หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

บทที่ ๓

ทฤษฎีในการวิจัย

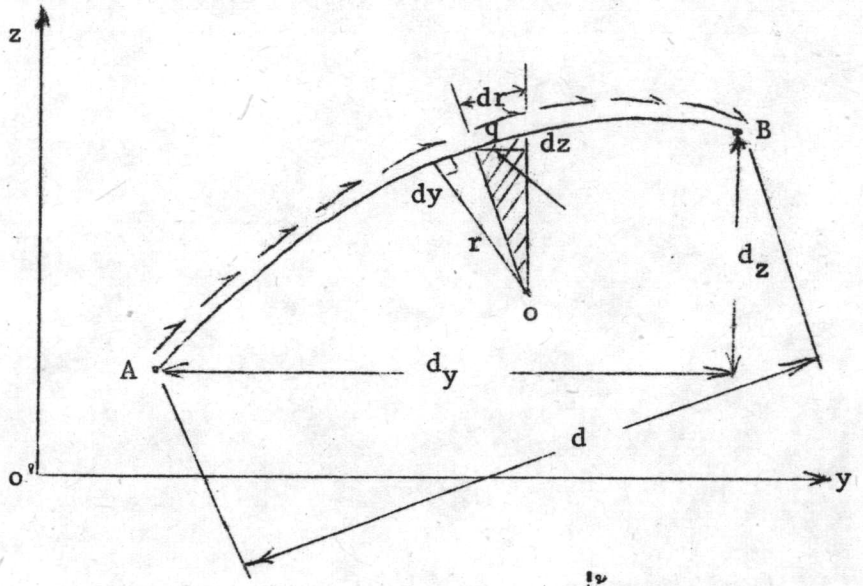
เครื่องบินที่อยู่ในอากาศนั้น ต้องรับแรงต่าง ๆ หลายรูปแบบ แต่แรงที่ทำให้เครื่องบินลอยตัวได้ คือ แรงยก (lift) โครงสร้างของปีกนั้นมีส่วนสำคัญที่จะเป็นเครื่องแสดงว่าส่วนใดของโครงสร้างที่ต้องรับแรงมากน้อยเพียงใด โครงสร้างของเครื่องบินในปัจจุบันนี้ ปีกจะมีโครงสร้างเป็นแบบกึ่งผิวรับแรง หรือ semi-monocoque structure กล่าวคือ ผิวเป็นส่วนที่รับแรง แล้วถ่ายทอดแรงไปสู่ระแนงปีก (stringer) กงปีก (rip หรือ flange) แล้วถ่ายทอดสู่แกนปีก (spar) ในที่สุด

การคำนวณนั้นเราพิจารณาว่าผิวรับแรงที่เกิดขึ้นเท่า ๆ กันตลอด ทิศทางของแรงขนานกับพื้นผิว เรียกแรงนี้ว่าแรงเฉือน (shear force) แรงเฉือนคิดต่อหน่วยพื้นที่ก็คือ ความเค้นแรงเฉือน (shearing stress)ผลคูณของความเค้นแรงเฉือนกับความหนาของแผ่นนั้น คือ shear flow (เชียร์โฟร์)

(การที่จะคำนวณเพื่อหาคุณสมบัติเช่นความหนา ความกว้างยาวของโครงสร้างปีก เราใช้คำนวณจาก shear flowนี้เป็นหลัก)

วัสดุที่นำมาใช้สร้างปีกเครื่องบินนั้น มีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับความกว้างยาวของปีก เราจึงนำเอาทฤษฎีผิวบาง (theory of thin wall) มาใช้ ซึ่งในทฤษฎีนี้ assume ว่า ความเค้นแรงเฉือนมีทิศทางขนานกับแผ่นผิว (wall) ในทุก ๆ ขนาดของความหนา หรือความหนาของแผ่นผิวไม่เป็นส่วนประกอบสำคัญในการคำนวณแรงเฉือนเลย

ปีกเครื่องบินส่วนนอกคือพื้นที่ผิวปีกนั้น มีลักษณะเป็นผิวโค้ง ซึ่งพิจารณาภาคตัดขวาง (cross-section) ดังภาพ ๓.๑



รูป ๓.๑ แสดง Constant shear flow ที่ต้านแรงภายนอก

จากนิยามของ shear flow จะได้

q = shear flow

σ_{xs} = ความเค้น (stress) กระทำบนพื้น x ทิศทางตาม

t = ความหนาของแผ่นผิว (wall thickness)

$$q = \sigma_{xs}\, t \qquad \text{-----(1)}^{7}$$

shear flow ที่คงที่ตลอด รวมทั้งความหนาของพื้นผิวปิก จึงหาแรงเฉือนในระยะ ds บนพื้นผิวได้ = q ds

dy และ dz เป็น component ของระยะ ds ตามแกน y และ z ตามลำดับ

$$\therefore \quad \underline{\text{แรงทางดิ่ง}} \quad R_z = \int_A^B q\, dz \qquad \text{-----(2a)}$$

$$= q\, d_z \qquad \text{-----(2)}$$

$$\underline{\text{และแรงทางระดับ}} \quad R_y = q\, d_y \qquad \text{-----(3)}$$

$$\text{-----(3)}$$

---

7. Robert M. Rivello op.cit., p.204

และ Resultant force $R = qd$ -----(4)

กำหนดจุด 0 เป็นจุดศูนย์ของโมเมนต์ จะมีแรงบิด (Torque) จากแรงนี้คือ

$$M_t = r\ q\ ds \qquad \text{-----(5)}$$

เมื่อ r เป็นระยะตั้งฉากจาก 0 ไป ds เมื่อ q = คงที่

$$M_t = q \int r\ ds \qquad \text{-----(6)}$$

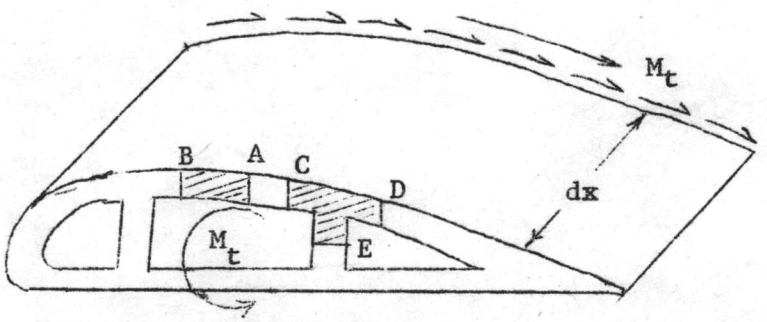
จากรูปพื้นที่ที่แรเงาไว้ $= \frac{rds}{2}$

$$\therefore \quad M_t = 2q \int dA = 2qA \qquad \text{-----(7)}$$

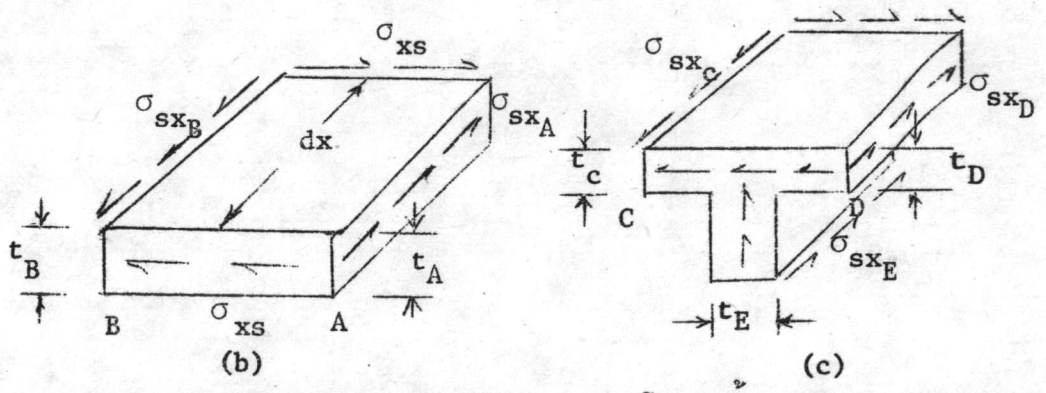
เครื่องหมายของ moment หรือ torque นี้ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็น moment บวก ทิศทางตรงข้ามเป็นลบ

การคำนวณหา shear flow นี้ ในกรณีที่แรงภายนอกที่กระทำเป็น Torsion ซึ่ง assume ว่า เมื่อผิวรับแรงแล้วไม่เกิดอาการดุ้ง (buckle), การ warp และไม่มีความเค้นตามความยาวของปีก ซึ่งทำให้แรงภายในที่สมดุลย์กับ Torsion นี้ เป็นแรงเฉือนอย่างเดียว

การพิจารณา shear flow นั้น เราพิจารณาดังนี้



รูป ๓.๒ (a)



รูป ๓.๒ (a) แสดง Torsion ของโครงสร้างหลาย ๆ cell

(b) แสดง free body ของแผ่นผิว

(c) แสดง free body ของข้อต่อของแผ่นผิว (joint)

การพิจารณาช่วง AB เป็นการพิจารณาแผ่นผิวระหว่างข้อต่อ จากการสมดุลย์ของแรง (force equilibrium)

$$\Sigma F = 0$$

$$\sigma_{xs_A} t_A = \sigma_{xs_B} t_B$$

$$\therefore \quad q_A = q_B$$

นั่นคือ shear flow ในช่วงระหว่างข้อต่อคงที่ตลอด ไม่ว่าความหนาหรือความเค้นแรงเฉือนจะเปลี่ยนไปอย่างใด

การหา shear flow ที่ข้อต่อ (joint) นั้น

$$\sigma_{sx_C} t_C - \sigma_{x_{s_D}} t_D - \sigma_{xs_E} t_E = 0$$

หรือ $q_E = q_C - q_D$

นั่นคือ shear flow ของผิวภายในกับผิวภายนอกนั้น ผลรวมของ shear flow ที่เข้าสู่ joint มีค่าเท่ากับ shear flow ที่ออกจาก joint นั่นเอง

จาก $M_t = 2\sum_{i=1}^{n} q_i A_i$ -----(8)

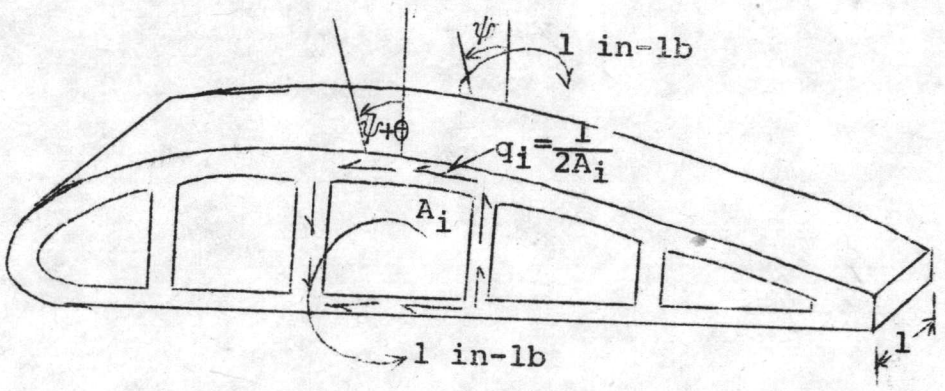
$\therefore \quad q = \frac{M_t}{2A}$ -----(9)

แต่ $q = \sigma_{xs} t$

$\therefore \quad \sigma_{xs} = \frac{M_t}{2At}$ -----(10)

ในกรณีที่หน้าตัดของปีกมีโครงสร้างประกอบด้วย cell ทั้งหมด n cells จะมีค่า unknown ของ q อยู่ n ค่า ขณะนี้มีสมการที่ทราบอยู่เพียงสมการเดียว คือ สมการสมดุลย์ (equilibrium equation) คือสมการ (8) ไม่เพียงพอที่จะแก้ปัญหาได้ จึงจัดได้ว่าเป็นปัญหาแบบ statically indeterminate จำเป็นที่จะต้องสร้างสมการที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องในเรื่องนี้อีก n-1 สมการ โดยการพิจารณาการแปรรูป (defermation) อย่างต่อเนื่องแบบ cell ต่อ cell อันเนื่องมาจาก external torque ที่กระทำ จาก compatibility condition กล่าวคือในหน้าตัดหนึ่ง ๆ นั้น เมื่อได้รับ torque จะมีมุมบิด (angle of twist) θ ต่อหน่วยความยาวเท่ากันหมดทุก ๆ cell และพื้นหน้าตัดยังคงสภาพเป็นพื้นราบอยู่ (plane of cross-section remain plane) ภายหลังจากมีมุมบิดเกิดขึ้น เมื่อ thin-walled structure มี shear flow ค่าหนึ่งกระทำและทำให้เกิดมุมบิดไป θ เราสร้างสมการของ θ ขึ้นมาได้สมการหนึ่ง โดยใช้ principle of Virtual work จากนั้นเราก็สามารถคำนวณหาค่าใน cell อื่น ๆ ที่ใกล้เคียงกันต่อไปได้

จากรูป ๓.๓ แสดงโครงสร้างที่เป็นแบบ multicells มีความยาว ๑ หน่วย มี shear flow distribution q กระทำ มีมุมบิดด้านหลังเป็น ψ ทำให้มุมบิดด้านหน้าเป็น $\psi + \theta$ (shear flow q อาจมีสาเหตุจาก torque, แรงเฉือนทางด้านข้าง (lateral shear force), หรืออิทธิพลของความร้อน



รูป ๓.๓ แสดง unit-load system สำหรับ muticell structure.

เมื่อมี torque กระทำนั้นถ้าให้

ϵ_{xs} = shearing strain เนื่องจาก stress σ_{xs}

G = shear modulus หรือ modulus of rigidity

$$\epsilon_{es} \quad \frac{1}{G}\sigma_{xs} \quad ^{8} \qquad \text{-----(11)}$$

จาก (1) และ(1) จะได้ความสัมพันธ์ของ shear flow และ strain

$$\epsilon_{xs} = \frac{q}{Gt} \qquad \text{-----(12a)}$$

ในการสมดุลย์ torque ตามรูป ๒.๓ พิจารณาว่าเกิด q ใน cell เดียว คือ cell ที่ i มีค่า q_i นอกนั้นเป็นศูนย์

จาก (10) จะได้

$$\bar{\sigma}_{xs} = \frac{1}{2A_i t}$$

---

8. Stephen Timoshenko, Strength of Materials part 1, (New York, D. Van Nostrand Co., Inc., 1966), p.59

Virtual work ของ unit torque เกิดด้านหลักมีค่าเป็น $-\psi$ ขณะที่ unit torque จริง ๆ ที่กระทำบนด้านหน้านั้นเป็น $\psi + \theta$ จาก principle of virtual work จะได้ว่า $\delta W_e = \theta$

เมื่อ W_e = external work

δW_e เป็นผลคูณของ unit load กับ real displacement ที่ unit load กระทำ

จะได้ $\theta = \oint_i \sigma_{xs} \epsilon_{xs} t ds = \oint_i \frac{1}{2A_i t} \frac{q}{Gt} t\, ds$

A_i เป็นพื้นที่ของ cell ที่ i

$$\theta = \frac{1}{2A_i G_1} \int_i \frac{qds}{k'} \quad [9] \qquad \text{-----(12)}$$

G_1 = modulus ที่กำหนดเป็นค่า reference

t' = modulus-weight thickness ซึ่ง

$$t' = \frac{G}{G_1} t \qquad \text{-----(13)}$$

ทิศทางบวกของ q และ ds มีทิศทางตาม unit torque ที่พื้นด้านหน้า ทั้งนี้ work ที่มีทิศทางเดียวกันจะเป็นบวกด้วย สมการที่ (12) นี้ใช้ได้กับ external load หลายรูปแบบไม่เฉพาะ torque เท่านั้น แต่ในกรณีของ torque q มีค่าคงที่ในแต่ละ wall segment ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\theta = \frac{1}{2A_i G_1}\left(q_i \oint_i \frac{ds}{t'} - q_{i-1} \int_{\substack{web \\ i-1,i}} \frac{ds}{t'} - q_{i+1} \iint_{\substack{web \\ i,i+1}} \frac{ds}{k'}\right) \qquad \text{-----(14)}$$

$\underset{i-1,i}{web}$ = ผนังร่วมระหว่าง cell ที่ i-1 และ i

---

9. Robert M. Rivello. op.cit., p.209

สมการ (14) นี้มีประโยชน์มาก เพราะทำให้เราพิจารณา q ได้ทั้งหมด n cells โดยที่ค่า θ คงที่ ซึ่งเท่ากันใน cell ที่ 1 และ cell ที่ i จึงสร้างสมการได้ n-1 สมการ

$$\frac{1}{A_1}\left(q_1 \oint \frac{ds}{t'} - q_2 \int \frac{ds}{t'}\right) = \frac{1}{A_i}\left(q_i \oint \frac{ds}{t'} - q_{i-1} \int_{\text{web } i-1,i} \frac{ds}{t'} - q_{i+1} \int_{\text{web } i,i+1} \frac{ds}{t'}\right) \qquad \text{-----(15)}$$

เมื่อ $2 \leq i \leq n$

Torsional rigidity ของ nonhomogeneous section มีค่า

$$G_1 J' = \frac{M_t}{\theta} \qquad \text{-----(16)}$$

จาก (9) และ (14) single cell structure มีค่า

$$\theta = \frac{M_t}{4A^2 G_1} \oint \frac{ds}{t'} \qquad \text{-----(17)}$$

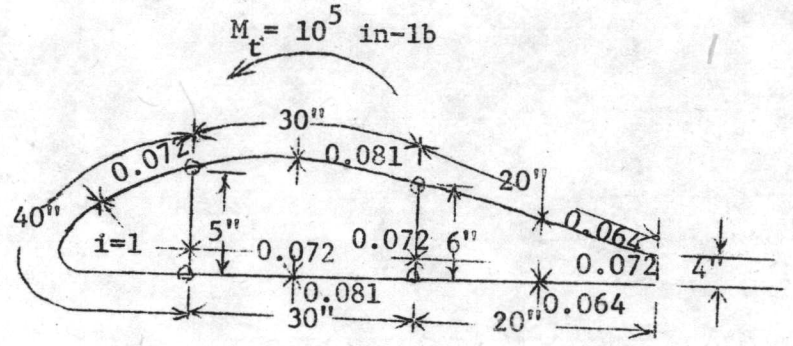
และกรณี homogeneous

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t'}} \qquad \text{-----(18)}$$

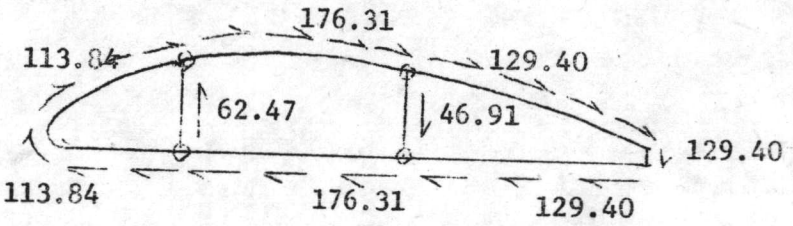
<u>ตัวอย่าง</u> พื้นที่หน้าตัดของปีก บ. ตามรูป ๒.๔ รับ torque 100,000 in-lb. คำนวณหา shear flow และ J

จากสมการ (8) $M_t = 2 \sum_{i=1}^{n} q_i A_i$

$$(2 \times 70)q_i + (2 \times 165)q_2 + (2 \times 100)q_3 = 100{,}000 \text{ ---(a)}$$



(a)



(b)

รูป ๖.๔

(a) แสดงภาคตัดขวางและแรง

(b) shear flow

$$\frac{1}{A_1}\left(q_1 \oint \frac{ds}{t'} - q_2 \int_{1,2}^{web} \frac{ds}{t'}\right) = \frac{1}{70} q_1 \left(\frac{40}{.072} + \frac{5}{.072}\right) - q_2 \frac{5}{.072}$$

เมื่อ $i = 2$ ใช้สมการ (15)

$$\frac{1}{70}\left(\frac{45}{.072}q_1 - \frac{5}{.072}q_2\right) = \frac{1}{165}\left(\frac{30}{.081} + \frac{5}{.072} + \frac{30}{.081} + \frac{6}{.072}\right) - q_1\left(\frac{5}{.072}\right) - \frac{6q_3}{.072} \quad \text{----(b)}$$

เมื่อ i=2 ใช้สมการ (15)

$$\frac{1}{70}\left(\frac{45}{.072}q_1 - \frac{5}{.072}q_2\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{20}{.064} + \frac{6}{.072} + \frac{20}{.064} + \frac{4}{.072}\right) - \frac{6}{.072}q_2 \quad ---(c)$$

จาก (a)

$$140q_1 + 330q_2 + 200q_3 = 100{,}000 \quad ---(a')$$

จาก (b)

$$9.34943q_1 - 6.40832q_2 + 0.50505q_3 = 0 \quad ---(b')$$

จาก (c)

$$8.92856q_1 - 0.15873q_2 - 7.68889q_3 = 0 \quad ---(c')$$

แก้สมการ Simulteneous ทั้ง 3 โดยวิธี Gauss-Jordan ด้วย computer ตามผนวก

ได้ $q_1 = 113.84$ lb/in.

$q_2 = 176.31$ lb/in. Ans.

$q_3 = 129.40$ lb/in.

จากสมการ (14)

$$\theta = \frac{1}{2 \times 70G}\ 113.84\left(\frac{40}{.072} + \frac{5}{.072}\right) - 176.31\ \frac{5}{.072}$$

$$= \frac{420.76}{G} \text{ rad/in.}$$

จาก $J = \frac{M_t}{G}$

$\therefore\ J = \frac{100{,}000}{420.76} = 237.7\ \text{in}^4.$ Ans.