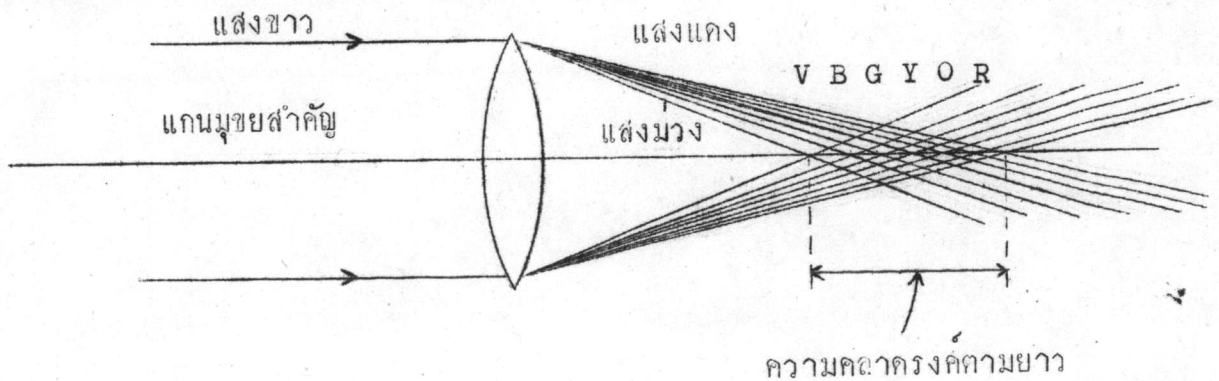




ทฤษฎีการออกแบบเลนส์

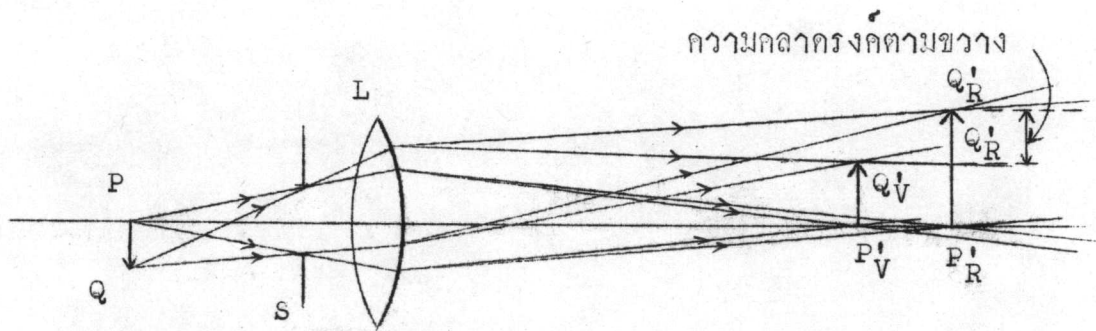
1. ความคลาดทรงสี (1)

จากการศึกษาถึงสมบัติของแก้วพบว่าดัชนีหักเหของแก้วมีค่าเปลี่ยนไปเมื่อเปลี่ยนความยาวคลื่นของแสง กล่าวคือ ดัชนีหักเหของแก้วจะเพิ่มขึ้นเมื่อความยาวคลื่นของแสงลดลง ดังนั้น ถ้ามีแสงขาวขนานกับแกนमुखยสำคัญผ่านเลนส์ แทนที่ภาพจะได้เป็นจุดสว่าง กลับเห็นเป็นจุดสีต่าง ๆ แยกจากกันตามแนวแกนमुखยสำคัญ ดังรูปที่ 2.1 ทั้งนี้เนื่องจากแสงขาวประกอบด้วยแสงสีต่าง ๆ เรียกข้อบกพร่องนี้ว่า ความคลาดทรงสีตามยาว (longitudinal chromatic aberration)



รูปที่ 2.1 ความคลาดทรงสีตามยาวของเลนส์นูนเดี่ยว

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าวัตถุอยู่ในระยะใกล้ แสงแต่ละความยาวคลื่น จะให้ภาพที่มีขนาดต่าง ๆ กัน ความแตกต่างของขนาดภาพที่ได้นี้คือความคลาดทรงคตามขวาง (lateral chromatic aberration) ดังรูปที่ 2.2

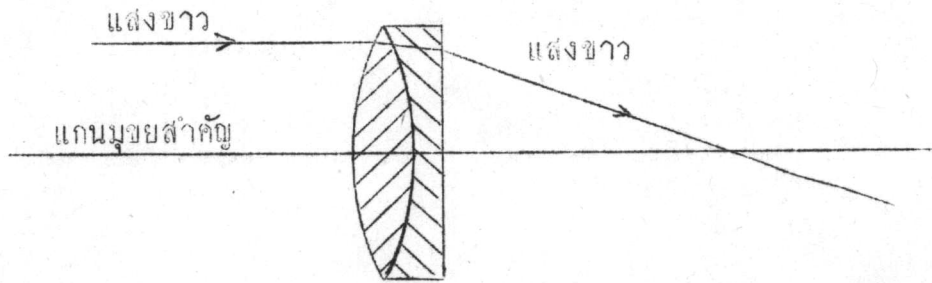


รูปที่ 2.2 ความคลาดทรงคตามขวางของเลนส์นูนเดี่ยว

2. เลนส์อเนก (1)

การแก้ความคลาดทรงคของระบบทัศนศาสตร์มีอยู่หลายวิธีด้วยกัน วิธีที่ง่ายที่สุดคือการใช้เลนส์บางสองอันประกบกัน เลนส์บางอันหนึ่งทำด้วยแก้วควาน (crown glass) ส่วนอีกอันหนึ่งทำด้วยแก้วฟลินท์ (flint glass) เลนส์ที่ทำด้วยแก้วควานจะมีกำลังของเลนส์เป็นบวก และมีค่าเมื่อไม่คิดเครื่องหมายมากกว่ากำลังของเลนส์ที่ทำด้วยแก้วฟลินท์ซึ่งมีกำลังของเลนส์เป็นลบ การกระจายของเลนส์ทั้งสองเท่ากัน แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม ดังนั้น เมื่อนำเลนส์ทั้งสองประกบกันจะได้เลนส์ที่มีกำลังเป็นบวก และมีการกระจายเป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้แสงสีต่าง ๆ เกือบจะมารวมกันที่ตำแหน่งเดียวกัน ดังรูปที่ 2.3 เลนส์คู่ประกบ

ซึ่งแก้ความคลาดทรงคี่นี้ เรียกว่า เลนส์ทรงคี่



รูปที่ 2.3 เลนส์ทรงคี่

ในการออกแบบเลนส์ทรงคี่ เพื่อแก้ความคลาดทรงคี่นั้น โดยทั่วไปนิยมออกแบบให้ทางยาวโฟกัสของเลนส์เนื่องจากแสงแดงและแสงน้ำเงินจากธาตุไฮโดรเจนมีค่าเท่ากัน สเปกตรัมของแสงอาทิตย์มีแสงเหลืองอยู่ระหว่างแสงแดงกับแสงน้ำเงิน และนี่เป็นตาของคนเรารู้สึกไวต่อแสงเหลืองนี้มาก ดังนั้น จึงนิยมใช้ดัชนีหักเหของแก้วสำหรับแสงเหลือง (n_D) เป็นหลักสำหรับการติดตามทางเดินของแสง และใช้ในการกำหนดทางยาวโฟกัสของเลนส์

สำหรับเลนส์บางสองอันประกบกัน ทางยาวโฟกัสรวม (f_D) หรือกำลังของเลนส์รวม (K_D) สำหรับแสงเหลืองหาได้จาก

$$\frac{1}{f_D} = \frac{1}{f'_D} + \frac{1}{f''_D} \quad \text{หรือ} \quad K_D = K'_D + K''_D \quad (2.1)$$

ตัวอักษร D ที่เขียนกำกับไว้ข้างล่าง แสดงว่าปริมาณต่าง ๆ นั้นขึ้นกับดัชนีหักเหของแก้วสำหรับแสงเหลือง

โดยที่ f'_D, K'_D คือ ทางยาวโฟกัส และกำลังของเลนส์แก้วควรวินตามลำดับ

f''_D, K''_D คือ ทางยาวโฟกัส และกำลังของเลนส์แก้วพินิตตามลำดับ

สมการ (2.1) อาจเขียนให้อยู่ในรูปของดัชนีหักเห และรัศมีความโค้งของผิวเลนส์
โค้งดังนี้

$$K_D = (n_D' - 1) \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'} \right) + (n_D'' - 1) \left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right) \quad (2.2)$$

โดยที่ n_D' คือ ดัชนีหักเหของแก้วคราวน์สำหรับแสงเหลือง

R_1', R_2' คือ รัศมีความโค้งทั้งสองผิวของเลนส์แก้วคราวน์

n_D'' คือ ดัชนีหักเหของแก้วฟลินท์สำหรับแสงเหลือง

R_1'', R_2'' คือ รัศมีความโค้งทั้งสองผิวของเลนส์แก้วฟลินท์

กำหนดให้ C คือ ความโค้งของผิวเลนส์ มีค่าเป็นส่วนกลับของรัศมีความโค้ง
จากสมการ (2.2) เขียนใหม่ได้ว่า

$$K_D = (n_D' - 1)(C_1' - C_2') + (n_D'' - 1)(C_1'' - C_2'') \quad (2.3)$$

ในทำนองเดียวกัน กำลังของเลนส์รวมสำหรับแสงแดง และแสงน้ำเงินเขียนได้เป็น

$$K_C = (n_C' - 1)(C_1' - C_2') + (n_C'' - 1)(C_1'' - C_2'') \quad (2.4)$$

$$K_F = (n_F' - 1)(C_1' - C_2') + (n_F'' - 1)(C_1'' - C_2'')$$

โดยที่ K_C คือ กำลังของเลนส์รวมสำหรับแสงแดง

n_C', n_C'' คือ ดัชนีหักเหของแก้วคราวน์และแก้วฟลินท์สำหรับแสงแดงตามลำดับ

K_F คือ กำลังของเลนส์รวมสำหรับแสงน้ำเงิน

n_F', n_F'' คือ ดัชนีหักเหของแก้วคราวน์ และแก้วฟลินท์สำหรับแสงน้ำเงินตามลำดับ

เพื่อที่จะให้ทางยาวโฟกัสรวมเนื่องจากแสงแดงและแสงน้ำเงินมีค่าเท่ากัน กำลังของเลนส์
คู่ประกอบสำหรับแสงแดงและแสงน้ำเงินจะต้องเท่ากันด้วย ดังนั้น จากสมการ (2.4) ได้ว่า

$$(n_C' - 1)(C_1' - C_2') + (n_C'' - 1)(C_1'' - C_2'') = (n_F' - 1)(C_1' - C_2') + (n_F'' - 1)(C_1'' - C_2'')$$

$$\begin{aligned}
(n_C' - 1)(C_1' - C_2') - (n_F' - 1)(C_1' - C_2') &= (n_F'' - 1)(C_1'' - C_2'') + (n_C'' - 1)(C_1'' - C_2'') \\
(n_C' - n_F')(C_1' - C_2') &= (n_F'' - n_C'')(C_1'' - C_2'') \\
- (n_F' - n_C')(C_1' - C_2') &= (n_F'' - n_C'')(C_1'' - C_2'') \\
\frac{C_1' - C_2'}{C_1'' - C_2''} &= - \frac{n_F'' - n_C''}{n_F' - n_C'} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

เนื่องจากว่าผลัดพัทธ์ทางขวามือเป็นลบเสมอ แสดงว่าเลนส์อันหนึ่งต้องเป็นเวก (เลนส์นูน) และเลนส์อีกอันหนึ่งต้องเป็นคบ (เลนส์เว้า)

กำลังของเลนส์บางแต่ละอันสำหรับแสงเหลืองจะเป็นดังนี้

$$K_D' = (n_D' - 1)(C_1' - C_2') \quad \text{และ} \quad K_D'' = (n_D'' - 1)(C_1'' - C_2'') \quad (2.6)$$

นำมาหารกัน จะได้

$$\frac{(C_1' - C_2')}{(C_1'' - C_2'')} = \frac{(n_D'' - 1) K_D'}{(n_D' - 1) K_D''} \quad (2.7)$$

แทนค่าจากสมการ (2.5) ลงในสมการ (2.7) จะได้

$$\frac{K_D''}{K_D'} = - \frac{(n_F' - n_C')(n_D'' - 1)}{(n_F'' - n_C'')(n_D' - 1)}$$

$$\frac{K_D''}{K_D'} = - \frac{(n_D'' - 1)/(n_F'' - n_C'')}{(n_D' - 1)/(n_F' - n_C')}$$

แทนค่าจากสมการ (1.5) ได้ว่า

$$\frac{K_D''}{K_D'} = -\frac{V''}{V'} \quad (2.8)$$

เนื่องจาก ค่าวี มีค่าเป็นบวกเสมอ สมการ (2.8) แสดงให้เห็นว่า กำลังของเลนส์
บางทั้งสองอันจะมีเครื่องหมายต่างกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เลนส์อันหนึ่งเป็นเลนส์นูน
ส่วนอีกอันหนึ่งจะเป็นเลนส์เว้า จากสมการ (2.8) จะได้

$$\frac{K_D'}{V'} + \frac{K_D''}{V''} = 0 \quad \text{หรือ} \quad v'f' + v''f'' = 0 \quad (2.9)$$

นั่นก็คือ การกระจายของเลนส์บางทั้งสองอัน เมื่อรวมกันแล้วจะเป็นศูนย์ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว
ในข้อต้น

เมื่อแทนค่าของ K_D' หรือ K_D'' จากสมการ (2.9) ลงใน (2.1) จะได้ว่า

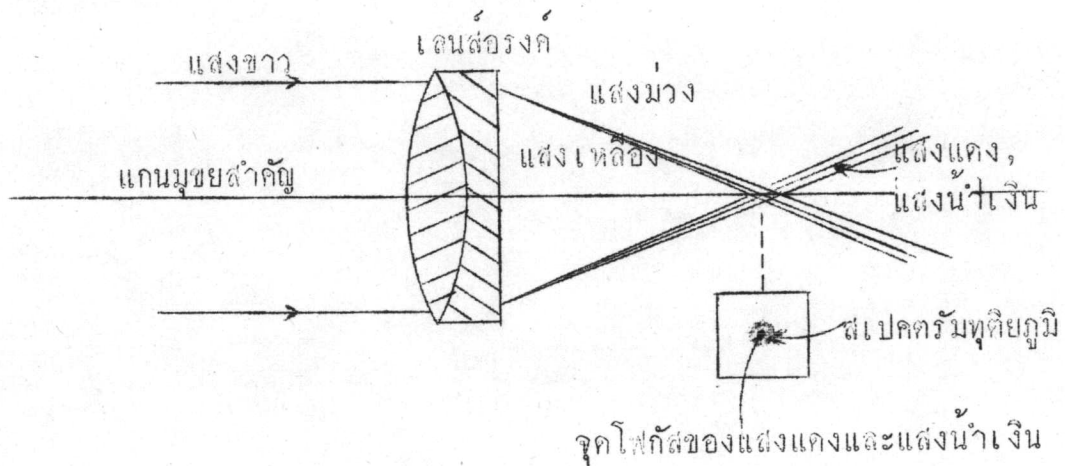
$$K_D' = K_D \frac{V'}{V' - V''} \quad \text{และ} \quad K_D'' = -K_D \frac{V''}{V' - V''} \quad (2.10)$$

ในการคำนวณหาความโค้งของผิวเลนส์ทรงคี่ที่ต้องการ สรุปได้เป็นขั้นตอนดัง
ต่อไปนี้

1. ทางยาวโฟกัสและกำลังของเลนส์รวม ได้จากการกำหนด
2. ทราบค่าคงที่ของแก้วคราวน์ และแก้วฟลินท์ ซึ่งได้แก่ดัชนีหักเหของแก้ว
(n_D) และค่าวีของแก้ว
3. ถ้าไม่ทราบค่าวี สามารถคำนวณได้จากสมการ (1.5)
4. กำลังของเลนส์แต่ละอัน คำนวณได้จากสมการ (2.10)
5. กำหนดความโค้งของผิวเลนส์ผิวใดผิวหนึ่ง หากความโค้งของผิวเลนส์ที่เหลือ
ได้จากสมการ (2.6)

อย่างไรก็ตาม เลนส์ทรงคี่ชนิดคู่ประเภทนี้ไม่สามารถที่จะแก้ไขแสงจุดสีมา
รวมกันที่จุดเดียวกันได้ เพียงแต่แก้ไขแสงแดงและแสงน้ำเงินมารวมกันที่จุดเดียวกันเท่านั้น

ซึ่งทางยาวโฟกัสของแสงทั้งสองจะแตกต่างกันไปจากทางยาวโฟกัสของแสงเหลืองเพียงเล็กน้อย ส่วนแสงสีอื่น ๆ ยังคงปรากฏเป็นวงรอบ ๆ จุดโฟกัสของแสงแดงและแสงน้ำเงิน เรียกสเปกตรัมที่เหลือว่า สเปกตรัมทุติยภูมิ (secondary spectrum) ดังรูปที่ 2.4



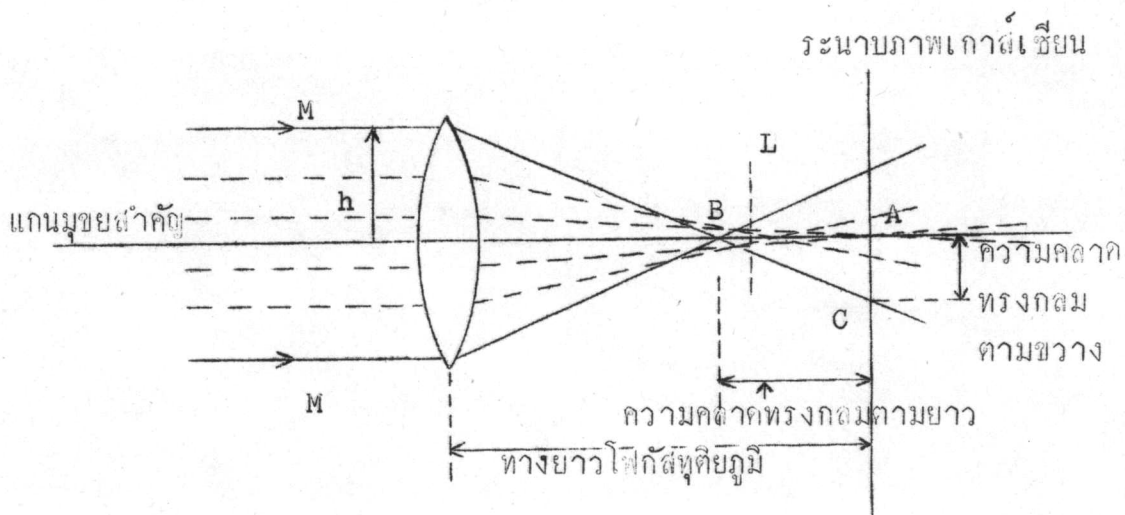
รูปที่ 2.4 สเปกตรัมทุติยภูมิ

3. ความคลาดเอกรงค์

ในหัวข้อที่ 1 ของบทนี้ ได้พิจารณา ระบบทัศนศาสตร์ที่ใช้กับแสงขาว ความคลาดที่ระบบให้ขึ้นเกิดขึ้นเนื่องจากการกระจายแสงของระบบที่มีต่อแสงแต่ละสีในแสงขาวไม่เท่ากัน แต่ถึงแม้ว่าเราจำกัดให้แสงที่ใช้เป็นแสงที่มีความยาวคลื่นค่าเดียว ก็พบว่า ระบบทัศนศาสตร์นั้นยังให้ความคลาดอื่น ๆ อีกมาก ความคลาดเหล่านี้เรียกว่าความคลาดเอกรงค์ (monochromatic aberration)

สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความคลาดเหล่านี้ที่ละเอียด และจะพิจารณาถึงภาพที่ได้เนื่องจากความคลาดแต่ละอย่าง โดยในแต่ละครั้งจะพิจารณา ระบบทัศนศาสตร์นั้นไม่มีความคลาดอย่างอื่นเลย นอกจากความคลาดที่กำลังกล่าวถึงอย่างเดียว

3.1 ความคลาดทรงกลม (8) พิจารณารูปที่ 2.5 รังสีตกกระทบบนที่ขนานกับแกนमुखยสำคัญ และสูงจากแกนเป็นระยะ h จะเห็นได้ว่าทางยาวโฟกัสของรังสีตกกระทบบนที่บริเวณนี้มีค่าแตกต่างไปจากทางยาวโฟกัสของรังสีใกล้แกน (paraxial ray) และค่าจะแตกต่างกันมากขึ้นเมื่อ h มีค่าเพิ่มขึ้น กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ค่าของรังสีที่ขนานกับแกนमुखยสำคัญเมื่อผ่านเลนส์แล้วจะไม่สามารถไปรวมกันที่จุดเดียวกันได้ ซึ่งเกิดเนื่องจากผิวของเลนส์มีลักษณะเป็นผิวทรงกลมนั่นเอง ผลต่างของทางยาวโฟกัสของรังสีใกล้แกนกับทางยาวโฟกัสของรังสีขอบเลนส์ (marginal ray) เรียกว่า ความคลาดทรงกลม ดังรูปที่ 2.5 เป็นรูปแสดงความคลาดทรงกลม เห็นได้ว่า รังสีแต่ละคู่ที่อยู่ห่างจากแกนमुखยสำคัญของเลนส์เป็นระยะต่าง ๆ กัน เมื่อผ่านเลนส์แล้วจะมารวมกันที่จุดต่าง ๆ บนแกน



รูปที่ 2.5 ความคลาดทรงกลมของเลนส์

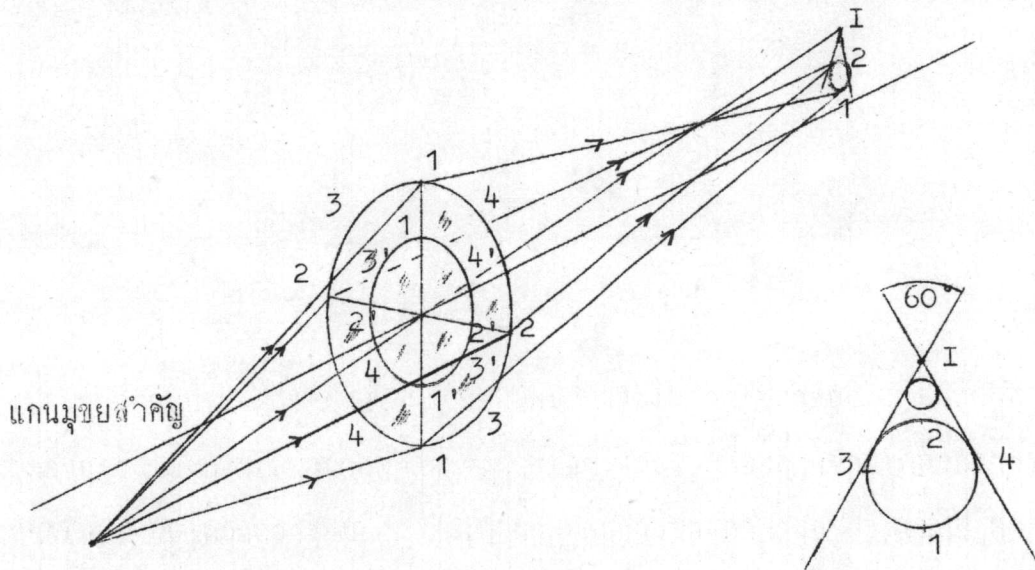
มุขยสำคัญ ในรูปที่ 2.5 A คือ จุดโฟกัสทุติยภูมิของรังสีใกล้แกน รังสีที่ตกที่จุดไกล
 ออกไปจากแกนจะรวมกัน ณ ตำแหน่งที่ใกล้กว่าจุด A เข้ามา และเมื่อความสูงของรังสี
 จากแกนเพิ่มขึ้นจนเป็นรังสีขอบเลนส์ M ตำแหน่งที่รังสีตัดกันคือจุด B ระยะ AB
 คือความคลาดทรงกลมตามยาว (longitudinal spherical aberration) ส่วน
 ระยะ AC ซึ่งอยู่ในระนาบโฟกัสของรังสีใกล้แกนคือ ความคลาดทรงกลมตามขวาง
 (lateral spherical aberration) ถ้านำฉากมารับที่จุด A ภาพที่ได้มีลักษณะ
 เป็นดวงพร่ามัวและมีจุดสว่างอยู่ตรงกลางซึ่งเป็นจุดโฟกัสทุติยภูมิของรังสีใกล้แกน เมื่อ
 ฉากเข้าไปใกล้เลนส์อีก ดวงพร่ามัวจะค่อย ๆ เล็กลงจนกระทั่งฉากไปอยู่ที่ตำแหน่ง L
 แล้ว ดวงพร่ามัวจะเล็กที่สุดซึ่งเรียกว่า วงกลมที่มีความสับสนน้อยที่สุด (circle of
 least confusion) และเป็นตำแหน่งที่จะได้ภาพที่ดีที่สุด (9)

จุดตัดบนแกนของรังสีขอบเลนส์ ถ้าอยู่ทางซ้ายของจุดตัดบนแกนของรังสี
 ใกล้แกน เรียกความคลาดทรงกลมนี้ว่า ความคลาดทรงกลมชนิดแก้ขาด (1) (under
 corrected spherical aberration) และถ้าอยู่ทางขวาเรียกว่า ความคลาด
 ทรงกลมชนิดแก้เกิน (over corrected spherical aberration) โดยทั่วไป
 ความคลาดทรงกลมชนิดแก้ขาดจะเกิดในเลนส์นูนเดี่ยว และความคลาดทรงกลมชนิดแก้เกิน
 จะเกิดในเลนส์เว้าเดี่ยว

ทรายโคที่ผิวของเลนส์เป็นผิวทรงกลม ความคลาดทรงกลมจะไม่สามารถ
 กำจัดให้หมดสิ้นไปได้ ถ้าต้องการกำจัดให้หมดไป จะทำได้โดยการฝนผิวเลนส์ให้เป็นผิว
 อทรงกลม (aspherical surface) ซึ่งเป็นวิธีที่ยุ่งยาก แต่อาจจะลดความคลาดทรงกลม
 ให้น้อยลงได้โดยใช้ตัวจำกัดลำแสง (stop) เพื่อที่จะตัดรังสีขอบเลนส์ ซึ่งวิธีนี้จะทำให้
 แสงที่ผ่านเลนส์มามีความเข้มน้อยลง วิธีที่นิยมที่สุดก็คือการเลือกรัศมีความโค้งของผิวเลนส์
 เรียกวิธีการนี้ว่า การโค้งเลนส์ ซึ่งจะลดความคลาดทรงกลมให้น้อยลงได้

3.2 โคม่า ความคลาดปฐมภูมิชนิดที่สองได้แก่ โคม่า ซึ่งเป็นความคลาด
 ที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุจุดอยู่นอกแกนมุขยสำคัญ และแต่ละโซนของเลนส์มีกำลังขยายไม่เท่ากัน

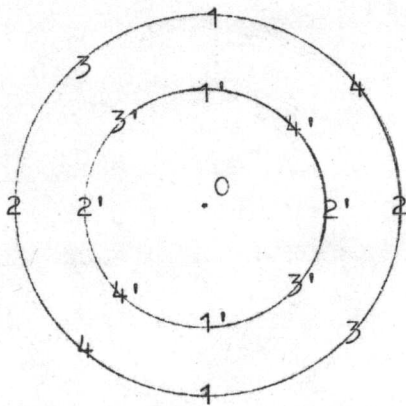
เมื่อมีรังสีตกบนเลนส์ โชนหนึ่ง ๆ ของหน้าเลนส์จะให้ภาพเป็นวงกลม โชนที่อยู่ห่างจาก
 จุดกึ่งกลางของหน้าเลนส์มากได้ภาพวงกลมใหญ่ และโชนที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของ
 หน้าเลนส์น้อยได้ภาพวงกลมเล็ก ซึ่งเส้นผ่าศูนย์กลางของภาพวงกลมจะเป็นปฏิภาคกับกำลัง
 สองของเส้นผ่าศูนย์กลางของโชนที่ทำให้เกิดภาพนั้น (3) ดังนั้น เมื่อรังสีจากวัตถุจุดนอก
 แกนमुखยสำคัญผ่านเต็มหน้าเลนส์ ภาพที่ได้จะมีลักษณะคล้ายดาวหาง คือ มีจุดสว่างหนึ่งเกิด
 จากรังสีที่ผ่านจุดกึ่งกลางของเลนส์ซึ่งรังสีนี้ เรียกว่ารังสีमुखยสำคัญ (Principal ray)
 และมีดาวหางหนึ่งเกิดจากรังสีที่ตกบนแต่ละโชนรอบหน้าเลนส์ทั้งหมดนี้ ดังรูปที่ 2.6 เส้นสัมผัส
 ของภาพวงกลมเหล่านี้จะทำมุมกันเป็นมุม 60 องศา ดังคำอธิบาย



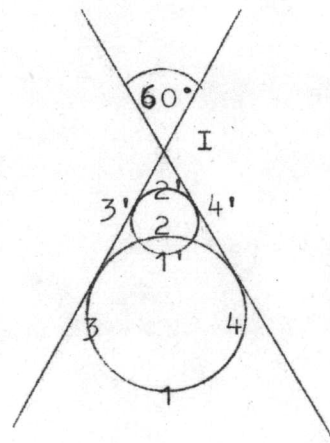
รูปที่ 2.6 การเกิดโคมา

ตามขวาง เนื่องจากโชนนอกของหน้าเลนส์มากกว่ารังสีमुखยสำคัญ โคมามีค่าเป็นบวก
 และมีค่าเป็นลบเมื่อกำลังขยายตามขวางเนื่องจากโชนนอกของหน้าเลนส์น้อยกว่ารังสี
 मुखยสำคัญ ซึ่งจะได้อภาพ ดังในรูปที่ 2.6

พิจารณาโซนหนึ่ง ๆ ของหน้าเลนส์ ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ก. รังสีที่ผ่านตำแหน่งหมายเลข 1 เป็นรังสีแทนเจนเชียล (tangential ray) เมื่อผ่านเลนส์แล้ว จะตัดกันที่ตำแหน่งหมายเลข 1 บนภาพวงกลมในรูปที่ 2.7 ข. ส่วนรังสีที่ผ่านตำแหน่งหมายเลข 2 ในรูปที่ 2.7 ก. เป็นรังสีซาคิตตัด (sagittal ray) เมื่อผ่านเลนส์แล้ว จะตัดกันที่ตำแหน่งหมายเลข 2 บนภาพวงกลมในรูปที่ 2.7 ข. I เป็นภาพจุดเกิดจากรังสี मुख्यสำคัญ



ก



ข

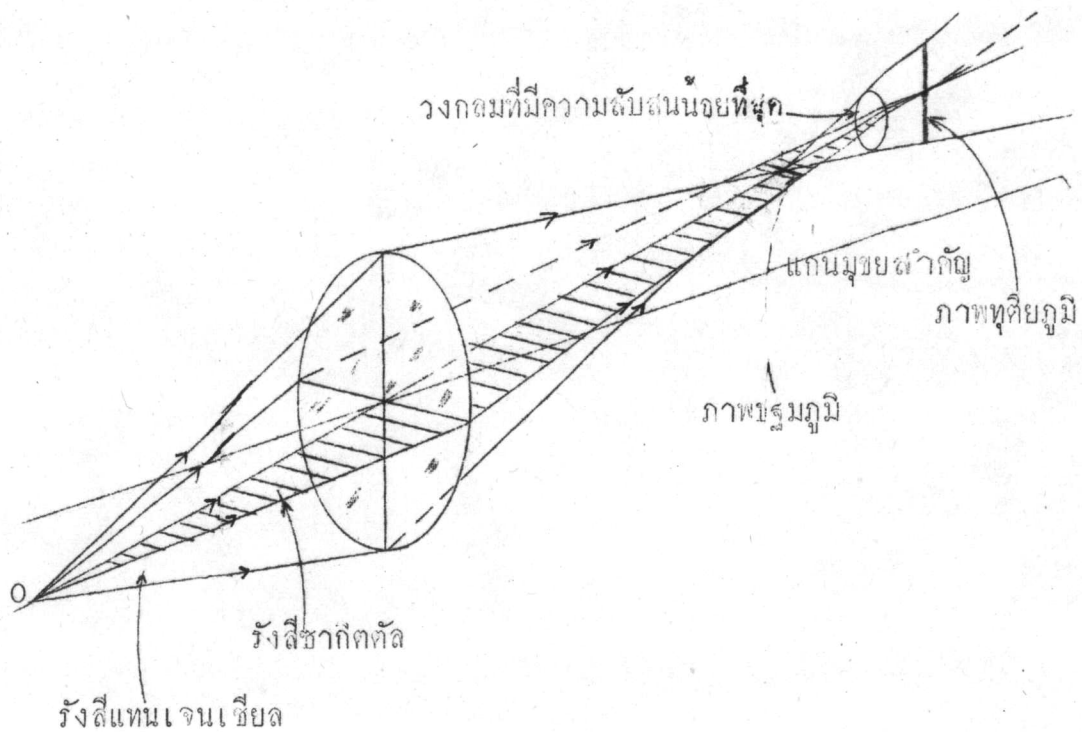
รูปที่ 2.7 ก. โซนของหน้าเลนส์

ข. ภาพที่เกิดเนื่องจากโซนต่าง ๆ ของหน้าเลนส์

ระยะระหว่างจุด I กับตำแหน่งหมายเลข 1 บนภาพวงกลม เรียกว่า โคมาแทนเจนเชียล (tangential coma, C_T) ส่วนระยะระหว่างจุด I กับตำแหน่งหมายเลข 2 บนภาพวงกลมเรียกว่า โคมาซาคิตตัด (sagittal coma, C_S) ซึ่งมีขนาดเป็น 1 ใน 3 ของโคมาแทนเจนเชียล และเป็นปริมาณยังผลของโคมาในระบบนั้น ๆ ด้วย

โคมานี้อาจแก้ไขได้โดยการโค้งเลนส์ รัศมีความโค้งของเลนส์ที่กำหนดโคมาให้หมดไปนั้นจะไม่สามารถแก้ไขให้มีความคลาดทรงกลมน้อยที่สุดได้ ในทางกลับกันเลนส์ที่ให้ ความคลาดทรงกลมน้อยที่สุดจะมีโคมาปนอยู่ด้วยเสมอ ขนาดของโคมาจะขึ้นอยู่กับการตำแหน่ง และขนาดของตัวจำกัดลำแสงอีกด้วย

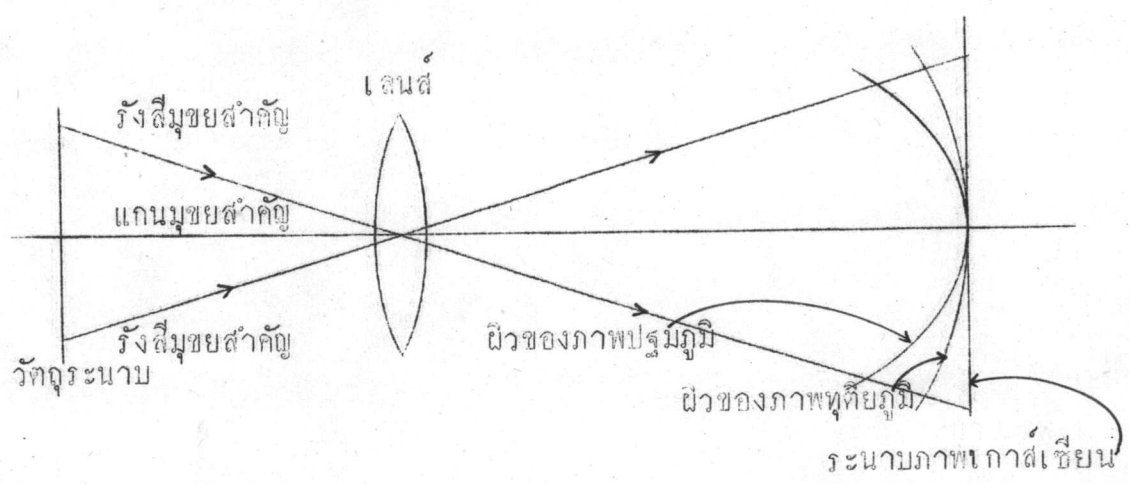
3.3 ความคลาดเอียง และความโค้งของสนาม ความคลาดสองชนิดที่จะกล่าวถึงนี้ ได้แก่ ความคลาดเอียง (astigmatism) และความโค้งของสนาม (field curvature) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อวัตถุจุดอยู่นอกแกนमुखยสำคัญ ความคลาดเอียงต่างกับโคมาตรงที่ว่า ภาพที่ได้เนื่องจากระบบซึ่งมีโคมานั้นจะแผ่ขยายในระนาบที่ตั้งฉากกับแกนमुखยสำคัญ ส่วนภาพที่ได้เนื่องจากระบบซึ่งมีความคลาดเอียงเพียงอย่างเดียว จะแผ่ขยายไปตามแกน मुखยสำคัญ ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.8 รังสีจากวัตถุจุด O จะแบ่งออกได้เป็นสองส่วน



รูปที่ 2.8 การเกิดความคลาดเอียง

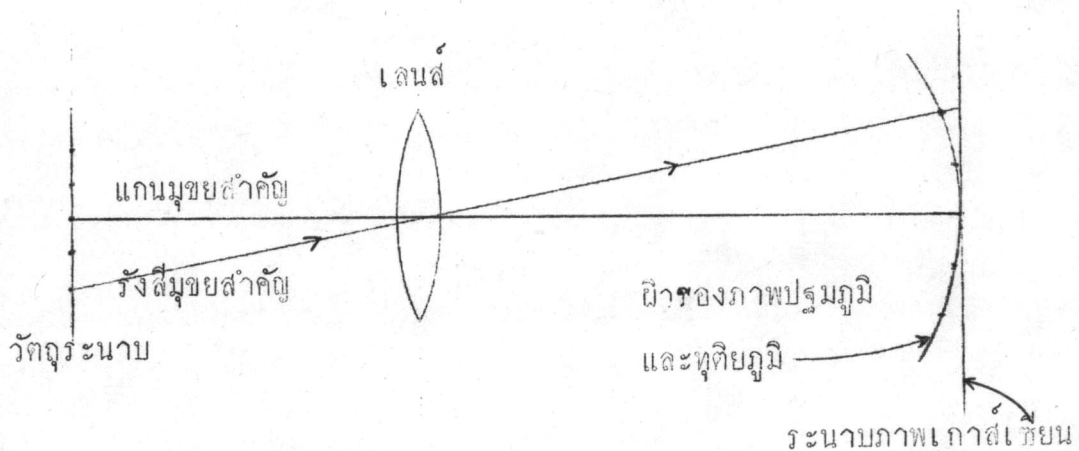
กึ่งที่ไ้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 3.2 คือ รังสีแทนเจนเซียลกับรังสีขากิตตัด เมื่อผ่านเลนส์ แล้วรังสีแทนเจนเซียลจะไปตัดกันเป็นเส้นตรงแนวนอน เรียกว่า ภาพปฐมภูมิ (primary image) ส่วนรังสีขากิตตัดจะไปตัดกันเป็นเส้นตรงแนวตั้ง เรียกว่า ภาพทุติยภูมิ (secondary image) ภาคตัดขวางของลำรังสีเมื่อผ่านเลนส์แล้วจะมีลักษณะเป็นรูปวงรี และกลายเป็นเส้นตรงที่ตำแหน่งของภาพปฐมภูมิและภาพทุติยภูมิ ระหว่างตำแหน่งของภาพปฐมภูมิและตำแหน่งของภาพทุติยภูมิ มีตำแหน่งหนึ่งซึ่งจะไ้ภาพภาคตัดขวางของลำรังสีเป็นรูปวงกลม ตำแหน่งนี้เป็นตำแหน่งที่ไ้ภาพที่ชัด ภาพวงกลมที่ไ้ไ้ เรียกว่า วงกลมที่มีความชัดน้อยที่สุด

กรณีที่วัตถุเป็นระนาบ ภาพปฐมภูมิและภาพทุติยภูมิจะมีลักษณะเป็นผิวพาราโบลอยด์ (paraboloidal surface) ที่สมมาตรรอบแกนमुखสำคัญ(1) เรียกว่า ผิวของภาพปฐมภูมิ (primary image surface) และผิวของภาพทุติยภูมิ (secondary image surface) ตามลำดับ ผิวของภาพทั้งสองจะสัมพันธ์กับระนาบภาพเกาส์เซียน (Gaussian image plane) ตรงแกนमुखสำคัญ ดังรูปที่ 2.9



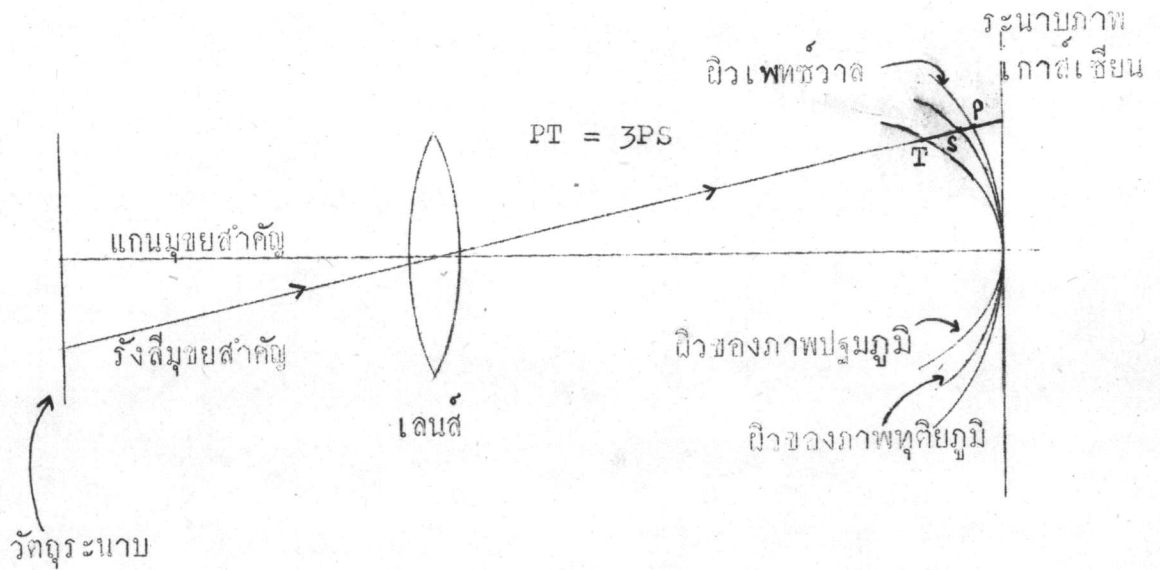
รูปที่ 2.9 ผิวของภาพปฐมภูมิและผิวของภาพทุติยภูมิ

ถึงแม้ว่าเลนส์มีการแก้ความคลาดทรงกลม โคลมา และความคลาดเอียง แล้วก็ตาม จะพบว่า ภาพของวัตถุระนาบ เมื่อผ่านระบบทัศนศาสตร์ก็ยังเป็นผิวพาราโบลอยด์อีก เรียกผิวนี้ว่า ผิวเพทซ์วาล (Petzval surface) ซึ่งจะสัมพันธ์กับระนาบภาพเกาส์เช่น ตรงแกนमुख्यสำคัญ ความคลาดที่เกิดขึ้นนี้ คือ ความโค้งของสนาม (field curvature) ดังรูปที่ 2.10 ผิวเพทซ์วาลซึ่งปรากฏอยู่ในระบบทัศนศาสตร์ทุกระบบเกิดขึ้นเนื่องจาก



รูปที่ 2.10 ความโค้งของสนาม

คชนิหัทเทของแกว และรัศมีความโค้งของผิวเลนส์ เลนส์อันหนึ่ง ๆ ที่มีกำลังของเลนส์ และคชนิหัทเทคงที่แล้ว ผิวเพทซ์วาลนี้ก็จะมีเปลี่ยนแปลงไป (10) ถ้าระบบไม่มีความคลาดเอียงแล้ว ผิวของภาพปรัสมภูมิ ผิวของภาพทุติยภูมิ และผิวเพทซ์วาลจะซ้อนกันพอดี แต่ถ้าระบบมีความคลาดเอียงผิวทั้งสามจะสัมพันธ์กันที่ตำแหน่งแกนमुख्यสำคัญ โดยที่ ผิวของภาพปรัสมภูมิจะห่างจากผิวเพทซ์วาลเป็นสามเท่าของระยะห่างระหว่างผิวของภาพทุติยภูมิกับผิวเพทซ์วาลตามแนวรังสีमुख्यสำคัญ ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ความคลาดเอียงและความโค้งของสนาม

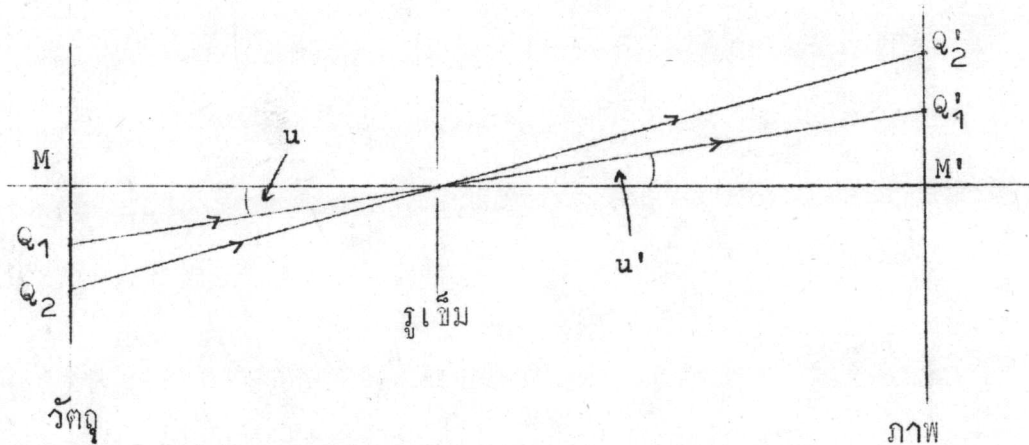
ถ้าผิวของภาพปฐมภูมิและผิวของภาพทุติยภูมิอยู่ทางซ้ายของผิวเพทซ์วาล ความคลาดเอียงจะเป็นชนิดแก้ขาด และเป็นชนิดแก้เกิน เมื่อผิวของภาพปฐมภูมิกับผิวของภาพทุติยภูมิอยู่ทางขวาของผิวเพทซ์วาล โดยที่ระยะห่างระหว่างผิวของภาพปฐมภูมิกับผิวเพทซ์วาลยังคงเป็นสามเท่าของระยะระหว่างผิวของภาพทุติยภูมิกับผิวเพทซ์วาล

ความคลาดเอียงทำให้ลดลงได้โดยใช้ตัวจำกัดแสงที่ครึ่งรัศมีที่อยู่ข้างเคียงกับรังสีमुखยสำคัญ และความโค้งของสนามอาจจะแก้ได้โดยใช้ตัวจำกัดแสงเช่นเดียวกัน การที่จะกำจัดความคลาดเอียงและความโค้งของสนามให้พร้อม ๆ กันนั้นอาจทำได้โดยใช้เลนส์บางอย่างน้อยสองอัน ตัวอย่างเช่น เลนส์หน้าของกล้องถ่ายรูป ซึ่งจำเป็นที่จะต้องกำจัดความคลาดทั้งสองชนิดนี้ อาจจะเป็นเลนส์นูนสองอันและเลนส์เว้าหนึ่งอันประกบกัน

ในการออกแบบระบบทัศนศาสตร์บางระบบ เช่น เลนส์หน้าของกล้องจุดทัศน์ และเลนส์หน้าของกล้องโทรทรรศน์ ซึ่งมีสนามของการเห็นเป็นมุมแคบไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงความคลาดทั้งสองชนิดนี้ แต่ต้องคำนึงถึงความคลาดทรงกลมและโคมา

3.4 ความบิดเบี้ยว ภาพของวัตถุที่เกิดจากแสงผ่านรูเข็ม

(pinhole) มีกำลังขยายตามขวางเท่ากันตลอด ดังรูปที่ 2.12 ทั้งนี้เนื่องจากว่าตำแหน่งวัตถุ และตำแหน่งภาพถูกเชื่อมโยงด้วยเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้น ค่าคงที่ของกำลัง



ขยายตามขวาง เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

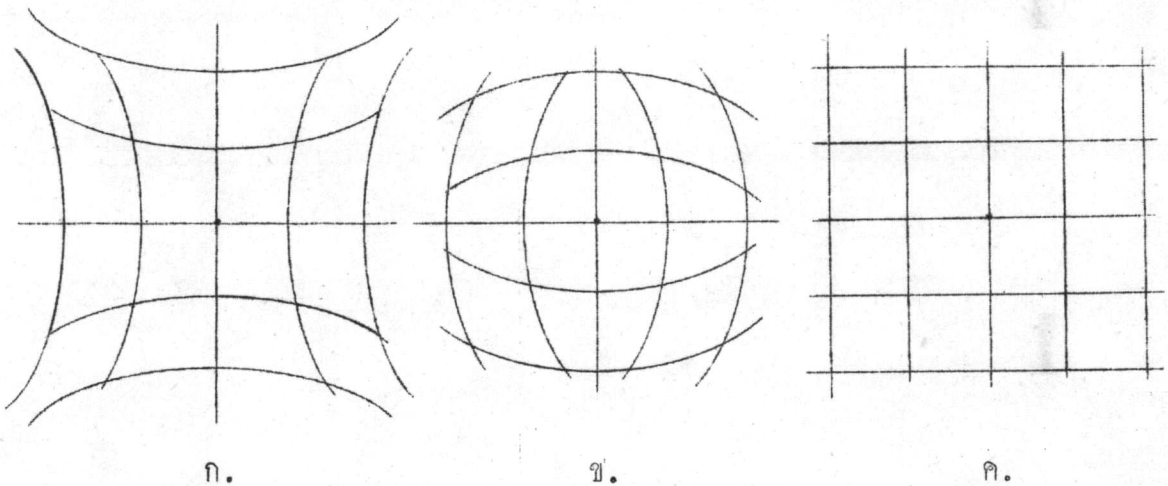
$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \text{ค่าคงที่}$$

โดยที่ u คือ มุมที่รังสีขาเข้าทำกับแกนमुखยสำคัญ

u' คือ มุมที่รังสีขาออกทำกับแกนमुखยสำคัญ

แต่ในระบบทัศนศาสตร์ที่เป็นจริงแล้ว กำลังขยายตามขวางจะไม่เท่ากันโดยตลอด ขึ้นอยู่กับระยะของวัตถุที่อยู่ห่างจากแกนमुखยสำคัญ เรียกความคลาดนี้ว่า ความบิดเบี้ยว

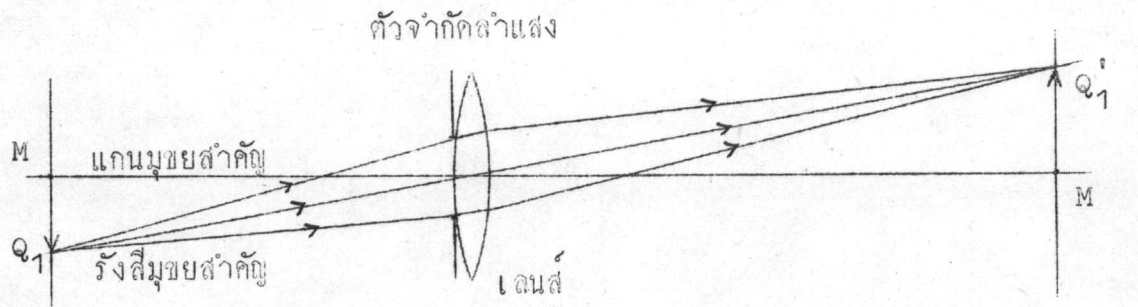
(distortion) ถ้ากำลังขยายตามขวางมีค่ามากขึ้นตามระยะทางที่วัตถุอยู่ห่างจากแกน ความบิดเบี้ยวนี้จะมีค่าบวก และถ้าวัตถุเป็นตารางสี่เหลี่ยม ภาพที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 2.13 ก. ซึ่งมีลักษณะคล้ายรูปหมอนปักเข็ม เรียกได้อีกชื่อหนึ่งว่า ความบิดเบี้ยวรูปหมอนปักเข็ม (pincushion distortion) และถ้ากำลังขยายตามขวางมีค่าน้อยลง เมื่อระยะที่วัตถุอยู่ห่างจากแกนมีค่ามากขึ้น ความบิดเบี้ยวนี้จะมีค่าเป็นลบ ภาพที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 2.13 ข. ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับรูปดัง เรียกว่า ความบิดเบี้ยวรูปถัง (barrel distortion) ระบบที่ไม่มี ความบิดเบี้ยวอยู่เลย ได้แก่ ระบบทัศนศาสตร์รวมื่น ภาพที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 2.13 ค.



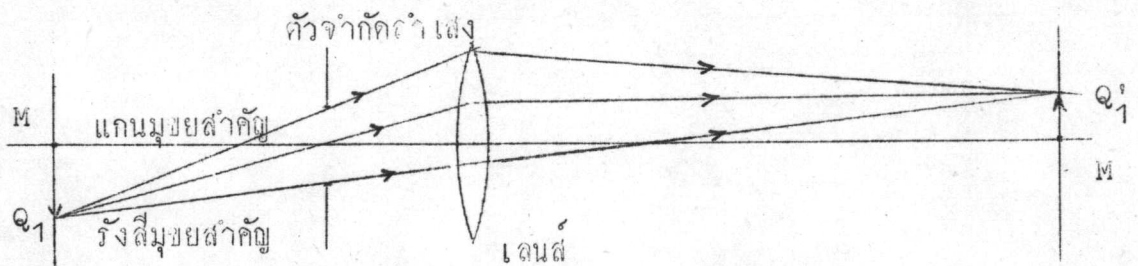
- รูปที่ 2.13 ก. ภาพของความบิดเบี้ยวรูปหมอนปักเข็ม
 ข. ภาพของความบิดเบี้ยวรูปถัง
 ค. ภาพที่ไม่มี ความบิดเบี้ยว

ในทางปฏิบัติ เลนส์บางตัวจะไม่มี ความบิดเบี้ยวนี้ อยู่เลย แต่ในขณะเดียวกันความคลาดอื่น ๆ ยังคงมีอยู่

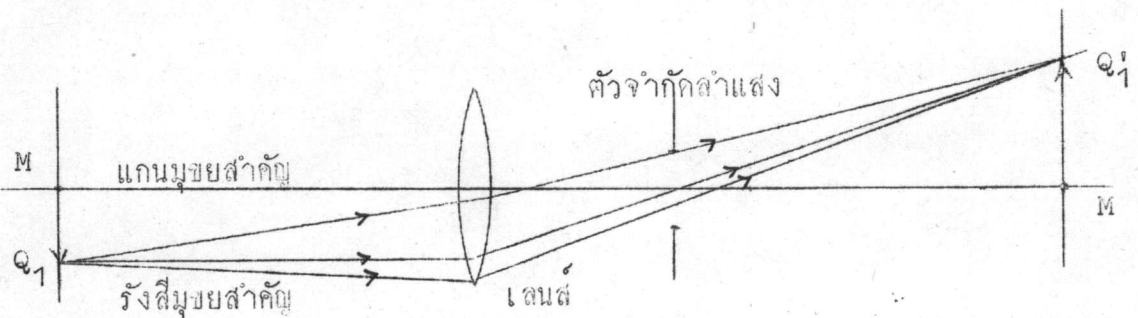
เมื่อวางตัวจำกัดลำแสงที่ตำแหน่งต่าง ๆ กันของเลนส์บางเดี่ยวจะก่อให้เกิดความบิดเบี้ยวแบบต่าง ๆ ถ้าวางตัวจำกัดลำแสงที่ตำแหน่งชิดกับเลนส์ ระบบนั้นจะไม่มี ความบิดเบี้ยว ดังรูปที่ 2.14 ก. ตัวจำกัดลำแสงอยู่หน้าเลนส์จะให้ความบิดเบี้ยวรูปดิ่ง ดังรูปที่ 2.14 ข. แต่ถ้าตัวจำกัดลำแสงอยู่หลังเลนส์จะให้ความบิดเบี้ยวรูปหมอนปักเข็ม ดังรูปที่ 2.14 ค.



ก. ไม่มี ความบิดเบี้ยว



ข. ความบิดเบี้ยวรูปดิ่ง



ค. ความบิดเบี้ยวรูปหมอนปักเข็ม

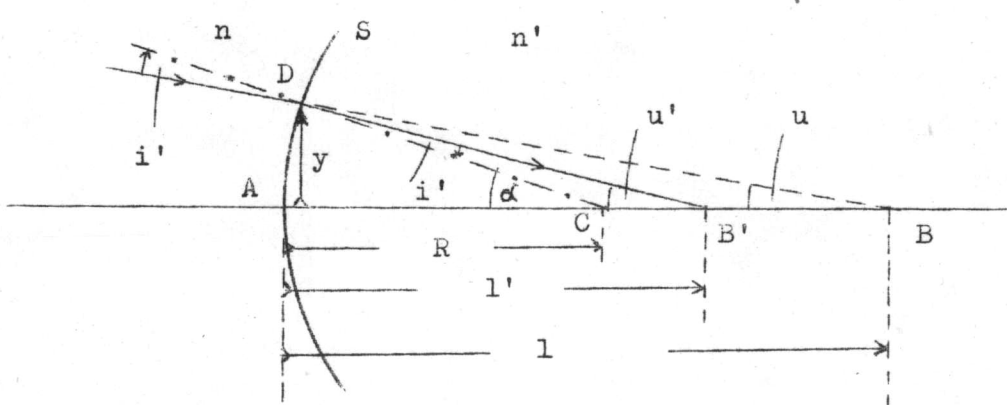
รูปที่ 2.14 ผลของตำแหน่งตัวจำกัดลำแสงที่มีต่อเลนส์เดี่ยว ทำให้เกิดความบิดเบี้ยวแบบต่าง ๆ

ความมึนเคืองอันเนื่องมาจากเลนส์สามารถกำจัดให้หมดไปได้โดยวางตัว
จำกัดแสงให้อยู่ระหว่างกึ่งกลางของเลนส์สองตัวที่เหมือนกัน

ความคลาดทั้งห้าชนิดที่ได้อธิบายมานี้เป็นความคลาดเชิงรังสี (ray aberration)
ซึ่งเหมาะที่จะใช้อธิบายลักษณะของภาพที่เกิดขึ้น แต่ในการคำนวณออกแบบระบบทัศนศาสตร์
เพื่อลดความคลาดต่าง ๆ นั้น นิยมหาความคลาดเชิงหน้าคลื่น (wavefront aberration)

4. การแกะรอยรังสี (3)

พิจารณารังสีที่มาตกบนผิวทรงกลมเดี่ยว S ซึ่งมีรัศมีความโค้ง R และมี C
เป็นจุดศูนย์กลางความโค้ง ดังรูปที่ 2.15 B และ B' เป็นวัตถุจุด และภาพจุด
ซึ่งห่างจากผิวโค้งเป็นระยะ l และ l' ตามลำดับ u และ u' เป็นมุมชั้นของรังสี
ตกกระทบ และรังสีหักเหตามลำดับ α เป็นมุมชั้นของเส้นปกติ i และ i' เป็น
มุมตกกระทบ และมุมหักเห θ ตำแหน่ง P บนผิวโค้ง S ซึ่งอยู่สูงจากแกนमुखยสำคัญ
เป็นระยะ y n และ n' เป็นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางทางค่านวัตถุ และทางค่านภาพ
ตามลำดับ สังเกตได้ว่าค่าต่าง ๆ ที่ไม่มีขีดข้างบนแสดงถึงค่าทางค่านวัตถุ และมีขีด
ข้างบนแสดงถึงค่าทางค่านภาพ โดยใช้สัญลักษณ์ทางเครื่องหมายซึ่งได้อธิบายไว้ในหัวข้อ
ที่ 1.4 ของบทที่ 1 ทุกค่าของระยะทาง และมุมในรูปที่ 2.15 จะมีเครื่องหมายเป็น
บวกทั้งสิ้น



รูปที่ 2.15 การหักเหที่ผิวทรงกลมเดี่ยว

ตามหลักของตรีโกณมิติ จากสามเหลี่ยม CPB จะได้

$$\frac{\sin i}{(1 - R)} = \frac{\sin u}{R}$$

เพราะฉะนั้น $\sin i = \frac{(1-R) \sin u}{R}$ (2.11)

มุม ACP เป็นมุมภายนอกสามเหลี่ยม CPB' และสามเหลี่ยม CPB ดังนั้นจะได้

$$\alpha = u + i = u' + i' \quad (2.12)$$

หรือ $u' = u + i - i'$ (2.13)

จากกฎการหักเหของแสง (Snell's law)

$$\sin i' = \frac{n_1}{n_2} \sin i \quad (2.14)$$

ค่า i' ในสมการ (2.14) จะหาได้จากการดูตารางค่าไซน์ นำค่า i' แทนลงในสมการ (2.13) จะได้ค่า u'

ส่วนค่า $1'$ จะหาได้โดยใช้วิธีเดียวกันกับสมการ (2.11)

คือ พิจารณาสองเหลี่ยม CPB' จะได้

$$\sin i' = \frac{(1'-R) \sin u'}{R}$$

หรือ $1' - R = \frac{R \sin i'}{\sin u'}$ (2.15)

สมการ (2.11) ถึง (2.15) ใช้คำนวณหาตำแหน่งของภาพได้ ไม่ว่าจะรังสีที่ใช้จะตกที่จุดใดบนผิว หรือค่า y จะเป็นเท่าไรก็ตาม แต่วิธีการคำนวณไม่ค่อยสะดวกนักวิธีที่ง่ายและสะดวกกว่านี้ ทำได้โดยให้รังสีที่มาจากบนผิวเป็นรังสีใกล้แกนของผิวทรงกลมเท่านั้น ซึ่งเรียกว่า หักต่นศาสตร์ใกล้แกน เมื่อรังสีตกกระทบเป็นรังสีใกล้แกน ค่ามุมต่าง ๆ ในรูป 2.15 จะเป็นมุมเล็กน้อย

จากสมการ (2.12) กับสมการ (2.13) จะเขียนได้ว่า

$$n \sin (\alpha - u) = n' \sin (\alpha - u')$$

เมื่อค่ามุมต่าง ๆ เป็นมุมเล็กหมด ความสัมพันธ์ของมุมต่าง ๆ เมื่อใช้หน่วยเป็นเรเดียน จะเขียนได้ดังนี้

$$n (\alpha - u) = n' (\alpha - u')$$

หรือ
$$n' u' - nu = \alpha (n' - n)$$

หรือ
$$n' u' - nu = \frac{y}{R} (n' - n) \quad (2.16)$$

ถ้าเอา y หารตลอด
$$\frac{n' u'}{y} - \frac{nu}{y} = \frac{n' - n}{R}$$

ดังนั้น
$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{R} \quad (2.17)$$

ค่า $\frac{n' - n}{R}$ เรียกว่า กำลังของผิวทรงกลม ใช้แทนด้วย K

$$K = \frac{n' - n}{R} = C (n' - n) \quad (2.18)$$

สมการ (2.17) แสดงถึงความสัมพันธ์ของ l และ l' โดยไม่มีค่า y เข้ามาเกี่ยวข้อง มีประโยชน์มากในการใช้หา l' เรียกว่าสมการใกล้แกน (paraxial equation) หรือสมการเกาส์เซียน (Gaussian equation)

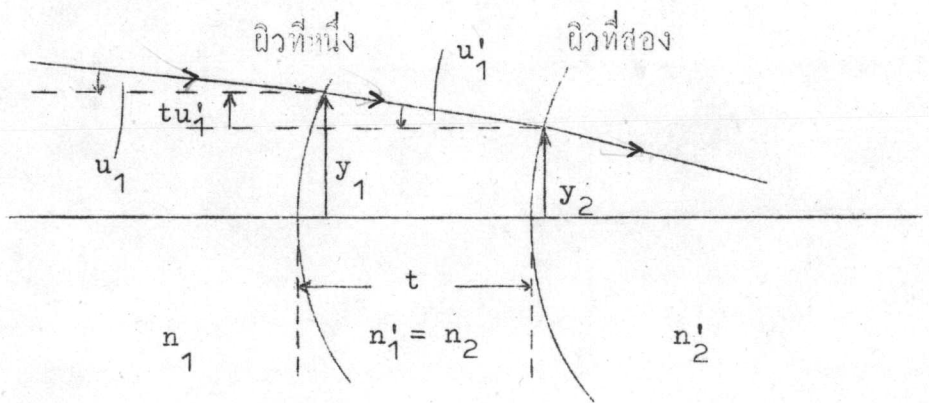
นอกจากสมการ (2.17) แล้ว สมการของรังสีใกล้แกนยังเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ซึ่งสะดวกในการใช้คำนวณหาทางเกินของรังสีที่ผ่านผิวหักเหของแสง โดยที่ทราบว่า ถ้าพิจารณาเฉพาะรังสีใกล้แกนเท่านั้น มุมทั้งหลายจะเป็นมุมเล็ก ซึ่งให้ $\sin \theta = \tan \theta = \theta$ เรเดียน ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว จึงเขียนได้ว่า $u = \frac{y}{l}$ และ $u' = \frac{y}{l'}$, หรือ $l = \frac{y}{u}$ และ $l' = \frac{y}{u'}$ ถ้าแทนค่า l และ l' ลงในสมการ (2.17) จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{n'u'}{y} &= \frac{n'-n}{R} + \frac{nu}{y} \\
 \text{หรือ } n'u' &= \frac{y}{R} (n'-n) + nu \\
 &= y(n'-n) C + nu \\
 &= y K + nu
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\frac{n'u'}{y}} \right\} (2.19)$$

สมการ (2.19) เรียกว่า สมการแกะรอยรังสี (ray tracing equation)

กรณีที่รังสีแสงผ่านผิวทรงกลมหลายผิวที่ต่อเนื่องกัน สมการ (2.19) จะมีประโยชน์มากที่จะใช้พิจารณาทางเดินของรังสี และเพื่อจะกึ่งรังสีหักเหที่ออกจากผิวที่หนึ่งให้ไปถึงผิวที่สองได้ ต้องพิจารณาหาสมการอีกชุดหนึ่ง ซึ่งจะทำได้ดังต่อไปนี้

พิจารณารูปที่ 2.16 ซึ่งมีผิวทรงกลมสองผิววางห่างกัน t รังสีแสงจากวัตถุตกลงบนผิวที่หนึ่งมีจุดตกอยู่สูงกว่าแกนเท่ากับ y มุมชั้นทางค้ำนวัตถุเป็น u_1 มุมชั้นทางค้ำนภาพเป็น u'_1 เมื่อรังสีหักเหผ่านผิวที่หนึ่งมาถึงผิวที่สองจะตกลงบนจุดที่สูงกว่าแกนเท่ากับ y_2 มุมชั้นทางค้ำนวัตถุของผิวที่สอง (u_2) มีค่าเท่ากับ u'_1 และมุมชั้นทางค้ำนภาพของผิวที่สองจะเป็น u'_2 เมื่อเราคิดแต่รังสีไกล่แกนเท่านั้น ผลต่างของ y_1 และ y_2 จะเป็น tu'_1 นั่นคือ



รูปที่ 2.16 การหักเหของรังสีผ่านผิวทรงกลมสองผิว

$$y_2 = y_1 - t u_1' = y_1 - \frac{t n_1 u_1'}{n_1} \quad (2.20)$$

แต่ที่กล่าวมาแล้วว่า $u_2 = u_1'$

และตัวกลางที่อยู่หน้าผิวที่สอง จะเป็นตัวกลางหลังผิวที่หนึ่งด้วย

นั่นก็คือ $n_2 = n_1'$

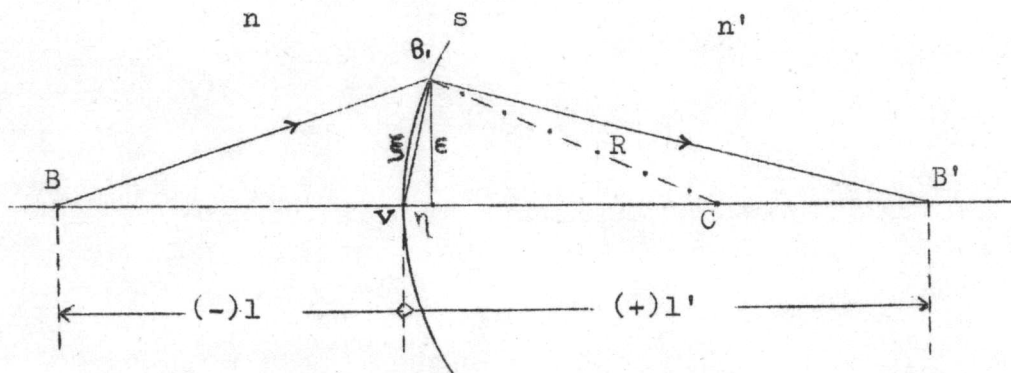
ดังนั้น $n_2 u_2 = n_1' u_1'$ (2.21)

สมการ (2.20) และสมการ (2.21) เป็นสมการที่ใช้ในการหาค่าตำแหน่งที่รังสีออกจากผิวหนึ่งมาถึงผิวถัดไป เรียก สมการของการย้ายผิว (transfer equation)

ด้วยวิธีการเช่นนี้ ทำให้สามารถติดตามทางเดินของรังสีได้ ตั้งแต่เริ่มออกจากวัตถุตกบนผิว หลังจากการหักเหที่ผิว รังสีจะมีทิศทางเบนไปทางใด และจะตกบนจุดใดของผิวถัดไป ทำไปดังนี้เรื่อย ๆ จนครบทุกผิว วิธีการแบบนี้เรียก การแกะรอยรังสี

5. การคำนวณหาผลต่างของทางเดินเชิงทัศนศาสตร์ (10)

พิจารณาผิวทรงกลมเดี่ยว ดังแสดงในรูปที่ 2.17 ผิวทรงกลมเดี่ยว s มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C และมีรัศมีความโค้งเป็น R B_1 เป็นจุดใด ๆ บนผิวทรงกลม V เป็นจุดกึ่งกลางบนผิวทรงกลม B, B' เป็นตำแหน่งของวัตถุจุด และภาพจุดซึ่งห่างจากผิวทรงกลมเป็นระยะ -1 และ $+1$ ตามลำดับ n และ n' เป็นดัชนีหักเหของตัวกลางทางค้ำนำวัตถุ และทางค้ำนำภาพตามลำดับ จากรูปจะเห็นได้ว่า BVB' เป็นรังสีที่ผ่านจุดศูนย์กลางของความโค้งของผิวทรงกลม ซึ่งจะไม่มีการหักเหเมื่อผ่านผิวทรงกลม และผ่านตำแหน่งของภาพจุดที่ B' เนื่องจากว่ารังสี BVB' ทับแกนสมมาตร



รูปที่ 2.17 การหักเหของรังสีผ่านผิวทรงกลมเคี้ยว

ถ้า B_1 เป็นจุดบนผิวทรงกลมซึ่งอยู่สูงจากแกนเพียงเล็กน้อย อาจใช้ผิวคาร์ทีเซียน (cartesian surface) แทนผิวทรงกลมตรงตำแหน่ง V เพื่อจะให้เกิดภาพของ B ที่ B' ได้ ทั้งนี้ รังสีรูปกรวยแคบ ๆ รอบเส้นตรง BV จะก่อให้เกิดภาพที่ตำแหน่ง B'

โดยการพิจารณารังสี BB_1B' และให้ $\xi = VB_1$ เป็นพารามิเตอร์ที่บ่งถึงรังสีนี้ ผลต่างของทางเดินเชิงทัศนศาสตร์ (optical path difference) ของรังสี BB_1B' เทียบกับรังสี BVB' ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $I(\xi)$ แทน หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 I(\xi) &= [BB_1B'] - [BVB'] \\
 &= \{n(BB_1) + n'(B_1B')\} - \{n(BV) + n'(VB')\} \\
 &= n\{(BB_1) - (BV)\} + n'\{(B_1B') - (VB')\} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

จากรูปที่ 2.17 จะได้ความสัมพันธ์เหล่านี้

$$BB_1 = \sqrt{(BV + \eta)^2 + \epsilon^2} \quad (2.23 ก.)$$

$$B_1B' = \sqrt{(VB' - \eta)^2 + \epsilon^2} \quad (2.23 ข.)$$

และ $R^2 = (R - \eta)^2 + \epsilon^2 \quad (2.23 ค.)$

จากสมการ (2.23 ค.) ได้ว่า

$$0 = -2R\eta + \epsilon^2 + \eta^2$$

และเพราะว่า $\epsilon^2 + \eta^2 = \xi^2$

ดังนั้น $\eta = \frac{\xi^2}{2R} \quad (2.24 ก.)$

และได้ว่า $\epsilon = \xi \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{4R^2}} \quad (2.24 ข.)$

สำหรับกรณีที่ $\xi \ll R$, $\epsilon \approx \xi$ จากสมการ (2.23 ก.) ได้ว่า

$$\begin{aligned} BB_1 &= \left\{ (BV)^2 + 2(BV)\eta + \eta^2 + \epsilon^2 \right\}^{1/2} \\ &= (BV) \left\{ 1 + \frac{2\eta}{BV} + \frac{\eta^2 + \epsilon^2}{(BV)^2} \right\}^{1/2} \\ &= (BV) \left\{ 1 + \frac{2}{BV} \left(\frac{1}{BV} + \frac{1}{R} \right) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ซึ่งได้จากการแทนค่าของสมการ (2.24 ก.) และ (2.24 ข.) ลงในสมการ (2.23 ก.)

โดยใช้ทฤษฎีไบนอมิเยล กระจายเพื่อหาค่ารากที่สอง

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

จะได้ว่า

$$BB_1 = (BV) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{BV} + \frac{1}{R} \right) - \frac{\epsilon^4}{8(BV)} \left(\frac{1}{BV} + \frac{1}{R} \right)^2 + o(\epsilon^6) \quad (2.25 ก.)$$

ซึ่งสัญลักษณ์ $o(\epsilon^6)$ หมายถึงเทอมอื่น ๆ ที่มี ϵ ยกกำลังตั้งแต่ 6 ขึ้นไปเป็นตัวประกอบในทำนองเดียวกัน จะได้

$$B_1B' = (VB') + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{VB'} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\epsilon^4}{8(VB')} \left(\frac{1}{VB'} - \frac{1}{R} \right)^2 + o(\epsilon^6) \quad (2.25 ข.)$$

ดังนั้น สมการ (2.22) จะกลายเป็น

$$I(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \frac{n}{BV} + \frac{n'}{VB'} - \frac{(n'-n)}{R} \right\} - \frac{\epsilon^4}{8} \left[\left\{ n \left(\frac{1}{BV} + \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n(BV)} + \left\{ n' \left(\frac{1}{VB'} - \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n'(VB')} \right] + o(\epsilon^6) \quad (2.26)$$

โดยการแทนค่า $BV = -1$ และ $VB' = +1'$ ลงในสมการ (2.26) จะได้

$$I(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \frac{n}{-1} + \frac{n'}{1'} - \frac{(n'-n)}{R} \right\} - \frac{\epsilon^4}{8} \left[\left\{ n \left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n(-1)} + \left\{ n' \left(\frac{1}{1'} - \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n'1'} \right] + o(\epsilon^6) \quad (2.27)$$

จะเห็นได้ว่า สัมประสิทธิ์ของ ϵ^2 จะกลายเป็นศูนย์ เนื่องจากสมการ

$$-\frac{n}{1} + \frac{n'}{1'} = \frac{n' - n}{R}$$

ซึ่งเป็นสมการของการหักเหที่ผิวทรงกลมเคียวที่มีรัศมีความโค้งเป็น R

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } I(\epsilon) &= -\frac{\epsilon^4}{8} \left[\left\{ n \left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n(-1)} - \left\{ n' \left(\frac{1}{1'} - \frac{1}{R} \right) \right\}^2 \frac{1}{n'1'} \right] + o(\epsilon^6) \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \left(\frac{n'-n}{n'} \right) \left(\frac{1}{1'} - \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{n'}{R} - \frac{n+n'}{1'} \right) \epsilon^4 + o(\epsilon^6) \end{aligned}$$

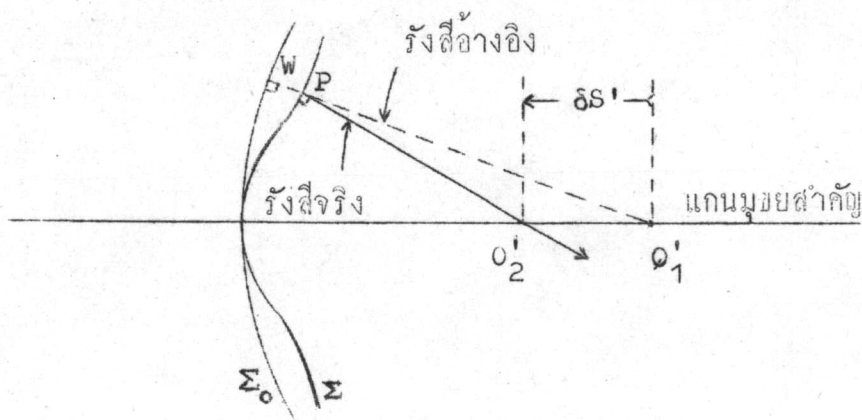
ได้ว่า
$$I(\xi) = -c \frac{\xi^4}{4} + o(\xi^6) \quad (2.28)$$

โดยที่
$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \left(\frac{n' - n}{n'} \right) \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{n'}{R} - \frac{n + n'}{l'} \right) \quad (2.29)$$

ฟังก์ชัน $I(\xi)$ นี้ เป็นฟังก์ชันคู่ (even function) เนื่องจากว่าเส้นตรง BV เป็นแกนกลางของรังสีรูปกรวย จะเห็นได้ว่า เมื่อ B_1 อยู่ใต้แกนमुखสำคัญ ผลต่างของทางเดินเชิงทัศนศาสตร์ มีค่าเช่นเดียวกับเมื่อ B_1 อยู่เหนือแกนमुखสำคัญ นั่นก็คือ $I(-\xi) = I(\xi)$ พิจารณาสมการ (2.28) ถ้า ξ มีค่าน้อย $I(\xi)$ ก็จะมีค่าน้อยตามลงไปด้วย ดังนั้น ถ้าทำให้ ξ มีค่าน้อยมาก ๆ แล้ว ก็สามารถทำให้ $I(\xi) = 0$ ได้ ซึ่งหมายความว่า ระบบนั้น ๆ จะไม่มีความคลาดเนื่องจากวัตถุจุดอยู่บนแกนमुखสำคัญ

6. ฟังก์ชันของความคลาดปฐมภูมิ (2, 3, 10)

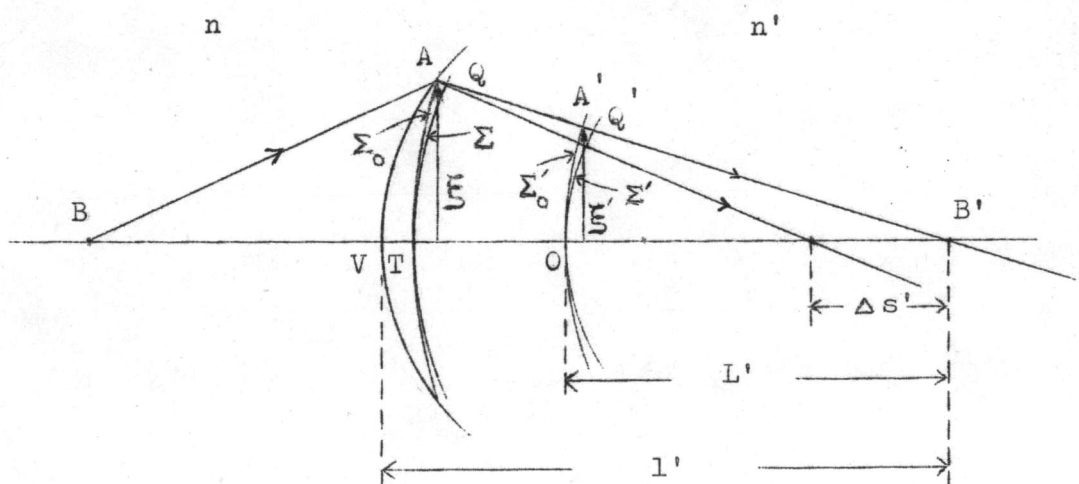
ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงความคลาดเชิงหน้าคลื่นของระบบ โดยพิจารณาหน้าคลื่นของรังสี ถ้าภาพที่ได้เป็นภาพที่สมบูรณ์ไม่มีความคลาดเลย หน้าคลื่นจะเป็นผิวทรงกลมโดยมีภาพจุดเป็นจุดศูนย์กลาง แต่ถ้ารังสีที่ออกจากระบบไม่ได้รวมกันที่จุดเดียวกัน หน้าคลื่นจะไม่ใช่ผิวทรงกลม ดังรูปที่ 2.18 Σ_0 เป็นหน้าคลื่นของภาพที่สมบูรณ์ นิยม



รูปที่ 2.18 ความคลาดเชิงหน้าคลื่น และความคลาดเชิงรังสี

เรียกว่าหน้าคลื่นอ้างอิง (reference wavefront) มี O_1 เป็นภาพจุดที่สมบูรณ์
 ตำแหน่ง O_1 หาได้จากการใช้ทัศนศาสตร์ใกล้แกน (paraxial optics) หน้าคลื่น
 ของรังสีที่ออกจากระบบทัศนศาสตร์จริง ๆ คือ Σ ดังนั้น ความคลาดเชิงหน้าคลื่น คือ
 ความยาวของทางเดินเชิงทัศนศาสตร์ (optical path length) ตามแนวของรังสี
 อ้างอิง ระหว่างหน้าคลื่นอ้างอิงกับหน้าคลื่นจริง ถ้าหน้าคลื่นจริงอยู่ทางขวาของหน้าคลื่น
 อ้างอิง ความคลาดเชิงหน้าคลื่นจะเป็นบวก ในรูปที่ 2.18 แสดงให้เห็นความแตกต่าง
 ของความคลาดเชิงหน้าคลื่นกับความคลาดเชิงรังสีโคซิกเจน w คือ ความคลาดเชิง
 หน้าคลื่นของรังสี PO_2 ส่วนความคลาดเชิงรังสีขณะนี้เป็น $O_1O_2 = \delta s'$ ซึ่งก็คือ
 ระยะจากจุดภาพที่สมบูรณ์ถึงจุดที่รังสีตกแกน จะเห็นว่า รังสีจากจุดบนหน้าคลื่นที่ต่างกัน
 อาจตกแกนที่จุดต่างกัน

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 5 ของบทที่ 2 ว่า สำหรับวัตถุจุดที่อยู่บนแกน
 มุขยสำคัญ จะมีความคลาดซึ่งเป็นความคลาดทรงกลมเพียงอย่างเดียว และสามารถเขียน
 ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของความคลาดได้ว่า $I(\xi) = n'(AQ)$ ดังแสดงไว้ในรูป
 ที่ 2.19 โดยที่ ξ เป็นความสูงของจุดบนผิวทรงกลมเดี่ยวที่กำลังพิจารณา



รูปที่ 2.19 การเปลี่ยนระนาบอ้างอิง

Q เป็นจุดที่อยู่บนหน้าคลื่นจริง Σ A เป็นจุดที่อยู่บนหน้าคลื่นอ้างอิง Σ_0 ซึ่งมี B' เป็นจุดศูนย์กลาง และเป็นตำแหน่งของภาพจุดเกิดสเฟียล n' เป็นดัชนีหักเหของตัวกลางทางค้ำภาพ พลังงานของความคลาดเมื่อวัตถุอยู่บนแกนได้จากสมการ (2.28) ซึ่งถ้าตัดเทอมที่มีลำดับสูง ๆ ทิ้งไป จะได้

$$I(\xi) = -C \frac{\xi^4}{4} \quad (2.30)$$

โดยที่ C ยังคงมีค่าตามสมการ (2.29)

ในระบบทัศนศาสตร์ทั่วไป ซึ่งอาจจะประกอบด้วยตัวจำกัดแสงหรือช่องเปิดชนิดอื่น ๆ พลังงานของความคลาดที่ตำแหน่งผิวหักเหทรงกลมไม่จำเป็นที่จะต้องทราบ สิ่งที่ต้องทราบคือ พลังงานของความคลาด ณ ตำแหน่งระนาบของช่องเปิดนั้น ๆ โดยการหาความแตกต่างของหน้าคลื่นจริง Σ' ซึ่งห่างจากจุด B' เป็นระยะ L' กับหน้าคลื่นอ้างอิง Σ_0' ซึ่งมี B' เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมีเป็น L' L' นี้ต้องไม่เท่ากับ l' และ l' ต้องมีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าความคลาดตามยาว ซึ่งมีค่าเป็น $\Delta S'$ ดังแสดงในรูปที่ 2.19 ดังนั้น ผลต่างของทางยาวเชิงทัศนศาสตร์ ของรังสี BAB' กับ BVB' จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} I(\xi) &= [BAQA'Q'B'] - [BTOB'] \\ &= [BAQ'] + [Q'B'] - [BO] - [OB'] \end{aligned}$$

เพราะว่า Q' และ O ต่างก็อยู่บนหน้าคลื่น Σ' จะได้

$$[BAQ'] = [BO]$$

และยังได้อีกว่า $[A'B'] = [OB']$

เนื่องจากว่า O และ A' ต่างก็อยู่บนหน้าคลื่นอ้างอิง Σ_0' ดังนั้น จะได้

$$I(\xi) = -[A'Q'] = -[AQ] = -n'(A'Q') = -n'(AQ)$$

กึ่งที่ไถ่กล่าวมาแล้วในตอนต้นของหัวข้อที่ 6 ของบทนี้ว่า ถ้าหน้าคลื่นจริงอยู่ทางขวาของหน้าคลื่นอ้างอิง ความคลาดเชิงหน้าคลื่นจะเป็นบวก เพื่อให้สอดคล้องกัน ดังนั้น

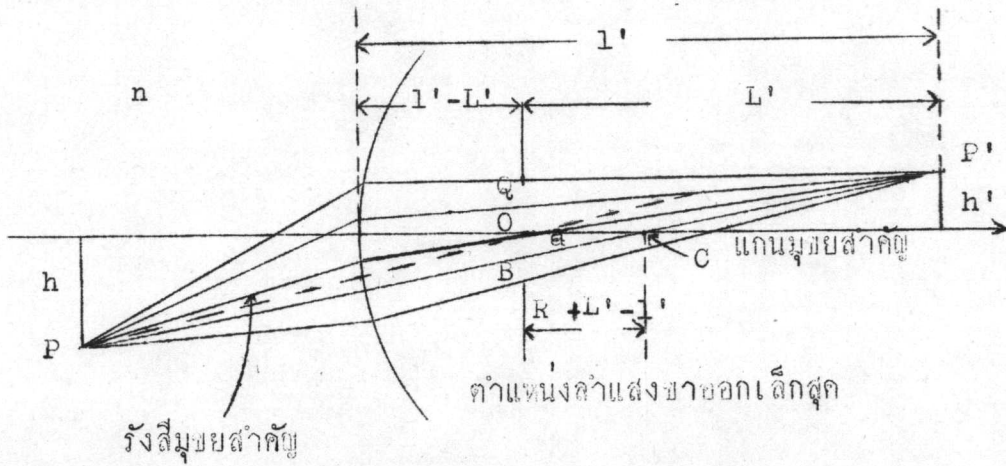
$$I(\xi) = n'(A'Q') = n'(AQ)$$

และสามารถเขียนได้คล้ายว่า $\xi = \frac{1}{L'} \xi'$

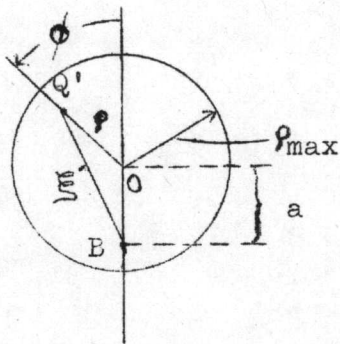
ดังนั้น $I(\xi') = n'(A'Q') = -\frac{C}{4} \left(\frac{1}{L'}\right)^4 \xi'^4 \quad (2.31)$

ในสมการ (2.31) แสดงให้เห็นถึงความคลาดที่ได้เมื่อเปลี่ยนหน้าคลื่นอ้างอิงอันใหม่ Σ'_0 ซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง 0

ในกรณีที่มีตัวจำกัดลำแสงอยู่ในระบบทัศนศาสตร์ เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของความโค้งของผิวทรงกลม และผ่านจุดกึ่งกลางของตัวจำกัดลำแสง นิยามไว้ว่าเป็นแกนสมมาตร ดังนั้นถ้ามีวัตถุอยู่ภายนอกแกนนี้แล้ว ความคลาดชนิดอื่น ๆ จะเกิดขึ้นพร้อมกับความคลาดทรงกลมด้วย เพื่อความเข้าใจในการอธิบายจำเป็นต้องอธิบายทางคำภาพ และเปรียบเทียบระหว่างหน้าคลื่นจริง Σ' กับหน้าคลื่นอ้างอิง Σ'_0 ที่ตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุด (exit pupil) ดังแสดงในรูปที่ 2.20 ก. หน้าคลื่นที่ผ่านระบบไปแล้วจะขาดความสมมาตรรอบเส้นตรง PO ถ้าไม่มีตัวจำกัดลำแสง รั้งสี PC จะผ่านจุดศูนย์กลางของความโค้งของผิวหักเหทรงกลมที่ C ซึ่งเป็นรั้งสีกึ่งกลางของรั้งสีรูปกรวยที่จะก่อให้เกิดภาพเกาส์เขียนที่จุด P' สำหรับรั้งสีที่มาถึงจุด Q ซึ่งอยู่บนระนาบของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กที่สุด



รูปที่ 2.20 ก. การหักเหของรังสีผ่านผิวทรงกลมเมื่อระบบมีตัวจำกัดลำแสง



รูปที่ 2.20 ข. ระนาบของตำแหน่ง
ลำแสงขาออกเล็กสุด
มองจากทางด้านภาพ

เราจะได้ความแตกต่างของทางเดินเชิงทัศนศาสตร์ ซึ่งได้จากสมการ (2.31) ว่า

$$\Delta (Q') = [PQ'P'] - [PCP']$$

$$I(Q') = -\frac{1}{4} c \left(\frac{1}{L'}\right)^4 \mathcal{U}'^4$$

โดยที่ $\mathcal{U}' = (BQ')$ ดังแสดงในรูปที่ 2.20 ข. ในขณะนี้จะเปรียบเทียบรังสีทุกรังสีที่มีค่าแตกต่างกันไปจากรังสี मुख्यสำคัญ POP' ซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุด เพราะว่ารังสีนี้เป็นรังสีกึ่งกลางของรังสีปรกวยที่จะไปก่อให้เกิดภาพ เมื่อผ่านระบบทัศนศาสตร์ไปแล้ว ในกรณีนี้ฟังก์ชันของความคลาดเมื่อวัตถุอยู่นอกแกนจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} W(Q') &= I(Q') - I(O) \\ &= [PQ'P'] - [POP'] \end{aligned} \quad (2.32)$$

ในสมการ (2.32) สำหรับการหา $W(Q')$ จะยอมให้จุด Q' ซึ่งอยู่ในระนาบของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุดเลื่อนออกจากระนาบนี้ไปตามแนวรังสีใกล้เล็กน้อย โดยที่ไม่มีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลง สมมติว่า จุด Q' เลื่อนออกเล็กน้อยมายังหน้าคลื่นจริง ซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุดที่จุด O ดังนั้น อาจเขียนได้ว่า $[PQ'] = [PO]$ และเมื่อหัก $[POP']$ ออกจาก $[PQ'P']$ จะได้ผลลัพธ์ที่ง่ายขึ้น นั่นคือ

$$W(Q') = [Q'P'] - [OP']$$

จากรูปที่ 2.20 ก. โดยการสร้างหน้าคลื่นอ้างอิง ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ P' และมีรัศมีเป็น OP' แล้ว ให้ A เป็นจุดตัดของหน้าคลื่นอ้างอิงนี้กับเส้นตรง $Q'P'$ ดังนั้น

$$[OP'] = [AP'] \quad \text{จะได้ว่า}$$

$$W(Q') = [Q'P'] - [AP'] = [Q'A]$$

จากสมการแสดงว่า จุด Q' อยู่ทางซ้ายของจุด A เพราะฉะนั้น ความคลาดจะมีค่าเป็นลบ และได้สมการที่อธิบายถึงความคลาดเนื่องจากวัตถุอยู่นอกแกน ได้ดังนี้

$$W(Q') = -n'(Q'A)$$

ซึ่งคือ ผลคูณของคัมพี้ทักเหของตัวกลางสุดท้ายกับระยะห่างระหว่างหน้าคลื่นจริงกับหน้าคลื่น
อ้างอิง

เพื่อที่จะได้สมการที่มีประโยชน์มากยิ่งขึ้น จะใช้กฎของโคไซน์ (cosine's law)
กับสามเหลี่ยม $OQ'B'$ ในรูปที่ 2.20 ข. ซึ่งได้ว่า

$$\xi' = a^2 + \rho^2 + 2a\rho \cos\phi$$

โดยที่ ρ คือ รัศมีของจุดที่พิจารณาซึ่งอยู่บนระนาบของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุด

ϕ คือ มุมอะซิมุท (azimuth) ซึ่งวัดจากเส้นตรงแนวตั้งที่ผ่านจุดกึ่งกลาง
ของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุด

และ a ได้จากรูปที่ 2.20 ก. ซึ่งมีค่าดังนี้

$$a = \frac{h'}{l' - R} (R + l' - l') = bh'; \quad b = \frac{R + l' - l'}{l' - R}$$

โดยที่ h' คือระยะของภาพเกาส์เขียนสูงจากแกนमुखยสำคัญ

ดังนั้น

$$\begin{aligned} W &= I(\phi') - I(0) \\ &= -\frac{C}{4} \left(\frac{l'}{L'}\right)^4 (\xi'^4 - a^4) \\ &= -\frac{C}{4} \left(\frac{l'}{L'}\right)^4 \left\{ \rho^4 + 4bh' \rho^3 \cos\phi + 4b^3 h'^3 \rho \cos\phi \right. \\ &\quad \left. + 2b^2 h'^2 \rho^2 (2\cos^2 \phi + 1) \right\} \quad (2.33) \end{aligned}$$

จากสมการ (2.33) เห็นได้ว่า พลังงานของควมกลาด W ขึ้นอยู่กับตำแหน่งลำแสงขาออก
เล็กสุด ซึ่งอยู่ในรูปของ L' แผลงอยู่ในรูปของ b

ฟังก์ชันของควมกลาดจากสมการ (2.33) ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ที่แตกต่างกันไป
อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 W &= I(\varphi') - I(0) \\
 &= {}_0C_{40} \rho^4 + {}_1C_{31} h' \rho^3 \cos \vartheta + {}_2C_{22} h'^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta \\
 &\quad + {}_2C_{20} h'^2 \rho^2 + {}_3C_{11} h'^3 \rho \cos \vartheta \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

ตัวเลขที่เขียนกำกับใต้สัมประสิทธิ์ C หมายถึงกำลังของ h' , ρ และ $\cos \vartheta$ ตามลำดับ

โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันของความคลาด ซึ่งมี ρ และ h' เป็นตัวประกอบนั้น นิยมที่จะเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของค่าแห่งเศษส่วน (fractional value) ซึ่งกำหนดให้

$$r = \frac{\rho}{\rho_{\max}} \quad \text{และ} \quad \sigma = \frac{h'}{h'_{\max}} \quad (2.35)$$

โดยที่ ρ_{\max} คือ รัศมีของตำแหน่งลำแสงขาออกเล็กสุด และเป็นค่าสูงสุดของ ρ นั้น ๆ ภาย

h'_{\max} คือ ความสูงของภาพเกาส์เขียน เมื่อวัตถุอยู่นอกแกนซึ่งอยู่ที่ขอบของสนามของการมองเห็นในระบบนั้น

โดยการแทนค่าต่าง ๆ จากสมการ (2.35) ลงในสมการ (2.34) ฟังก์ชันของความคลาดเชิงหน้าคลื่น เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 W &= {}_0W_{40} r^4 + {}_1W_{31} \sigma r^3 \cos \vartheta + {}_2W_{22} \sigma^2 r^2 \cos^2 \vartheta \\
 &\quad + {}_2W_{20} \sigma^2 r^2 + {}_3W_{11} \sigma^3 r \cos \vartheta \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันของความคลาดปฐมภูมิ ซึ่งจะสังเกตได้จากผลรวมของตัวเลขยกกำลังของ σ และ r มีค่าไม่เกิน 4 แต่ละเทอมของฟังก์ชันนี้จะมีความหมายดังนี้

${}_0W_{40} r^4$ แสดงถึง ความคลาดทรงกลม

${}_1W_{31} \sigma r^3 \cos \vartheta$ แสดงถึง โคม่า

$2^w_{22} \delta^2 r^2 \cos^2 \theta$ แสดงถึง ความคลาดเคียง

$2^w_{20} \delta^2 r^2$ แสดงถึง ความโค้งของสนาม

$3^w_{11} \delta^3 r \cos \theta$ แสดงถึง ความบิดเบี้ยว

ซึ่งภาพที่เกิดจากระบบมีความคลาดต่าง ๆ นี้ จะมีลักษณะต่าง ๆ กันที่ได้อธิบายไว้แล้ว
ในหัวข้อที่ 3 ของบทนี้

7. การคำนวณหาความคลาดเชิงหน้าคลื่น (3)

การหาความคลาดจะทำได้โดยเริ่มจากการแกะรอยรังสีใกล้แกน (paraxial ray tracing) จากวัตถุที่อยู่บนแกนमुखสำคัญไปยังขอบของตัวจำกัดลำแสงแบบช่องเปิดของระบบจนได้ภาพ และแกะรอยรังสีमुखสำคัญใกล้แกน (principal ray tracing) จากขอบของสนามของวัตถุผ่านจุดกึ่งกลางตัวจำกัดลำแสงของระบบจนได้ภาพเช่นกัน ซึ่งจะทำให้ทราบค่าความสูงจากแกนของรังสี मुखชั้นทางค้ำนวัตถุ และमुखชั้นทางค้ำนภาพของทุกผิวที่รังสีนั้นไปถึง สมมติว่าค่าต่าง ๆ เหล่านี้ของรังสีใกล้แกนเป็น h, u และ u' ส่วนสำหรับรังสีमुखสำคัญใกล้แกน ค่าเหล่านี้เป็น h', u' และ u'' ตามลำดับ

จากสมการ (2.19) ซึ่งเป็นสมการการหักเหของรังสีที่ผิวโค้งที่มีความโค้ง C

$$n'u' = nu + h(n' - n) C$$

นั่นก็คือ

$$n'u' = nu + hn'C - hnC$$

หรือ

$$n(hC - u) = n'(hC - u')$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกผิวที่มีการหักเหของแสง ดังนั้นค่านี้จึงเป็นค่าคงที่ เรียกว่า ค่าไม่ของการหักเห (refraction invariant) ให้มีค่าเป็น A

$$\text{ดังนั้น} \quad A = n(hC - u) = n'(hC - u') \quad (2.37)$$

สำหรับรังสีमुखสำคัญใกล้แกน จะเขียนค่า n' ของการหักเหได้ว่า

$$\bar{A} = n(\bar{h}C - \bar{u}) = n'(\bar{h}C - \bar{u}') \quad (2.38)$$

ดังนั้นจากการทราบค่า h, u และ u' ของรังสีใกล้แกนที่แต่ละผิวโดยการแกะรอยรังสี ทำให้คำนวณค่า A ที่แต่ละผิวได้ โดยใช้สมการ (2.37) และทำนองเดียวกัน ค่า \bar{A} ที่แต่ละผิวก็จะคำนวณได้จากสมการ (2.38)

นอกจากนี้ถ้าพิจารณาความหนาของดากรองค้สำหรับแต่ละผิว เรามีสมการหาความหนาของดากรองค้เป็น

$$H = nhu = n'h'u'$$

ถ้าต้องการให้มีความเกี่ยวข้องกันระหว่างสองรังสีที่ใช้ขณะนี้ คือ รังสีใกล้แกน กับรังสีमुखสำคัญใกล้แกน จะหาความหนาของดากรองค้ได้ดังนี้

$$\text{จากสมการ (2.37)} \quad A = nhC - nu$$

$$\text{หรือ} \quad \bar{h}A = nh\bar{h}C - nu\bar{h}$$

$$\text{และจากสมการ (2.38)} \quad \bar{A} = n\bar{h}C - n\bar{u}$$

$$\text{หรือ} \quad h\bar{A} = nh\bar{h}C - n\bar{u}h$$

$$\text{ดังนั้น} \quad nu\bar{h} - n\bar{u}h = h\bar{A} - \bar{h}A \quad (2.39)$$

ค่าของสมการ (2.39) ก็คือ ค่า n' ของดากรองค้ ซึ่งแสดงถึงความสมมาตรระหว่างผลที่ได้จากรังสีทั้งสอง นั่นคือ

$$\begin{aligned} H &= h\bar{A} - \bar{h}A \\ &= n(u\bar{h} - \bar{u}h) \\ &= n(\bar{l} - 1) u\bar{u} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ในเมื่อ I คือ ระยะวัตถุของรังสีมุมสำคัญใกล้แกน และ 1 คือ ระยะวัตถุของรังสีใกล้แกน

ค่าต่าง ๆ ที่ได้นี้ จะนำมาคำนวณหาผลรวมของไซเคิล (Seidel sums) ตั้งแต่ผิวที่ 1 จนถึงผิวที่ m ได้จากสมการต่อไปนี้

$$S_I = \sum_{j=1}^m A_j^2 h_j \Delta_j \left(\frac{u}{n}\right) \quad (2.41)$$

$$S_{II} = \sum_{j=1}^m A_j \bar{A}_j h_j \Delta_j \left(\frac{u}{n}\right) \quad (2.42)$$

$$S_{III} = \sum_{j=1}^m \bar{A}_j^2 h_j \Delta_j \left(\frac{u}{n}\right) \quad (2.43)$$

$$S_{IV} = -H^2 \sum_{j=1}^m C_j \Delta_j \left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.44)$$

$$S_V = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{A}_j^3}{A_j} h_j \Delta_j \left(\frac{u}{n}\right) - H^2 \sum_{j=1}^m \frac{\bar{A}_j}{A_j} C_j \Delta_j \left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.45)$$

โดยที่ A_j จำนวนได้จากสมการ (2.37)

\bar{A}_j จำนวนได้จากสมการ (2.38)

H จำนวนได้จากสมการ (2.40)

C_j คือ ค่าความโค้งของผิวที่ j

และ $\Delta_j \left(\frac{u}{n}\right) = \left(\frac{u'}{n'}\right)_j - \left(\frac{u}{n}\right)_j$

ทำนองเดียวกัน $\Delta_j \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n'}\right)_j - \left(\frac{1}{n}\right)_j$

$S_I, S_{II}, S_{III}, S_{IV}$ และ S_V ต่างก็เป็นผลรวมของไซเคิล หรือต่างก็
คือผลที่ได้จากการรวมความคลาดปรุณภูมิที่มีที่แต่ละผิวของระบบเข้าด้วยกัน โดยที่

S_I คือ ผลรวมของไซเคิลของความคลาดทรงกลม

S_{II} คือ ผลรวมของไซเคิลของโคมา

S_{III} คือ ผลรวมของไซเคิลของความคลาดเอียง

S_{IV} คือ ผลรวมของไซเคิลของความโค้งของสนาม

S_V คือ ผลรวมของไซเคิลของความบิดเบี้ยว

ความคลาดเชิงหน้าคลื่น นิยมบอกเป็นค่าสูงสุด คือเมื่อระบบทัศนศาสตร์นั้น ๆ
เปิดช่องเปิดได้เต็มที่ สัมประสิทธิ์ของความคลาดต่าง ๆ จะเป็นดังนี้

สัมประสิทธิ์ของความคลาดทรงกลม ได้แก่	$0W_{40}$	มีค่า	$\frac{1}{8} S_I$
สัมประสิทธิ์ของโคมา ได้แก่	$1W_{31}$	มีค่า	$\frac{1}{2} S_{II}$
สัมประสิทธิ์ของความคลาดเอียง ได้แก่	$2W_{22}$	มีค่า	$\frac{1}{2} S_{III}$
สัมประสิทธิ์ของความโค้งของสนาม ได้แก่	$2W_{20}$	มีค่า	$\frac{1}{4} (S_{III} + S_{IV})$
สัมประสิทธิ์ของความบิดเบี้ยว ได้แก่	$3W_{11}$	มีค่า	$\frac{1}{2} S_V$

จากการแกะรอยรังสีที่ตกบนระบบทัศนศาสตร์ สามารถคำนวณหาความคลาด
เชิงหน้าคลื่นชนิดต่าง ๆ ได้ เนื่องจากระบบทัศนศาสตร์ที่มีทางยาวโฟกัสค่าหนึ่งที่ต้องการ
สามารถจัดให้มีรูปร่างต่าง ๆ กันได้ และระบบทัศนศาสตร์ที่มีรูปร่างหนึ่งจะให้ความคลาด
ชนิดต่าง ๆ ค่าหนึ่ง นำค่าความคลาดที่พิจารณาและรูปร่างของระบบทัศนศาสตร์มาเขียน
กราฟ จากกราฟสามารถเลือกรูปร่างของระบบทัศนศาสตร์ที่ให้ความคลาดตามต้องการได้
วิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า การโค้งเลนส์