บทที่ 3

THEORETICAL CONSIDERATION

การวิเคราะห์ท่อน้ำเสริมด้วยไม้ไผ่ที่รับน้ำหนักตามข้อกำหนดของ ASTM นี้ จะใช้ทฤษฎีของเชลล์เปลือกบางซึ่งจะเป็นปัญหาชนิด plane strain เท่านั้น และสมการซึ่งครอบคลุมการดัดของเชลล์รูปทรงกระบอกสามารถเขียนอยู่ในเทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางต่าง ๆ u, v, และ w (รูปที่ 1) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1+\nu}{2a}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\nu}{a}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1-\nu^2)\,X}{Eh} \qquad \text{..... (1)}$$

$$\frac{1+\nu}{2a}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial \phi^3}\right)$$

$$+ \frac{h^2}{12a^2}\left[(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \phi^2}\right] = -\frac{(1-\nu^2)}{Eh}\,Y \qquad \text{..... (2)}$$

$$\frac{\nu}{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a^2 \partial \phi} - \frac{w}{a^2} - \frac{h^2}{12a}\left(a\frac{\partial^4 w}{\partial x \phi} + \frac{2}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \phi^4}\right)$$

$$- \frac{h^2}{12a}\left(\frac{2-\nu}{a}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 v}{\partial^3 \partial \phi^3}\right) = \frac{(1-\nu^2)\,Z}{Eh} \qquad \text{..... (3)}$$

เมื่อ
- a = เป็นรัศมีของเชลล์รูปทรงกระบอก
- h = เป็นความหนาของเชลล์
- x, ϕ = เป็นแกนโคออดิเนตตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 1
- E = เป็นค่าโมดูลัสแห่งการยืดหยุ่น
- ν = เป็นค่าอัตราส่วนของ poisson
- X, Y, Z = เป็นค่าน้ำหนักในทิศทางต่าง ๆ ต่อหน่วยพื้นที่

ในกรณีที่เป็นน้ำหนักกระทำสม่ำเสมอเป็นเส้นตรงบนเชลล์ตามรูปที่ 2ก. ไม่มีการแปรเปลี่ยนของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งทุก ๆ ตัวในทิศทางของแกน x, ทุก ๆ ค่า ในสมการข้างบนที่แปรเปลี่ยน โดยเทียบกับ x จะหายไป และสำหรับกรณีนี้ ค่าน้ำหนักบรรทุก X, Y และ Z จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น สมการตาม (1), (2) และ (3) กลายเป็น

$$\frac{1-\nu}{2a^2}\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} - \frac{dw}{d\phi} + c^2\left(\frac{d^3w}{d\phi^3} + \frac{d^2v}{d\phi^2}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{dv}{d\phi} - w - c^2\left(\frac{d^4w}{d\phi^4} + \frac{d^3v}{d\phi^3}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

ที่ซึ่ง $c^2 = \dfrac{h^2}{12a^2}$

สมการที่ 4 จะเป็นจริงไปทันทีเมื่อ u มีค่าเป็นศูนย์หรือเป็นค่าคงที่ รวมสมการที่ (5) และ (6) เข้าด้วยกัน ได้

$$\frac{d^6v}{d\phi^6} + \frac{2d^4v}{d\phi^4} + \frac{d^2v}{d\phi^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\frac{d^6w}{d\phi^6} + \frac{2d^4w}{d\phi^4} + \frac{d^2w}{d\phi^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ผลลัพธ์จาก (7) และ (8)

$$v = \frac{pa^3}{D}\left[c_1 + c_2\phi + (c_3\cos\phi + c_4\sin\phi) + \phi(c_5\cos\phi + c_6\sin\phi)\right] \quad (9)$$

$$w = \frac{pa^3}{D}\left[D_1 + D_2\phi + (D_3\cos\phi + D_4\sin\phi) + \phi\,(D_5\cos\phi + D_6\sin\phi)\right] \quad (10)$$

เมื่อ p = น้ำหนักแผ่สม่ำเสมอที่กระทำตามแนวเส้นตรงต่อความยาวของเชลล์

$$D = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$$ เป็นค่า Flexural rigidity

และ $\frac{pa^3}{D}$ = เป็นค่า Displacement parameter.

แทนค่า สมการ (9) และ (10) ลงใน (5) และ (6) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวคงที่ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง v และ w เขียนใหม่ได้ในรูป

$$v = \frac{pa^3}{D}\left[(c_1 + c_2\phi - (c_3 - bc_4)\cos\phi + (c_5 + bc_6)\sin\phi + \phi(c_4\sin\phi - c_6\cos\phi)\right] \quad (11)$$

$$w = \frac{pa^3}{D}\left[c_2 + c_5\cos\phi + c_3\sin\phi + \phi\ c_4\cos\phi + c_6\sin\phi)\right] \quad ....(12)$$

เมื่อ $b = \frac{(1-c^2)}{(1+c^2)}$ และ c_1 ถึง c_6 เป็นค่าตัวคงที่ชุดใหม่ หาค่าได้จากเงื่อนไขของสภาพขอบเขต

สำหรับเชลล์รูปทรงกระบอกที่เป็นท่อน้ำกลมดังรูป 2ก. ซึ่งปลายทั้ง 2 ข้างเปิดโล่งอิสระและรับน้ำหนักชนิดแผ่เป็นแนวเส้นตรงนั้น เนื่องจากว่า มีความสมมาตร จึงสามารถพิจารณาท่อน้ำนั้นเพียงครึ่งเดียว และการวิเคราะห์ปัญหานี้จะเหลือเป็นปัญหาเพียง 2 ขอบเขต AB และ BC ตามที่แสดงไว้ในรูป 2 ข.

พิจารณาค่า v และ w จาก (11), (12) ในขอบเขตแรก คือ AB โดยให้ v เป็น v_1 และ w เป็น w_1 ในขอบเขตนี้ และเปลี่ยนตัวคงที่จาก c_i เป็น A_i เสีย เมื่อ i คือเลขจำนวนเต็ม 1,2,3........

$$v_1 = \left[\frac{pa^3}{D}\ A_1 + A_2\phi - (A_3 - bA_4)\cos\phi + (A_5 + bA_6)\sin\phi\right.$$

$$\left. + \phi(A_4\sin\phi - A_6\cos\phi)\right] \quad .... (13)$$

$$w_1 = \frac{pa^3}{D}\left[A_2+A_5\cos\phi+A_3\sin\phi+\phi(A_4\cos\phi+A_6\sin\phi)\right] \quad .... (14)$$

ที่ซึ่งทิศทางบวกของมุม ϕ ได้แสดงไว้ในรูป 2ข. แล้ว

ทำนองเดียวกัน ให้ค่า v เป็น v_2 และ w เป็น w_2 ในขอบเขตที่สอง BC โดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตร สมการที่ (11) จะเหลือเฉพาะเทอมคี่ (odd Term) และสมการที่ (12) จะเหลือเฉพาะเทอมคู่ (even term) ค่า v_2 และ w_2 จะอยู่ในรูป

$$v_2 = \frac{pa^3}{D}\left[B_1\bar{\phi} + (B_2+6B_3)\sin\bar{\phi} - B_3\bar{\phi}\cos\bar{\phi}\right] \quad .... (15)$$

$$w_2 = \frac{pa^3}{D}\left[B_1+B_2\cos\bar{\phi} + B_3\bar{\phi}\sin\bar{\phi}\right] \quad .... (16)$$

เมื่อ B_1, B_2 และ B_3 เป็นค่าคงที่ที่ใช้แทน c_2, c_5 และ c_6 ตามลำดับ ทิศทางบวกของ ϕ ได้แสดงไว้ในรูป 2 ข.

ความเค้นลัพธ์ (Stress Resultants)

ค่าความเค้นลัพธ์ต่าง ๆ ที่มีทิศทางบวกตามรูปที่ 1 นั้น แสดงออกมาได้ดังนี้

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\phi) \quad ....(17)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_x) \quad ....(18)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{Eh\gamma_{x\phi}}{2(1+\nu)} \quad ....(19)$$

$$M_x = -D(K_x+\nu K_\phi) \quad ....(20)$$

$$M_\phi = -D(K_\phi+\nu K_x) \quad ....(21)$$

$$M_{x\phi} = -M_{\phi x} = D(1-\nu)K_{x\phi} \qquad \text{..........(22)}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial_x} - \frac{1}{a}\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} \qquad \text{..........(23)}$$

$$Q_\phi = \frac{1}{a}\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} \qquad \text{..........(24)}$$

เมื่อ

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \text{..........(25)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{..........(26)}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w\right) \qquad \text{..........(27)}$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{..........(28)}$$

$$K_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{..........(29)}$$

$$K_\phi = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial_x^2}\right) \qquad \text{..........(30)}$$

$$K_{x\phi} = \frac{1}{a}\left(\frac{v}{x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi}\right) \qquad \text{..........(31)}$$

ตามสมการเหล่านี้

D เรียกว่า Flexural rigidity

ε_x ε_ϕ = ค่าความเครียดที่ผิวกลางของเชลล์ในทิศทาง x และ ϕ ตามลำดับ

$\gamma_{x\phi}$ = ความเครียดเฉือนที่ผิวกลาง

K_x, K_ϕ = การเปลี่ยนแปลงความโค้งในทิศทาง x และ ϕ ตามลำดับ

และ $K_{x\phi}$ = การบิดของผิวกลางของเชลล์

จากสมการ (13) และ (14) และความสัมพันธ์ของความเครียดกับความเค้นจาก (17) ถึง (24), ค่าความเค้นลัพธ์ที่ยังมีค่าอยู่ในขอบเขต AB เขียนได้ดังนี้

$$\frac{N_\phi}{p} = (1+b)(A_4\sin\phi - A_6\cos\phi) \qquad \text{..........(32)}$$

$$\frac{N_x}{p} = \frac{\nu N_\phi}{p} \qquad \text{..........(33)}$$

$$\frac{M_\phi}{pa} = -\left[A_2 + (1+b)(A_6\cos\phi - A_4\sin\phi)\right] \qquad \text{..........(34)}$$

$$\frac{M_x}{pa} = \frac{\nu M_\phi}{pa} \qquad \text{..........(35)}$$

$$\frac{Q_\phi}{p} = (1+b)(A_4\cos\phi + A_6\sin\phi) \qquad \text{..........(36)}$$

เหมือนกับขอบเขตที่สอง BC. ค่าความเค้นลัพธ์ต่อไปนี้ได้มาจากการใช้สมการที่ (16)-(25)

$$\frac{N_{\bar\phi}}{p} = -(1+b)B_3\cos\bar\phi \qquad \text{..........(37)}$$

$$\frac{N_{\bar x}}{p} = \frac{\nu N_{\bar\phi}}{p} \qquad \text{..........(38)}$$

$$\frac{M_{\bar\phi}}{pa} = -B_1 + (1+b)B_3\cos\bar\phi \qquad \text{..........(39)}$$

$$\frac{M_x}{pa} = \nu \frac{M_{\bar{\phi}}}{pa} \quad \text{..........(40)}$$

$$\frac{Q_{\bar{\phi}}}{p} = (1+b)\ B_3 \sin \bar{\phi} \quad \text{..........(44)}$$

<u>เงื่อนไขสภาพขอบเขตของการต่อเนื่อง</u>

เงื่อนไขสภาพขอบเขตที่จุด A ในรูป 2 ข. ที่ได้จากความสมมาตร คือ

$$(Q_\phi)_{\phi = 0} = -p/2 \quad \text{..........(42)}$$

$$(v_1)_{\phi_o = 0} = 0 \quad \text{..........(43)}$$

$$(\psi_1)_{\phi=0} = \frac{1}{a}\left(\frac{dw_1}{d\phi} + v_1\right)_{\phi = 0} = 0 \quad \text{..........(44)}$$

เงื่อนไขของสภาพขอบเขตและการต่อเนื่องตรงที่รองรับ B คือ

$$(v_1)_{\phi = \pi-\phi_o} = 0 \quad \text{..........(45)}$$

$$(u_1)_{\phi = \pi-\phi_o} = 0 \quad \text{..........(46)}$$

$$(v_2)_{\bar{\phi} = \pi-\phi_o} = 0 \quad \text{..........(47)}$$

$$(w_2)_{\bar{\phi} = \pi-\phi_o} = 0 \quad \text{..........(48)}$$

$$(M_\phi)_{\phi = \pi-\phi_o} = (M_{\bar{\phi}})_{\bar{\phi} = \phi_o} \quad \text{..........(49)}$$

$$(\psi_1)_{\phi = \pi-\phi} = -(\psi_2)_{\bar{\phi} = \phi_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

ที่ซึ่ง ψ_1 และ ψ_2 เป็นค่าการหมุนของเส้นสัมผัส มีค่าเป็นบวก เมื่ออยู่ในทิศทางของการเพิ่มค่ามุม ϕ และ $\bar{\phi}$ ในช่วง AB และ BC ตามลำดับ

และ ϕ_o คือค่ามุมที่วัดจากระนาบที่สมมาตรไปยังจุดรองรับ

เงื่อนไขของสภาพขอบเขตที่จุด C รูป 2 ข. เนื่องจากการสมมาตรคือ

$$(Q_{\bar{\phi}})_{\bar{\phi} = 0} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

$$(v_2)_{\bar{\phi} = 0} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

$$(\psi_2)_{\bar{\phi} = 0} = \frac{1}{a}\left(\frac{dw_2}{d\phi} + v_2\right)_{\bar{\phi} = 0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

เงื่อนไขสภาพขอบเขตที่จุด C นี้จะเป็นจริงไปทันที เมื่อแทนค่า ลงไปในสมการที่ (15) หรือ (16) และในสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดที่ได้แสดงไว้แล้ว

ดังนั้น ค่าคงที่ 9 ค่า คือ A_1-A_6 และ B_1 ถึง B_3 สามารถหาได้จากสมการแห่งเงื่อนไขของสภาพขอบเขตและของความต่อเนื่อง ที่ได้มาตั้งแต่สมการที่ (42)-(50)

พิจารณาเงื่อนไขของสภาพขอบเขตที่จุด A, จากสมการที่ (42)

$$(Q_{\phi})_{\phi = 0} = \frac{p}{2}$$

แทนค่าในสมการที่(36)- $\frac{p}{2} = p(1+b)(A_4+0)$

$$A_4 = -\frac{1}{2(1+b)} \qquad (1^*)$$

จากสมการ (43)

$$(v_1)_{\phi=0} = 0$$

แทนค่าในสมการ (13) $A_1 - A_3 = -bA_4$

$$= \frac{b}{2(1+b)} \quad \text{(a)}$$

จากสมการ (44)

$$A_1 = -A_4(1+b) = \frac{1+b}{2(1+b)} = \frac{1}{2} \quad (2^*)$$

$$A_3 = \frac{1}{2(1+b)} \quad (3^*)$$

พิจารณาเงื่อนไขของสภาพขอบเขตและการต่อเนื่องที่จุด

จากสมการ (45) แทนลงไปในค่าของ v_1(13) พร้อมทั้งแทนค่า A_1, A_3 และ A_4 และจัดรูปใหม่ได้

$$A_2(\pi-\phi_o) + A_5\sin\phi_o + A_6\left[b\sin\phi_o + (\pi-\phi_o)\cos\phi_o\right] = \frac{(\pi-\phi_o)\sin\phi_o}{2(1+b)} - \left(\frac{1+\cos\phi_o}{2}\right) \quad \text{(b)}$$

จากสมการ (46) แทนลงไปในค่าของ w_1 สมการ (14) ทั้งแทนค่า A_1, A_3 และ A_4 และจัดรูปใหม่ได้

$$A_2 - A_5\cos\phi_o + A_6(\pi-\phi_o)\sin\phi_o = -\left(\frac{\sin\phi_o + (\pi-\phi_o)\cos\phi_o}{2(1+b)}\right) \quad \text{(c)}$$

จากสมการ (47) แทนลงไปในค่าของ v_2 สมการ (15) และจัดรูปใหม่

$$B_1\phi_o + B_2\sin\phi_o + B_3(b\sin\phi_o - \phi_o\cos\phi_o) = 0 \quad \text{(d)}$$

จากสมการ (48) แทนลงในสมการ (16) และจัดรูปใหม่

$$B_1 + B_2\cos\phi_o + B_3\phi_o\sin\phi_o = 0 \qquad (e)$$

จากสมการ (49) แทนลงในสมการ (34) ได้

$$A_2 - A_6(1+b)\left(\cos\phi_o + \frac{\sin\phi_o}{2}\right) = \left[B_1 + (1+b)\,B_3\cos\phi_o\right] \qquad (f)$$

และจากสมการ (50) ให้

$$A_2(\pi-\phi_o) + A_6(1+b)\sin\phi_o + \frac{1+\cos\phi_o}{2} = -\left[B_1\phi_o + B_3\sin\phi_o(1+b)\right] \qquad (g)$$

จากสมการ (b), (c), (d), (e), (f) และ (g) หาค่าตัวคงที่ได้ดังนี้

$$A_6 = \frac{R(1+b\cos\phi_o)(1+\cos\phi_o) - F(1+b)\left[G(1+\cos\phi_o) + j\sin\phi_o\right]}{2(1+b)\left[F(1+b)(G\sin\phi_o - j\cos\phi_o) - R\left[(\pi-\phi_o)+b\sin\phi_o\cos\phi_o\right]\right]} \qquad (4^*)$$

ให้ A_6 ที่ได้จากสมการ (4*) เป็น A_6^*

$$A_2 = \frac{-A_6^*\left[(\pi-\phi_o)+b\sin\phi_o\cos\phi_o\right] - \dfrac{(1+b\cos\phi_o)(1+\cos\phi_o)}{2(1+b)}}{F} = A_2^* \qquad (5^*)$$

$$A_5 = \frac{1}{\cos\phi_o}\left[A_2^* + A_6^*(\pi-\phi_o)\sin\phi_o + \frac{\sin\phi_o + (\pi-\phi_o)\cos\phi_o}{2(1+b)}\right] = A_5^* \qquad (6^*)$$

$$B_3 = \frac{1}{G}\left(A_2^* - A_6^*(1+b)\cos\phi_o + \frac{\sin\phi_o}{2}\right) = B_3^* \qquad (7^*)$$

$$B_1 = \left(\frac{\phi_o - b\sin\phi_o\cos\phi_o}{\phi_o\cos\phi_o - \sin\phi_o}\right) B_3^* = B_1^*$$

และ

$$B_2 = -\left(\frac{B_1^* + B_3^* \phi_o \sin \phi_o}{\cos \phi_o}\right) \tag{9*}$$

$$F = (\pi - \phi_o)\cos \phi_o + \sin \phi_o \tag{h}$$

$$G = \frac{\phi_o - b \sin \phi_o \cos \phi_o}{\phi_o \cos \phi_o - \sin \phi_o} + (1+b)\cos \phi_o \tag{i}$$

$$j = \left(\frac{\phi_o - b \sin \phi_o \cos \phi_o}{\phi_o \cos \phi_o - \sin \phi_o}\right)\phi_o + (1+b)\sin \phi_o \tag{j}$$

$$R = j + G(\pi - \phi_o) \tag{k}$$

จากสมการ (1^*) - (9^*) เป็นค่าของตัวคงที่ ๙ ตัว ที่หาได้จากเงื่อนไขของสภาพขอบเขตและความต่อเนื่องตามสมการที่ (42)-(50) ซึ่งสามารถแทนค่าหาค่าความเค้นลัพธ์ต่าง ๆ ในสมการที่ (32)-(41) ออกมาได้ทันที