



1. งานในอดีต

ในอดีต การออกแบบหลังคาเปลือกบางรูปไฮเปอร์โบลอยด์หรือเรียกอย่างย่อว่า หลังคาเปลือกบางรูปไฮปาร์ จะทำโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) เป็นส่วนใหญ่ สำหรับเปลือกบางแบบตื้น (shallow shell) ที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) ต่อพื้นที่ภาพฉาย (projected area) และมีการรองรับ (support) ที่เหมาะสม ทฤษฎีเมมเบรนจะให้ผลว่า มีความเค้นเฉือนสม่ำเสมอเกิดขึ้นใน หลังคาเปลือกบางรูปไฮปาร์ และมีการเปลี่ยนแปลงของแรงในแนวแกนของขอบรองรับ เป็นแบบเส้นตรง แต่โดยทั่วไปแล้วจะสังเกตได้ว่า สภาพของแรงที่กระทำจริงๆกับเปลือกบาง และลักษณะการ สู่ร่างของหลังคาเปลือกบางรูปไฮปาร์นั้นมีความขัดแย้งกับทางด้านทฤษฎีเมมเบรนซึ่งได้สมมติให้ความ เค้นคัตมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เมื่อได้คำนวณหาความหนาของหลังคาเปลือกบางโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน แล้ว จะต้องเพิ่มความหนาขึ้นจากที่คำนวณได้โดยอาศัยประสบการณ์ทางด้านการปฏิบัติงานเพื่อให้หลัง คาสามารถรับแรงที่ทำให้เกิดความเค้นคัตได้ ด้วยเหตุนี้เองจึงมีความจำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์ หา ความเค้นคัตของหลังคาเปลือกบางรูปไฮปาร์ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ ต่อพื้นที่ภาพ ฉาย และมีการรองรับที่มักจะใช้กันในทางปฏิบัติ เพื่อที่จะให้ได้คำตอบที่ดียิ่งขึ้นกว่าการใช้ทฤษฎีเมม เบรนแต่เพียงอย่างเดียว

สมการของเปลือกบางได้ถูกเขียนขึ้นโดยบีลส์และซอร์ (BELES and SOARE)¹ และ เคราส์ (KRAUS)² ซึ่งเป็นสมการสำหรับเปลือกบางทั่วไป ฟลัคกี (FLÜGGE)³ รามาสวามิ

¹Beles,A.A. and Soare,M.V. "Berechnung von Schalenträgwerken" (Bauverlag GmbH. Wiesbaden und Berlin , 1972)

²Kraus,H. "Thin Elastic Shells" (John Wiley and Sons , 1967)

³Flügge,W. "Stresses in Shells" (Berlin: Springer-Verlag,1973)

(RAMASWAMY)⁴ และ วลาซอฟ (VLASOV)⁵ ได้เขียนสมการของเปลือกบางทั่วไป และสมการของเปลือกบางแบบคั้นเอาไว้ แต่มิได้ทำการแก้สมการหาคำตอบของเปลือกบางรูปไฮปาร์โวกด้วย ปาร์มี (PARME)⁶ ได้หาคำตอบของเปลือกบางรูปไฮปาร์โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน และใช้วิธีไล่คานที่ขอบของเปลือกบางเพื่อให้มีความแข็งแรงพอที่จะรับแรงดึงหรือแรงกดได้ เขาคิดว่า มีความเค้นดัดเกิดขึ้นเฉพาะที่ขอบของเปลือกบางเท่านั้นเนื้อที่ส่วนใหญ่จะไม่มีความเค้นดัดเกิดขึ้น ดังนั้นเขาจึงไม่คิดความเค้นดัดเข้ามาเกี่ยวข้องกับสมการของเขา โดยวิธีนี้เขาพบว่า เปลือกบางที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉายจะไม่มีแรงกระทำในแนวตั้งฉาก กับขอบของเปลือกบาง (normal stress resultant) แต่ที่บริเวณขอบจะมีแรงเฉือนในแนวสัมผัสกับขอบและมีค่าสม่ำเสมอ คานที่ขอบของเปลือกบางจะทำหน้าที่รับแรงเฉือนที่เกิดขึ้นเอาไว้ซึ่งเป็นลักษณะของการเกิดแรงเฉือนเพียงอย่างเดียว (pure shear) ราโอ (RAO)⁷ ได้ใช้ทฤษฎีเมมเบรนกับเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ หาคำตอบที่แน่นอนได้โดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series) แต่เขาให้เหตุผลว่าการใช้ออนุกรมฟูเรียร์นั้นคำตอบที่ได้จะคอนเวิร์จ (converge) ซ้ำไม่เหมาะที่จะใช้ในการคำนวณหาความเค้น จึงควรที่จะใช้วิธี นิวเมอริคอลอนาลิส (Numerical Analysis) แทน แล้วแก้สมการโดยใช้ไฟไนต์ดิฟเฟอเรน (Finite Difference) แคนดีลา (CANDELA)⁸ ก็ใช้ทฤษฎีเมมเบรนหาคำตอบของเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่

⁴Ramaswamy, G.S. "Design and Construction of Concrete Shell Roofs" (New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., 1968)

⁵Vlasov, V.Z. "General Theory of Shells and Its Application in Engineering" (Washington D.C.: NASA)

⁶Parme, A.L. "Hyperbolic Paraboloids and Other Shells of Double Curvature" Proc. of the ASCE Journal of the Structural Division N ST 5 (Sept. 1956) pp. 1057-1 to 32.

⁷Rao, M.N.K. "Analysis of the General Hyperbolic Paraboloid Shell" Indian Concrete Journal v.33 No.12 (Dec. 1959) pp. 450-454.

⁸Candela, F. "General Formulas for Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloidal Shells" Journal of the American Concrete Institute Proc. V.57 (Oct. 1960) pp. 353-371.

อยู่ภายใต้้น้ำหนักของตัวเองโดยใช้ไฟไนท์เอลละเมนต์ (Finite Elements) โรเธิร์ต (ROTHERT)⁹ ก็ใช้ทฤษฎีเมมเบรนกับเปลือกบางรูปไฮปาร์เช่นกัน

ฟลักก็และคอนราด (FLÜGGE and CONRAD)¹⁰ ได้หาคำตอบของเปลือกบางแบบดื้นที่อยู่ภายใต้แรงที่กระทำเป็นจุดโดยคิดโมเมนต์ดัดเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้ระหว่างทรงกระบอกดื้น ทรงกลมดื้น ไฮเปอร์โบลอยด์และโครงสร้างแผ่นแบน (plate)

อปแลนด์และโปโปฟ (APELAND and POPOV)¹¹ ได้หาคำตอบของเปลือกบางแปลง (translational shell) ที่รวมความเค้นดัดเข้าไปด้วย โดยการแปลงเปลือกบางรูปไฮปาร์แล้วใช้วิธีคิดแบบเดียวกับการคิดเปลือกบางรูปทรงกระบอกเพื่อช่วยให้หาคำตอบได้ง่ายขึ้น แต่เขาใช้สภาพของขอบ (boundary condition) ที่ไม่เป็นจริง คือ เขาให้ความเค้นเฉือนที่ขอบมีค่าเป็นศูนย์เพื่อที่จะหาคำตอบได้ง่ายขึ้น เช็ทท์และท็อตเทนแฮม (CHETTY and TOTTENHAM)¹² ได้วิเคราะห์ความเค้นดัดของเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉายโดยมีการรองรับแบบธรรมดา (simply supported) และแบบยึดแน่น โดยใช้วิธีหาคำตอบโดยประมาณ เขาให้เหตุผลว่าการหาคำตอบโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์คู่ (Double Fourier Series) หรือการคิดให้เปลือกบางรูปไฮปาร์เป็นรูปทรงกระบอก จะได้สภาพของขอบที่ไม่เป็นจริง เขาจึงเลือกใช้วิธีวาริเอชัน (Variational Method) หาคำตอบ โดยอาศัยสมการของวลาซอฟและบองการ์ด (BONGARD) แต่วิธีในการหาคำตอบของเขายังไม่ใช่วิธีที่สะดวกในการใช้นัก

⁹Rothert, H. "Zur Membrantheorie der schiefwinkligen hyperbolischen Paraboloidschale in Asymptotendarstellung" Ingenieur-Archiv (1971) pp. 304-310.

¹⁰Flügge, W. and Conrad, D.A. "A Note on the Calculation of Shallow Shells" Trans. of the ASME Series E Journal of Applied Mechanics (Dec. 1959) pp. 683-685.

¹¹Apeland, K. and Popov, E.P. "Analysis of Bending Stresses in Translational Shells" International Colloquim on Simplified Calculations Method (Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1962) pp. 9-43.

¹²Chetty, S.M.K. and Tottenham, H. "An Investigation into the Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells" Indian Concrete Journal V.38 No.7 (Jul. 1964) pp. 248-258.

แอปแลนด์¹³ ได้วิเคราะห์ความเค้นดัดของเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ โดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของโคไซน์ (cosine) และได้สรุปว่า เมื่อเปลือกบางอยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ ถ้าขอบของเปลือกบางมีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระจะมีค่าความเค้นแบบเดียวกับที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนและคานที่ขอบของเปลือกบางจะต้องรับความเค้นเฉือนเอาไว้ให้ได้ ถ้าเปลือกบางตื้นมาก ๆ นั้นคืออัตราส่วนของส่วนที่โค้งขึ้นต่อความหนาของเปลือกบางมีค่าน้อย ความเค้นเฉือนจะเป็นสัดส่วนกับส่วนที่โค้งขึ้น ถ้าเปลือกบางมีลักษณะใกล้เคียงเป็นโครงสร้างแผ่นแบนมากขึ้น ความเค้นเฉือนจะหมดไปและเปลือกบางจะทำหน้าที่รับแต่เพียงความเค้นดัดเท่านั้น

ซอร์ (SOARE)¹⁴ ได้ใช้วิธีนิวเมอริคอลลอนาลิสในการหาความเค้นดัดของเปลือกบาง รูปไฮปาร์โดยใช้วิธีไฟไนท์ดิฟเฟอเรนเชียลและเกอร์สเทล (RUSSELL and GERSTLE)^{15, 16} ให้แนวทางสำหรับการออกแบบเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่อยู่บนฐานรองรับที่มุมทั้งสอง และมุมทั้งสองของเปลือกบาง โดยใช้ไฟไนท์ดิฟเฟอเรนเชียลแล้วเขียนเป็นกราฟออกมาเพื่อใช้สำหรับการออกแบบจูโบอิ (TSUBOI)¹⁷ ได้ทำการวิเคราะห์เปลือกบางรูปไฮปาร์บนฐานรองรับที่มุมทั้งสอง ตามทฤษฎีของวลาซอพโดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ที่จุดแล้วได้ผลสรุปออกมาว่า ความเค้นดัดที่เกิดขึ้นมีอยู่ทั่วทั้งเปลือก

¹³ Apeland, K. "On the Analysis of Bending Stresses in Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shells" World Conference on Shell Structures (National Academy of Sciences - National Research Council Publication No. 1187, 1964) pp. 639-650.

¹⁴ Soare, M. " A Numerical Approach to the Bending Theory of Hypar Shells-I, II" Indian Concrete Journal V.40 No.2,3 (Feb. , Mar. 1966) pp. 63-70 , 113-119.

¹⁵ Russell, R.R. and Gerstle, K.H. "Bending of Hyperbolic Paraboloid Structures" Proc. of the ASCE Journal of the Structural Division N ST 3 (Jun. 1967) pp. 181-199.

¹⁶ Russell, R.R. and Gerstle, K.H. "Hyperbolic Paraboloid Structures on Four Supports" Proc. of the ASCE Journal of the Structural Division N ST 4 (Apr. '1968) pp. 995-1010.

¹⁷ Tsuboi, Y. "Stress Analysis of a Hyperbolic Paraboloidal Shell Supported at Four Corners" Bulletin of the IASS No. 36 (Dec. 1968) pp. 55-60.

บาง และมีค่ามากกว่าความเค้นที่คำนวณได้โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน

ไอยนการ์และสรินิวาสัน (IYENGAR and SRINIVASAN)¹⁸ ได้แสดงวิธีวิเคราะห์เปลือกบางรูปไฮปาร์ที่รองรับแบบธรรมดาและแบบยึดแน่นโดยใช้นุกรมฟูเรียร์คูณแล้วใช้ผลรวมของอนุกรม 3, 4 และ 5 เทอม พบว่าอนุกรมคอนเวจทีมากและได้ค่าประมาณออกมาเป็นที่น่าพอใจ

ฮาดิด (HADID)¹⁹ หาค่าความเค้นดัดของเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ มีการรองรับแบบธรรมดาและแบบยึดแน่น และได้ผลสอดคล้องกับของเช็ทที่โรเทิร์ต²⁰ ก็ได้พิจารณาหาค่าความเค้นดัดโดยประมาณของเปลือกบางรูปไฮปาร์โดยใช้วิธีนิวเมอริคอลลอนาลิสซิส กูเรียนและวาร์กีส (KURIAN and VARGHESE)²¹ พยายามทำให้การหาค่าความเค้นดัดง่ายขึ้น โดยการคิดว่าเปลือกบางเป็นโครงสร้างแผ่นแบน คาลรา (KALRA)²² ใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนทาคำตอบแล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการทดลองปรากฏว่าได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

เตอร์ค (TURK)²³ ใช้วิธีของเช็ทที่และที่อดเทนแฮมมาแก้ปัญหาของเปลือกบางรูปไฮปาร์ และได้ผลว่าสำหรับเปลือกบางที่ตื้นมากผลของความเค้นดัดจะมีค่ามากเมื่อเทียบกับความเค้น ในแนว

¹⁸Iyengar, K.T.S.R. and Srinivasan, R.S. "Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shell" The Structural Engineer V.46 No.12 (Dec. 1968) pp. 397-401.

¹⁹Hadid, H.A. "Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells" International Colloquium on Progress of Shell Structures in the Last 10 Years and Its Future Development IASS Session VI (Sept. - Oct. 1969) pp. 1-19.

²⁰Rothert, H. "On the Bending Theory of Hyperbolic Paraboloid Shells Bounded by Two Sets of Oblique Characteristics" Bulletin of the IASS No.45 (Mar. 1971) pp. 47-56.

²¹Kurian, N.P. and Varghese, P.C. "A Simplified Approach to the Bending of Umbrella Shell, and Single Hypar and Plate on Elastic Foundation" Indian Concrete Journal V.47 No.1 (Jan. 1973) pp.30-34.

²²Kalra, M.L. "Analysis of Hypar Umbrella Shells by Finite Difference Technique" Bulletin of the IASS No.53 (Dec. 1973) pp.45-55.

²³Turk, I.A. "Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shell Roofs" M.Eng.Thesis Asian Institute of Technology (1973).

ระนาบ แต่ถ้าเปลือกบางลึกลงผลของความเค้นดัดจะมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเค้นในแนวระนาบ นอกจากนั้น แรงเฉือนสูงสุดที่ทำได้โดยการวิเคราะห์ความเค้นดัดจะมีค่ามากกว่าที่ทำได้โดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริเวณที่อยู่ใกล้กับมุมของเปลือกบาง

2. ปัญหา

การออกแบบหลังคาเปลือกบางรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์โดยรวมเอาความเค้นดัดเข้าไปด้วย จะได้คำตอบที่แน่นอนทำให้เป็นการช่วยลดอันตรายที่จะเกิดแก่ทรัพย์สินและชีวิตมนุษย์อันเนื่องมาจากการวิบัติของหลังคาเปลือกบาง ทั้งยังเป็นการช่วยส่งเสริมให้มีการใช้หลังคาเปลือกบางรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ซึ่งมีความสวยงามทางด้านสถาปัตยกรรมมากยิ่งขึ้นอีกด้วย

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็คือเพื่อที่จะหาวิธีการออกแบบหลังคาเปลือกบางรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ให้สะดวกยิ่งขึ้นกว่าที่ใช้อยู่ในปัจจุบันโดยจะรวมเอาความเค้นดัดเข้าไปด้วยเพื่อที่จะให้ได้คำตอบที่แน่นอนยิ่งขึ้นแทนการใช้ทฤษฎีเมมเบรนในการออกแบบ โดยการทำการทราฟเพื่อใช้ในการออกแบบ ปัญหาที่มีดังนี้คือ

หลังคาเปลือกบางรูปไฮปาร์ตังอยู่บนแปลนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านทั้งสองยาว a และ b ถูกกระทำด้วยแรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉาย ให้ขอบทั้งสี่ของหลังคานี้ถูกยึดแน่นด้วยคาน (edge beam) ซึ่งไม่สามารถที่จะรับความเค้นในแนวระนาบได้ ต้องการหาความเค้นต่างๆ และ ดีฟเล็คชัน (deflection) ที่เกิดขึ้นบนหลังคาเปลือกบางรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์นี้

3. วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเริ่มต้นด้วยการสำรวจบทความต่างๆ เท่าที่มีอยู่ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2498 จนถึงปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับเปลือกบางรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ จากนั้นจึงทำการหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของเปลือกบางแบบดัดรูปไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ที่รวมความเค้นดัดเข้าไปด้วย แล้วจึงทำการหาคำตอบโดยใช้วิธีของกาลเลอกิน (GALERKIN) หาคำตอบของเปลือกบางที่อยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉาย และรองรับด้วยการยึดขอบให้แน่นซึ่งใช้กันอยู่ทั่วไปทางด้าน

การปฏิบัติงาน

ในวิธีของกาเลอกินนี้ ถ้าฟังก์ชันที่สมมติขึ้นสอดคล้องกับสภาพของขอบทั้งหมด และเป็นแบบคอมพลีทซีแควนซ์ (complete sequence) แล้ว คำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบที่แน่นอนถ้าหากว่า ใช้เทอมทั้งหมดในคอมพลีทซีแควนซ์ สำหรับการคำนวณหาค่าต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณหาค่าเหล่านี้โดยใช้จำนวนเทอมมากพอจนกระทั่งคำตอบที่ได้ค่อนข้าง และ ได้จัดทำเป็นกราฟเอาไว้เพื่อใช้ในการคำนวณออกแบบโดยที่รูปไฮปาร์มีขนาดต่างๆกันจาก a/b เท่ากับ 1.0 จนถึง 2.0 และ c/h จาก 10 จนถึง 30.