไอโซมอร์ฟิสซึม $(\psi_{uv})_{u,v \in V}$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าทุก ๆ สมาชิก u,v,v' ของ V ถ้า $v \neq v'$ แล้ว $\psi_{uv}(w) \neq \psi_{uv'}(w)$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก w ของ V_u เรากล่าวว่า H เป็นไฮเปอร์กราฟสม่ำเสมอแบบพิเศษ จากนิยามของไฮเปอร์กราฟ เราจะเห็นว่ากราฟก็คือไฮเปอร์กราฟยศ ๒ นั่นเอง ในกรณีของกราฟ ความสม่ำเสมอกับความสม่ำเสมอแบบพิเศษสมมูลย์กัน

ให้ (Q, o) คือควาไซกรุ๊ป และ γ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 เราจะเรียกเซท $\mathcal{A}$ ของ ซับเซทขนาด $\gamma-1$ ของ Q ว่าเป็นเซทที่ใช้การได้ ถ้าสำหรับแต่ละเซท A ใน $\mathcal{A}$ แต่ละสมาชิก a ของ A และแต่ละสมาชิก q ของ Q จะมีสมาชิก $B_{a,q}$ ของ $\mathcal{A}$ ซึ่ง $(\{q\} \cup q \circ A) - \{q \circ a\} = (q \circ a) \circ B_{a,q}$. สำหรับทุก ๆ เซทที่ใช้การได้ $\mathcal{A}$ เราจะสร้างไฮเปอร์กราฟ $(Q, \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$ โดยที่ $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \{\{q\} \cup q \circ A \mid q \in Q$ และ $A \in \mathcal{A}\}$

เราเรียกไฮเปอร์กราฟ $H = (V, \mathcal{E})$ ยศ γ ซึ่ง γ มากกว่าหรือเท่ากับ 2 ว่า ควาไซ-กรุ๊ปไฮเปอร์กราฟถ้ามีโอเปอเรชัน o บน V ซึ่ง (V, o) เป็นควาไซกรุ๊ป และมีเซทที่ใช้การได้ $\mathcal{A}$ ของซับเซทขนาด $\gamma-1$ ของ V ซึ่ง $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ ถ้าสามารถกำหนด o ให้เป็นกรุ๊ป เราจะเรียก H ว่ากรุ๊ปไฮเปอร์กราฟ

ผลลัพธ์ที่สำคัญ ๆ จากการศึกษานี้ได้แก่ทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ไฮเปอร์กราฟยศอย่างน้อย 2 เป็นควาไซกรุ๊ปไฮเปอร์กราฟ เมื่อและก็ต่อเมื่อไฮเปอร์กราฟนั้นเป็นไฮเปอร์กราฟสม่ำเสมอแบบพิเศษ

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ไฮเปอร์กราฟ $H = (V, \mathcal{E})$ ยศอย่างน้อย 2 เป็นกรุ๊ปไฮเปอร์กราฟเมื่อและก็ต่อเมื่อ ออโตมอร์ฟิสซึมกรุ๊ปของ H มีซับกรุ๊ป Δ อันดับ $|V|$ ซึ่ง Δ ทรานซิทีฟบน V

Thesis Title Algebraic Hypergraphs

Name Mr. Jeamsak Trisirirat

Thesis Advisor Associate Professor Dr. Virool Boonyasombat

Department Mathematics

Academic Year 1979

ABSTRACT

A hypergraph is defined to be an ordered pair $(V, \mathcal{E})$, where V is a finite non-empty set and $\mathcal{E}$ is a set of subset of V. Elements of V and $\mathcal{E}$ are called vertices and edges of $(V, \mathcal{E})$ respectively. In this study we shall consider only hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ in which every edge has the same cardinality. This cardinality is known as the rank of H. To each vertex v of hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ we associate a hypergraph $H_v = (V_v, \mathcal{E}_v)$, where $\mathcal{E}_v = \{E - \{v\} \mid E \in \mathcal{E} \text{ and } v \in E\}$ and $V_v = \cup \mathcal{E}_v$.

By an isomorphism from a hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ onto a hypergraph $H_1 = (V_1, \mathcal{E}_1)$ we mean any one-to-one mapping ψ from V onto V_1 such that for each a subset A of V, A belongs to $\mathcal{E}$ if and only if $\psi(A)$ belongs to $\mathcal{E}_1$, where $\psi(A) = \{\psi(a) \mid a \in A\}$. If ψ is an isomorphism from H onto itself, then ψ is called an automorphism of H. The set $\Gamma(V, \mathcal{E})$ of all automorphisms forms a group under composition.

A hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ is said to be regular if for every u, v in V, there exists an isomorphism ψ_{uv} from H_u onto H_v. In addition if a system $(\psi_{uv})_{u,v \in V}$ can be chosen such that for each u, v, v' in V if $v \neq v'$ then $\psi_{uv}(w) \neq \psi_{uv'}(w)$ for all w in V_u, we say that H is specially regular. Note that graphs are hypergraphs of rank 2. For graph, it turns

out that being regular and specially regular are equivalent.

Let (Q, o) be a quasi-group and $\gamma \geq 2$ be a positive integer. We shall say that a set $\mathcal{A}$ of $(\gamma-1)$-subsets of Q is admissible if for each A in $\mathcal{A}$, each a in A and each q in Q, then there exists $B_{a,q}$ in $\mathcal{A}$ such that $(\{q\} \cup q \circ A) - \{q \circ a\} = (q \circ a) \circ B_{a,q}$. For each admissible set $\mathcal{A}$, we associate a hypergraph $(Q, \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$, where $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \{\{q\} \cup q \circ A \mid q \in Q \text{ and } A \in \mathcal{A}\}$.

A hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ of rank $r \geq 2$ will be said to be a quasi-group hypergraph if there exists a binary operation o on V such that (V, o) is a quasi-group and there exists an admissible set $\mathcal{A}$ of $(\gamma-1)$-subsets of V such that $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. If o can be chosen such that (V, o) is a group, then H is call group hypergraph.

Our main results of our investigations are following theorems.

<u>Theorem I</u> A hypergraph of rank at least 2 is a quasi-group hypergraph if and only if it is specially regular.

<u>Theorem II</u> A hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ of rank at least 2 is group hypergraph if and only if its automorphism group contains a subgroup Δ of order $|V|$ such that Δ acts transitively on V.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his helpful supervision during the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of lecturers for their previous valuable lectures while studying.

My very great respect to my father and mother for their encouragement and support throughout my graduate study.

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS