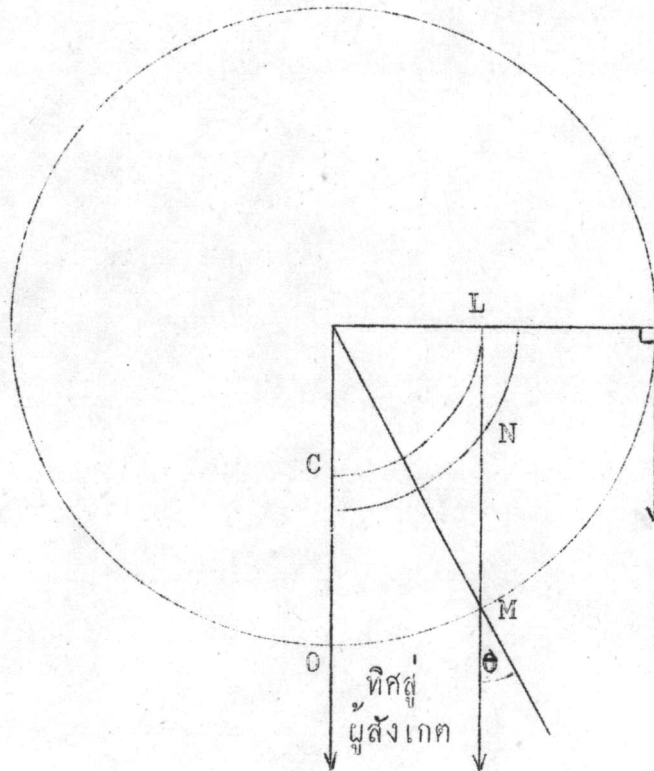




บทที่ 2

การมืดที่ขอบดวงของดวงอาทิตย์

เมื่อตำแหน่งบนดวงอาทิตย์ที่ถูกสังเกตในแสงขาวเลื่อนจากกลางดวงไปยังขอบดวง ความเข้มจำเพาะ (specific intensity) ของการแผ่รังสีจะค่อย ๆ ลดลง ขอบดวงและบริเวณใกล้เคียงจะดูมืดกว่าบริเวณกลางดวง เรียกปรากฏการณ์นี้ว่าการมืดที่ขอบดวง (limb darkening) ในภาพ 2.1 กำหนดตำแหน่งบนดวงเป็นมุม θ



ภาพที่ 2.1 เปรียบเทียบระดับความลึกเฉลี่ยในชั้นโฟโตสเฟียร์ที่ปล่อยรังสีออกมาจากกลางดวงและบริเวณใกล้ขอบดวง

หรือ $\mu = \cos\theta$ ซึ่งเกิดจากเส้นรังสีออกสู่ผู้สังเกตที่ตำแหน่งนั้นทำมุมกับแนวรัศมีที่ตำแหน่งเดียวกัน จะได้ตำแหน่งกลางดวงมีค่า $\theta = 0$ องศา หรือ $\mu = 1$ และตำแหน่งขอบดวงมีค่า $\theta = 90$ องศา หรือ $\mu = 0$ พิจารณาที่จุด C และ L ซึ่งมีความลึกตามแนวรัศมีเท่ากัน แต่ความลึกในแนวของผู้สังเกตไม่เท่ากัน จุด L จะมีความลึกที่ต้นมากกว่าจุด C เพราะรังสีจากจุด L ซึ่งอยู่ใกล้ขอบดวงจะต้องผ่านชั้นบรรยากาศในช่วง LM ซึ่งหนากว่าช่วง CO ที่รังสีจากจุด C ผ่านออกมา ในการสังเกตด้วยวิธีการอย่างเดียวกันเช่นการถ่ายภาพพริ้งที่สังเกตได้จะมาจากระดับความลึกที่ต้นเฉลี่ยเท่า ๆ กัน ดังนั้นรังสีที่สังเกตเห็นทำมุม θ กับแนวรัศมีในภาพ 2.1 ส่วนใหญ่จะออกมาจากจุด N ซึ่งอยู่สูงกว่าจุด C ตามแนวรัศมี ยิ่งใกล้ขอบดวงมากเท่าไร ตำแหน่งของจุด N ก็จะได้เลื่อนสูงขึ้นตามแนวรัศมี จากหัวข้อ 3.2.1 ในบทที่ 1 บอกให้ทราบว่าอุณหภูมิของชั้นโฟโตสเฟียร์จะลดลงอย่างรวดเร็วตามแนวรัศมี ดังนั้นรังสีที่สังเกตเห็นจากบริเวณขอบดวงจึงมาจากบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่ารังสีที่มาจากกลางดวง ความเข้มจำเพาะของรังสีที่มาจากกลางดวงจึงสูงกว่ารังสีที่มาจากขอบดวง เป็นเหตุให้เกิดปรากฏการณ์การมืดที่ขอบดวงขึ้น

1. สมการของการมืดที่ขอบดวง

ถ้ากำหนดให้ $I_\lambda(0,0)$ เป็นความเข้มจำเพาะของการแผ่รังสีที่ความยาวคลื่น λ วัดที่นอกบรรยากาศดวงอาทิตย์ซึ่งถือว่าความลึกที่ต้นเป็น 0 และที่ตำแหน่งกลางดวง ($\theta = 0, \mu = 1$) และ $I_\lambda(0,\theta)$ เป็นความเข้มจำเพาะที่ความยาวคลื่นเดียวกันวัดที่นอกบรรยากาศ และที่ตำแหน่งห่างจากกลางดวงเป็นมุม θ จะได้สมการของการมืดที่ขอบดวงเป็น

$$\phi_\lambda(\theta) = \frac{I_\lambda(0,\theta)}{I_\lambda(0,0)} \quad (2.1)$$

สำหรับการศึกษาเรื่องการมืดที่ขอบดวงโดยทั่วไปมีจุดมุ่งหมายเพื่อจะหาแบบจำลองโครงสร้างบรรยากาศดวงอาทิตย์ ดังนั้นจึงต้องสมมุติว่า

- ก. อัตราการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์มีค่าคงที่ขณะที่สังเกต

ข. นิวทอนของดวงอาทิตย์เป็นนิวทอนสม่ำเสมอ.. ไม่คำนึงถึงจุดมืด สภาพ
 คอกดวง และสภาพอื่น ๆ ที่ก่อให้เกิดความไม่ราบเรียบของนิวทอน

จากข้อสมมุติทั้ง 2 ความเข้มจำเพาะของการแผ่รังสีจะขึ้นกับความยาวคลื่น
 และระยะทางเชิงมุมจากกลางดวงเท่านั้น และในทางทฤษฎีจะสามารถหาความเข้ม-
 จำเพาะที่นิวทอนที่จุดใด ๆ ได้ตามสมการ

$$I_{\lambda}(0, \theta) = \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T(\tau_{\lambda})) e^{-\tau_{\lambda} \sec \theta} \sec \theta d\tau_{\lambda} \quad (2.2)$$

การทำความเข้าใจสมการ (2.2) จำเป็นต้องอาศัยความเข้าใจพื้นฐานและทฤษฎีที่จะ
 กล่าวต่อไป

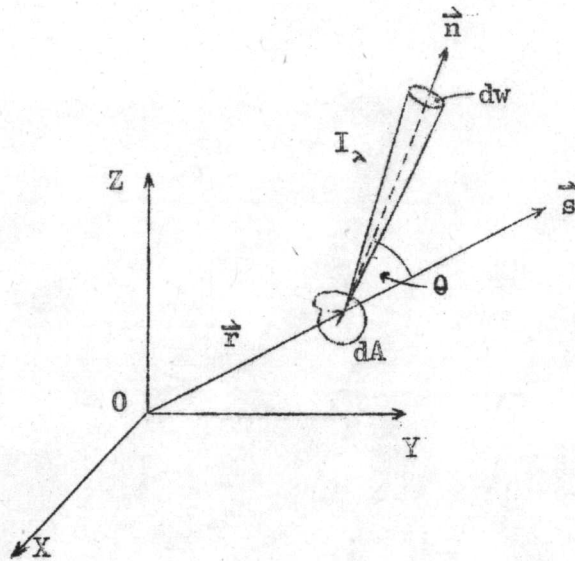
2. นิยามพื้นฐาน

คุณสมบัติทางฟิสิกส์การศาสตร์ที่สำคัญของสสารก็คือการดูดกลืน และการ
 ปล่อยรังสี เพราะความยาวคลื่นของรังสีที่ถูกดูดกลืนหรือปล่อยออกมาจะสัมพันธ์กับชนิดของ
 อะตอมหรือไอออนที่มีอยู่ในสสารก่อนนั้น ในการพิจารณาถึงปริมาณและคุณภาพของการแผ่
 รังสีจำเป็นต้องมีค่าจำกัดความที่แจ่มชัดของปริมาณดังต่อไปนี้

2.1 ความเข้มจำเพาะ กำหนดว่าความเข้มจำเพาะ $I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{n}, t)$ ที่
 ปลายเวกเตอร์ \vec{r} พุ่งไปในทิศทาง \vec{n} ที่ เวลา t คือปริมาณของพลังงานต่อหนึ่งหน่วย
 ของช่วงความยาวคลื่นที่ผ่านพื้นที่หนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่นี้ โดยจำกัดอยู่ภายใน
 หนึ่งหน่วยมุมตันและหนึ่งหน่วยเวลา ดูภาพ 2.2 ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของ
 นิว dA คือ \vec{r} กับทิศทาง \vec{n} จะได้ปริมาณพลังงานที่ผ่านพื้นที่ dA เป็น

$$dE_{\lambda} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{n}, t) dA \cos \theta d\Omega dt \quad (2.3)$$

ความเข้มจำเพาะมีหน่วยเป็นเออร์กต่อตารางเซนติเมตรต่อวินาทีต่อสเตอเรเดียน
 ต่อองศาตรอม



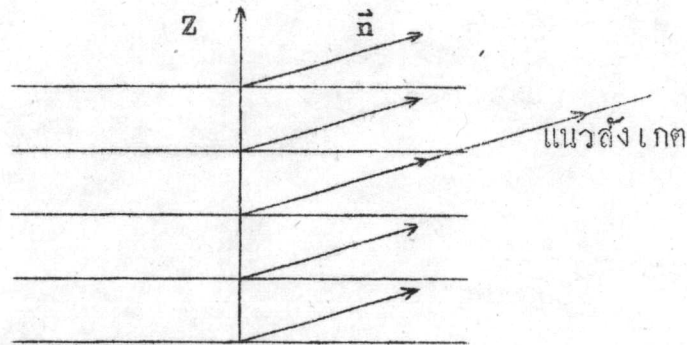
ภาพที่ 2.2 นิยามของความเข้มจำเพาะ

ถ้าถือว่าอัตราการแผ่รังสีที่ผิวดวงอาทิตย์มีค่าคงที่ในช่วงเวลาสั้น ๆ Δt ความเข้มจำเพาะที่ผิวดวงอาทิตย์ I_{λ} จะไม่ขึ้นกับเวลา t จึงเขียนได้ว่า

$$I_{\lambda} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{n})$$

และถ้ากำหนดให้บรรยากาศของดวงอาทิตย์ในพื้นที่หน้าตัดแคบ ๆ มีลักษณะเป็นชั้นบาง ๆ หนาแน่น และภายในแต่ละชั้นบาง ๆ นี้มีคุณสมบัติทางฟิสิกส์เหมือนกันหมด (homogeneous) ดังนั้น \vec{r} ซึ่งเป็นตัวบอกถึงตำแหน่งที่ปล่อยรังสี ซึ่งมีตัวแปรอยู่ในรูป (z, θ, ϕ) จึงลดรูปลงเหลือเพียง z ตัวเดียวได้ เพื่อบอกเฉพาะความสูงของชั้นบรรยากาศซึ่งทำให้คุณสมบัติในการแผ่รังสีต่างกัน แต่ค่า (θ, ϕ) ที่ต่างกันในระดับที่ z เท่ากันไม่ทำให้คุณสมบัติทางฟิสิกส์ต่างกันจึงละไว้ได้ ส่วน \vec{n} นั้นเป็นตัวบอกทิศทางของการสังเกต ซึ่งถ้าผู้สังเกตอยู่

ไกลมาก ๆ จะพบว่า \vec{n} ไม่ขึ้นอยู่กัค่า z ดังแสดงในภาพที่ 2.3

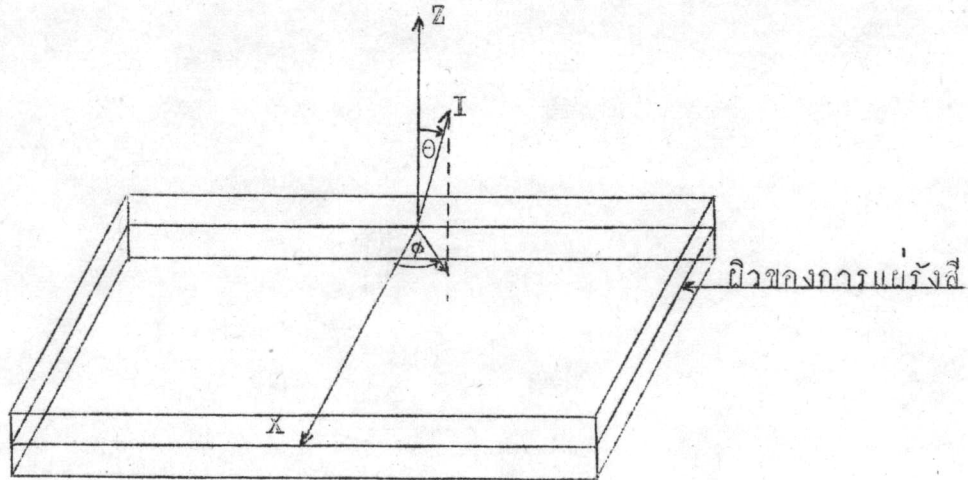


ภาพที่ 2.3 แสดงทิศทางของการรังสีเอกไม่ขึ้นกับความลึกของบรรยากาศ

ดังนั้น \vec{n} จึงขึ้นกับ θ และ ϕ เท่านั้น จึงเขียนได้ว่า

$$I_\lambda = I_\lambda(z, \theta, \phi)$$

สำหรับค่า z ในกรอบอ้างอิงใหม่นี้จะกำหนดให้ $z = 0$ ที่ผิวบนของชั้นบรรยากาศของดวงอาทิตย์ เป็นบวกเมื่ออยู่นอกบรรยากาศและเป็นลบเมื่ออยู่ลึกลงไปในบรรยากาศ ค่าของ θ จะวัดจากแกน z ออกไปส่วนค่า ϕ จะวัดจากแกนอ้างอิงแกนใดแกนหนึ่งซึ่งตั้งฉากกับแกน z และอยู่บนแนวนอนของบรรยากาศที่ถูกรังสีเอก ดังแสดงในภาพที่ 2.4.



ภาพที่ 2.4 แสดงชั้นบรรยากาศบาง ๆ ที่เป็นแนวนอน

2.2 ความเข้มจำเพาะเฉลี่ย $J_\lambda(z)$ คือค่าเฉลี่ยของความเข้มจำเพาะ ในทุกทิศทางที่ระดับความสูง z จากผิวนอกบรรยากาศจะหาได้จากสมการ

$$\begin{aligned} J_\lambda(z) &= \frac{1}{4\pi} \oint I_\lambda(z, \theta, \phi) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I(z, \theta, \phi) \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

กรณีที่สมมุติว่าบรรยากาศของดวงอาทิตย์เป็นแผ่นขนานและมีเนื้อเกือบตลอด การแผ่รังสี จึงเท่ากันทุกจุด ถ้าแนวสังเกตตั้งฉากกับผิวของแผ่นบรรยากาศ ย่อมได้ความเข้มจำเพาะ เท่ากันทุกจุด แต่เมื่อแนวสังเกตทำมุมกับเส้นตั้งฉากซึ่งก็คือมุม θ ทำให้ความเข้มจำเพาะ มีค่าเปลี่ยนไปตามมุม θ นั้น แต่จะไม่ขึ้นอยู่กับมุมอะซิมุทเลย และเมื่อกำหนดให้ $\mu = \cos\theta$ จะได้ความเข้มจำเพาะเฉลี่ยเป็น

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\lambda(z, \mu) d\mu \quad (2.4)$$

2.3 ฟลักซ์ (Flux) มีอยู่ 2 ชนิดได้แก่ ฟลักซ์เอกรงค์ (monochromatic flux), \mathcal{F}_λ , และฟลักซ์รวม (total flux), \mathcal{F} , ฟลักซ์รวมคือผลรวมของฟลักซ์เอกรงค์ในทุกความยาวคลื่น ความสัมพันธ์นี้แสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\lambda d\lambda \quad (2.5)$$

ฟลักซ์ทั้งสองแบบนี้มักจะสัมพันธ์กันเสมอ ในงานนี้ถ้ากล่าวถึงฟลักซ์ก็ให้หมายถึงฟลักซ์เอกรงค์ เท่านั้น ส่วนฟลักซ์รวมจะกล่าวถึงโดยชื่อเต็ม

ฟลักซ์เอกรงค์คือพลังงานรวมทุกทิศทางของรังสีในหนึ่งหน่วยช่วงความยาวคลื่น ที่ไหลผ่านตั้งฉากกับพื้นที่หนึ่งหน่วยในเวลาหนึ่งวินาที มีความสัมพันธ์กับความเข้มจำเพาะ เป็น

$$\mathcal{F}_\lambda = \oint I_\lambda(z, \mu) \mu d\omega \quad (2.6)$$

ถ้าความเข้มจำเพาะไม่ขึ้นกับมุมอะซิมุท ϕ จะเขียนสมการ (2.6) เป็น

$$\mathcal{F}_\lambda = 2\pi \int_{-1}^1 I_\lambda(z, \mu) \mu d\mu \quad (2.7)$$

สำหรับวิชาฟิสิกส์ดาราศาสตร์ได้นิยามฟลักซ์ทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์ (astrophysical flux), F_λ ไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_\lambda &= \frac{1}{\pi} \mathcal{F}_\lambda \\ F_\lambda &= 2 \int_{-1}^1 I_\lambda(z, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad (2.8)$$

ถ้าพิจารณาพื้นที่ผิวเล็ก ๆ อันหนึ่งแบ่งออกเป็นผิวนอกและผิวใน ฟลักซ์รังสีที่ผ่านผิวใน ออกมาสู่ผิวนอกเรียกว่า ฟลักซ์ออก (outward flux), $\mathcal{F}_\lambda^{\text{out}}$ และฟลักซ์ที่ผ่านจาก ผิวนอกเข้าสู่ผิวในเรียกว่า ฟลักซ์เข้า (inward flux), $\mathcal{F}_\lambda^{\text{in}}$ จะได้ว่า

$$\mathcal{F}_\lambda = 2\pi \int_{-1}^0 I_\lambda(z, \mu) \mu d\mu + 2\pi \int_0^1 I_\lambda(z, \mu) \mu d\mu = \mathcal{F}_\lambda^{\text{in}} + \mathcal{F}_\lambda^{\text{out}} \quad (2.9)$$

ซึ่งพจน์แรกคือฟลักซ์เข้า ($-1 \leq \mu \leq 0$) และพจน์หลังคือฟลักซ์ออก ($0 \leq \mu \leq 1$) ในกรณีที่รังสีแผ่เท่ากันทุกทิศทาง (isotropic case) $\mathcal{F}_\lambda = 0$ จึงได้ว่า

$$\mathcal{F}_\lambda^{\text{in}} = \mathcal{F}_\lambda^{\text{out}}$$

และถ้าคิดเฉพาะฟลักซ์ออกของกรณีแผ่รังสีเท่ากันทุกทิศทางจะได้ว่า

$$\mathcal{F}_\lambda^{\text{out}} = \pi I_\lambda(i) \quad (2.10)$$

โดยที่ $I_\lambda(i)$ เป็นความเข้มจำเพาะที่เท่ากันทุกทิศทางในสนามรังสี ในกรณีของดาวฤกษ์ทั่วไปรวมทั้งดวงอาทิตย์ซึ่งอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดพลังงานอื่นมาก ๆ

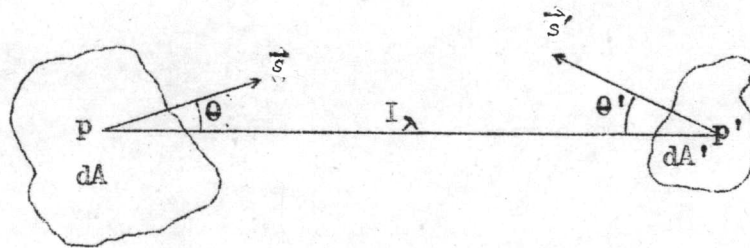
ฟลักซ์ที่ผิววนอกสุดของบรรยากาศของดาวหรือดวงอาทิตย์จะมีค่าเท่ากับฟลักซ์ออกเท่านั้น และถ้าผู้สังเกตอยู่ห่างจากผิวบรรยากาศเป็นระยะทาง D โดยที่รัศมีของดาวหรือดวงอาทิตย์เป็น R และ $D \gg R$ แล้ว ฟลักซ์ที่วัดได้โดยผู้สังเกต f_λ จะมีความสัมพันธ์กับฟลักซ์ออกของดวงดาวนั้น เป็น

$$f_\lambda = \left(\frac{R}{D}\right)^2 \mathcal{F}_\lambda^{\text{out}} \quad (2.11)$$

สำหรับดวงอาทิตย์ซึ่งมีขนาดโตพอจะแยกภาพได้ ก็จะหาค่าได้ทั้งฟลักซ์และความเข้มจำเพาะ โดยที่

$$f_\lambda = 2\left(\frac{R}{D}\right)^2 \pi \int_0^1 I_\lambda(0, \mu) \mu d\mu \quad (2.12)$$

2.4 การไม่แปรผันของความเข้มจำเพาะ คุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของความเข้มจำเพาะก็คือการไม่ขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างผู้สังเกตกับแหล่งกำเนิดรังสี ถ้าไม่มีตัวปล่อยหรือตัวดูดกลืนในระหว่างผู้สังเกตกับแหล่งกำเนิด พิจารณาภาพที่ 2.5



ภาพที่ 2.5 การพิสูจน์ความไม่แปรผันของความเข้มจำเพาะ

พู่กันรังสีซึ่งผ่านพื้นที่ dA ที่จุด P และ dA' ที่จุด P' ปริมาณของพลังงาน dE_λ ที่ผ่านพื้นที่ทั้งสองจะเขียนได้เป็น

$$dE_\lambda = I_\lambda dA \cos\theta \omega d\lambda dt = dE'_\lambda = I'_\lambda dA' \cos\theta' \omega' d\lambda dt \quad (2.13)$$

โดยที่ dw คือมุมตันที่รองรับด้วยพื้นที่ dA' เมื่อมองจากจุด P และ dw' คือมุมตันที่รองรับด้วยพื้นที่ dA เมื่อมองจากจุด P' และเพราะว่า

$$dw = \frac{dA' \cos \theta'}{r^2} \quad (2.14)$$

$$dw' = \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad (2.15)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$dE_\lambda = I_\lambda \frac{dA \cos \theta dA' \cos \theta'}{r^2} d\lambda dt = I'_\lambda \frac{dA' \cos \theta' dA \cos \theta}{r^2} d\lambda dt \quad (2.16)$$

เมื่อยกตัวที่เหมือนกันออกจะได้ว่า $I_\lambda = I'_\lambda$ (Mihalas, 1970)

3. การแผ่รังสีแบบวัตถุดำ (Black-body radiation)

ความเข้มจำเพาะของรังสีจากวัตถุดำจะขึ้นกับความยาวคลื่นและอุณหภูมิตามกฎของแพลงค์ (Planck's law) ดังนี้

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2.17)$$

โดย h เป็นค่าคงที่ของแพลงค์มีค่า 6.63×10^{-27} เออร์ก-วินาที
 c เป็นความเร็วของแสงมีค่า 3.00×10^{10} เซนติเมตรต่อวินาที
 k เป็นค่าคงที่ของโบลท์ซมานมีค่า 1.38×10^{-16} เออร์กต่อองศาเคลวิน

ในทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์แมสสภาพในบรรยากาศของดาวจะแตกต่างกันไปจากวัตถุดำ แต่ในหลายกรณีก็สามารถถือเอาว่าสนามรังสีภายในบรรยากาศของดาวเป็นเช่นในวัตถุดำได้ ซึ่งทำให้การคำนวณง่ายขึ้นมาก (Aller, 1963)

4. กฎของเคอร์ชอฟ (Kirchhoff's law)

การถ่ายเทพลังงานผ่านบรรยากาศของดวงอาทิตย์ด้วยการแผ่รังสีจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างสสารกับการแผ่รังสี ซึ่งได้แก่การดูดกลืนและการปล่อยรังสี จึงต้องกล่าวถึงศัพท์เฉพาะต่อไปนี้

4.1 สัมประสิทธิ์ของการดูดกลืนและการปล่อย (Absorption and emission coefficient) พิจารณามวลเล็ก ๆ ก้อนหนึ่งของสสารในบรรยากาศของดวงอาทิตย์มวลก้อนนี้เป็นรูปทรงกระบอกมีพื้นที่หน้าตัด $\cdot dA$ และยาว ds มีความหนาแน่นเป็น ρ มีค่าของรังสีซึ่งมีความเข้มจำเพาะ I_λ ตกตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดของมวลก้อนนี้ ปริมาณของพลังงานของรังสี dE_λ ที่ถูกมวลหนึ่งหน่วยดูดกลืนไปก็คือค่าของสัมประสิทธิ์ของการดูดกลืน k_λ ปริมาณของพลังงานนี้จะเขียนได้เป็น

$$dE_\lambda = k_\lambda I_\lambda d\omega d\lambda dt \rho dA ds \quad (2.18)$$

ในทำนองคล้ายกัน สัมประสิทธิ์ของการปล่อย j_λ คือปริมาณรวมของพลังงานที่ปล่อยออกจากมวลหนึ่งหน่วยภายในมุมตัน $d\omega$ ภายในเวลา dt และช่วงความยาวคลื่น $d\lambda$ จะเขียนได้เป็น

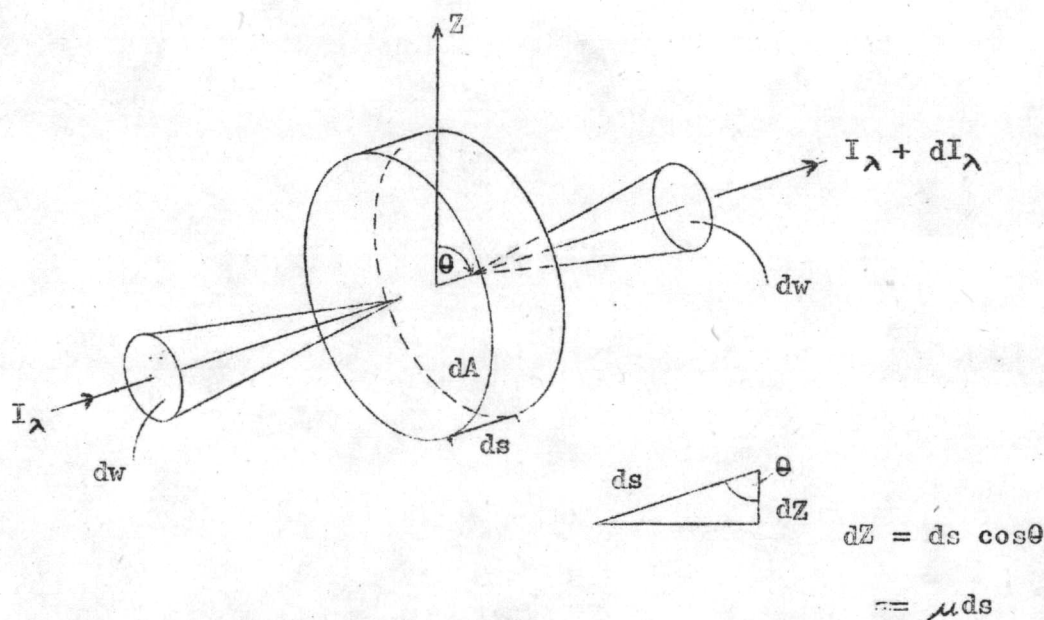
$$dE_\lambda = j_\lambda d\omega d\lambda dt \rho dA ds \quad (2.19)$$

4.2 กฎของแพลงค์-เคอร์ชอฟ (Planck-Kirchhoff's law) ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการดูดกลืนและการปล่อยมีชื่อเรียกเฉพาะว่า กฎของแพลงค์-เคอร์ชอฟ ซึ่งกล่าวว่า ถ้าสสารและรังสีอยู่ในสมดุลเทอร์โมไดนามิก (thermodynamic equilibrium) ซึ่งเขียนย่อว่า TE แล้ว การปล่อยรังสีของวัตถุจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเพียงอย่างเดียว และอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของการปล่อยต่อสัมประสิทธิ์ของการดูดกลืนจะขึ้นกับอุณหภูมิเท่านั้น ไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่าง สี หรือองค์ประกอบของสสารนั้นเลย จะเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{j_\lambda}{k_\lambda} = B_\lambda(T) \quad (2.20)$$

โดย $B_\lambda(T)$ หาได้จากสมการ (2.17) ข้างต้น สมการ (2.20) แสดงให้เห็นว่า
วัตถุที่อยู่ในสมดุลเทอร์โมไดนามิกซึ่งถูกคลื่นรังสีโคตีจะเป็นตัวปล่อยรังสีโคตีด้วย

5. สมการของการถ่ายเทพลังงาน (Equation of energy transfer)



ภาพที่ 2.6 การเปลี่ยนแปลงของความเข้มจำเพาะเมื่อรังสีผ่านสสาร คือ ความแตกต่างของพลังงานที่ปล่อยกับพลังงานที่ถูกดูดกลืน

5.1 ฟังก์ชันของแหล่งกำเนิด (Source function) พิจารณาปริมาตร
เล็ก ๆ ที่มีพื้นที่หน้าตัด dA เอียงทำมุม θ กับนิรระนาบของบรรยากาศของดวงอาทิตย์
และยาว ds บรรจุสสารที่มีความหนาแน่น ρ ภาพ 2.6 มีรังสีที่มีความเข้มจำเพาะ I_λ
ผ่านปริมาตรเล็ก ๆ นี้ในทิศทางจากพื้นที่หน้าตัดปริมาณของพลังงานที่เปลี่ยนไปภายใน
พู่กันรังสีที่ผ่านปริมาตรอันนี้จะเท่ากับปริมาณของพลังงานที่ถูกปล่อย ลบด้วยพลังงานที่ถูก
ดูดกลืนโดยปริมาตรเล็ก ๆ อันนี้ ดังนั้น

$$dI_\lambda d\lambda d\omega dA dt = j_\lambda (\rho dA ds) d\lambda d\omega dt - k_\lambda I_\lambda (\rho dA ds) d\lambda d\omega dt \quad (2.21)$$

หรือเขียนใหม่โดยตัดตัวที่ซ้ำกันออกจะได้

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{dI_\lambda}{d\lambda} = j_\lambda - k_\lambda I_\lambda \quad (2.22)$$

โดยที่ $d\lambda = \mu ds$ สำหรับบรรยากาศที่เป็นแผ่นขนาน และถ้ากำหนดให้ τ_λ เป็นความลึกทัศน มีนิยามเป็นความสัมพันธ์ดังนี้

$$d\tau_\lambda = -\rho k_\lambda ds \quad (2.23)$$

ในสนามของรังสีนั้นการอธิบายด้วยความลึกทัศนจะสะดวกกว่าความลึกเชิงเรขาคณิต เพราะสามารถวัดความลึกทัศนจากการดูดกลืนของสสารได้โดยตรง และถ้ากำหนดให้อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของการปล่อยต่อสัมประสิทธิ์ของการดูดกลืนเป็นฟังก์ชันของแหล่งกำเนิด

$$S_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda} \quad (2.24)$$

จะได้สมการ (2.22) เป็นสมการของการถ่ายเทในรูปมาตรฐาน

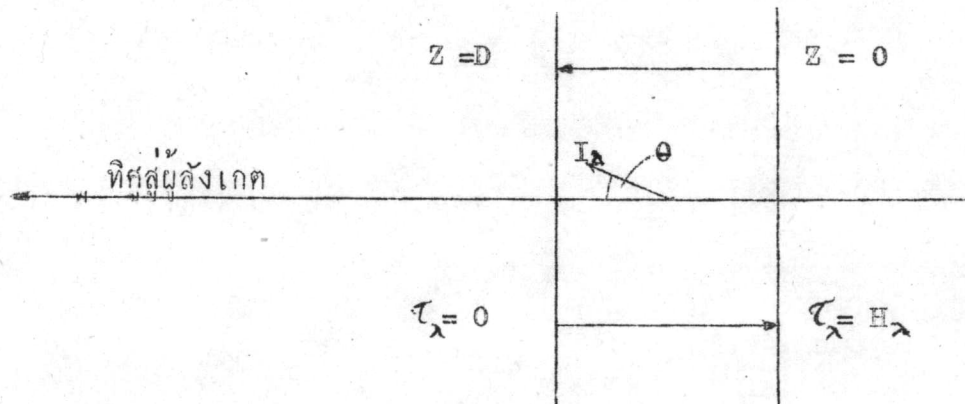
$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda \quad (2.25)$$

ถ้าถือว่าสสารอยู่ในสมดุลย์เทอร์โมไดนามิกกับสภาวะแวดล้อมในบริเวณแคบ ๆ (local thermodynamic equilibrium, LTE) แล้ว การแผ่รังสีจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเพียงอย่างเดียว จะได้

$$S_\lambda = B_\lambda(T) \quad (2.26)$$

ตามสมการ (2.20) กับ (2.24)

5.2 ภาวะขอบเขต (Boundary condition) ในการแก้สมการ(2.25) จำเป็นต้องกำหนดภาวะขอบเขตในแต่ละกรณีขึ้นมา สำหรับบรรยากาศของดวงอาทิตย์ อาจแบ่งง่าย ๆ เป็นชั้นที่ประกอบด้วยแผนขนานจำนวนมากซ้อนกัน โดยมีผิวนอกของบรรยากาศเป็นขอบเขตด้านหนึ่ง ส่วนอีกด้านหนึ่งที่เข้าหาจุดศูนย์กลางถือว่าเป็นความหนา มากจนมีค่าถึงอนันต์ ลักษณะเช่นนี้เรียกว่าบรรยากาศกึ่งอนันต์ (semi-infinite atmosphere)



ภาพที่ 2.7 ความหนาของแผ่นบรรยากาศ ความลึกที่ค้นเพิ่มจาก 0 ถึง H_λ ออกจากผู้สังเกต ความหนาเชิงเรขาคณิตเพิ่มจาก 0 ถึง D เข้าหาผู้สังเกต

พิจารณาภาพ 2.7 ซึ่งเป็นแผ่นบรรยากาศมีความหนาเชิงเรขาคณิตจาก 0 ถึง D เข้าหาผู้สังเกต และความลึกที่ค้นจาก 0 ถึง H_λ ออกจากผู้สังเกต เพื่อให้ได้คำตอบเพียงค่าเดียวสำหรับสมการ (2.25) จะต้องกำหนดค่าของสนามรังสีที่ผิวทั้งสองของแผ่นบรรยากาศ ให้ θ เป็นมุมที่วัดออกจากแนวของผู้สังเกต $\mu = \cos\theta$ จะมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ สำหรับพิกัดรังสีที่พุ่งเข้าหาผู้สังเกตและจะมีค่าน้อยกว่าศูนย์เมื่อพิกัดรังสีพุ่งออกจากผู้สังเกต จึงกำหนดฟังก์ชันของขอบเขตเป็น f และ g ซึ่งทำให้

$$I_\lambda(0, \mu) = f_\lambda(\mu) \quad (2.27)$$

เป็นขอบเขตคานบน ซึ่ง $-1 \leq \mu \leq 0$ และ

$$I_\lambda(H_\lambda, \mu) = g_\lambda(\mu) \quad (2.28)$$

เป็นขอบเขตคานล่าง ซึ่ง $0 \leq \mu \leq 1$

สำหรับบรรยากาศถึงอนันต์ เช่น บรรยากาศของดวงอาทิตย์ จะต้องกำหนด
สนามรังสีที่ตกลงบนขอบเขตคานบนเพียงด้านเดียว สำหรับผิววนอกของบรรยากาศของ
ดวงอาทิตย์ถือว่าไม่มีรังสีภายนอกมาตกกระทบ ดังนั้นสมการ(2.27) จะเป็น

$$f_\lambda(\mu) = 0 \quad (2.29)$$

ส่วนขอบเขตคานล่างนั้นไม่มี แต่อาจกำหนดเฉพาะไว้ว่าที่ระดับความลึกที่ตื้นมาก ๆ
สนามรังสีควรจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\lim_{\tau_\lambda \rightarrow \infty} I_\lambda(\tau_\lambda, \mu) e^{-\tau_\lambda/\mu} = 0 \quad (2.30)$$

สมการ (2.30) นี้มีความหมายว่ารังสีที่มาจากระดับความลึกที่ตื้นมาก ๆ จะหลุดรอดออก
มาสู่ผู้สังเกตได้น้อยมาก และถ้าความลึกที่ตื้นเป็นศูนย์ก็จะได้สนามรังสีเป็นศูนย์ตรงกับ
ขอบเขตคานบนในสมการ (2.29)

5.3 การแก้สมการ เพื่อให้เขียนได้สะดวกจึงตัดอักษรรอง λ ในสมการ
(2.25) ออกและเขียนใหม่เป็น

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S$$

ซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นอันดับหนึ่ง มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และจะมีตัวประกอบอินทิเกรต (integrating factor) เป็น $\exp(-\tau/\mu)$ จึงได้ว่า

$$\frac{d(Ie^{-\tau/\mu})}{d\tau} = -\frac{Se^{-\tau/\mu}}{\mu} \quad (2.31)$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} Ie^{-\tau/\mu} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t)e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu}$$

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu)e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t)e^{-(t - \tau_1)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (2.32)$$

โดยที่ $\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau, \mu)e^{-\tau/\mu} = 0$

สำหรับการหาความเข้มจำเพาะที่ผิวดวงอาทิตย์ กำหนดให้ $\tau_1 = 0$ และ $\tau_2 \rightarrow \infty$ จะได้ความเข้มจำเพาะที่ผิวดวงเป็น

$$I_\lambda(0, \mu) = \int_0^\infty S_\lambda(\tau_\lambda) e^{-\tau_\lambda/\mu} \frac{d\tau_\lambda}{\mu} \quad (2.33)$$

และผลจากสมการ (2.26) จัดแทนค่า $S_\lambda(\tau)$ ในสมการ (2.33) ด้วย $B_\lambda(T)$ จะได้

$$I_\lambda(0, \mu) = \int_0^\infty B_\lambda(T) e^{-\tau_\lambda/\mu} \frac{d\tau_\lambda}{\mu} \quad (2.34)$$

สมการ (2.34) กับสมการ (2.2) ก็คือสมการเดียวกัน โดยที่ $\mu = \cos\theta$ (Mihalas, 1970) และจะได้สมการของการมีคที่ขอบดวงเป็น

$$\phi_\lambda(\mu) = \int_0^\infty b_\lambda(\tau_\lambda) e^{-\tau_\lambda/\mu} \frac{d\tau_\lambda}{\mu} \quad (2.35)$$

โดยที่ $b_\lambda(\tau_\lambda) = \frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0, 1)}$ (2.36)

6. การสร้างแบบจำลองบรรยากาศของดวงอาทิตย์

แบบจำลองบรรยากาศของดวงอาทิตย์ก็คือ ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์กับความลึกจากผิวของดวงอาทิตย์ โดยทั่วไปปริมาณเหล่านี้ได้แก่ อุณหภูมิ, T , ความหนาแน่นอนุภาค, N , ความหนาแน่นอิเล็กตรอน, N_e , ความดันแก๊ส, P_g , ความดันอิเล็กตรอน, P_e , การหาความสัมพันธ์ดังกล่าวจะอาศัยข้อสมมุติว่า บรรยากาศของดวงอาทิตย์เป็นแผ่นขนาน (plane parallel) และอยู่ในสมดุลไฮโดรสแตติก และสมดุลเทอร์โมไดนามิกกับสภาวะแวดล้อมในบริเวณแคบ ๆ (LTE) อีกทั้งไม่คำนึงถึงโครงสร้างย่อย ๆ และสนามแม่เหล็ก นอกจากนี้จะต้องทราบองค์ประกอบทางเคมีของบรรยากาศเพื่อจะได้ทราบว่าตัวดูดกลืนรังสีมีตัวใดบ้าง แล้วต้องทราบค่าความทึบ (opacity) รวมขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความดันอย่างไร ในที่นี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในการหาแบบจำลองเพราะยุ่งยากซับซ้อนมาก อย่างไรก็ตามก็การสร้างแบบจำลองบรรยากาศจากข้อมูลการวัดที่ขอบดวงเฉพาะในช่วงแสงที่ตาเห็นจะได้ข้อมูลที่เพียงพอ เพราะดวงอาทิตย์แผ่รังสีออกมาเกือบทุกความยาวคลื่น ดังนั้นแบบจำลองของบรรยากาศดวงอาทิตย์ที่ดีที่สุดควรจะอาศัยข้อมูลจากทุกความยาวคลื่น ซึ่งจะให้ความสัมพันธ์ที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง และใช้วิเคราะห์สเปกตรัมของดวงอาทิตย์ได้เป็นอย่างดี