บทที่ 3

ทฤษฎี

ทฤษฎีที่เป็นพื้นฐานของการบันทึกสัญญาณอนาลอกโดยการแปลงเป็นสัญญาณดิจิตอล และบันทึกในรูปของสัญญาณดิจิตอล มีเพียงทฤษฎีเดียว คือทฤษฎีบทของการสุ่ม (Sampling theorem) ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนแรกของบทนี้ การจัดรหัสในตอนต่อไปเป็นข้อปฏิบัติในการให้ค่าดิจิตอลที่จะแทนสัญญาณอนาลอก ส่วนตอนสุดท้ายของบทนี้ เป็นการวิเคราะห์ สเปคตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่ม ซึ่งจะใช้ประกอบการออกแบบวงจรกรองแบบผ่านต่ำทางภาคออกของระบบ

3.1 <u>ทฤษฎีบทของการสุ่ม</u> (Sampling theorem)

ทฤษฎีบทของการสุ่มมีความสำคัญต่อทฤษฎีทางการสื่อสารมาก ทฤษฎีบทนี้กล่าวไว้ดังนี้[6.1]

สัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัดไม่เกิน ความถี่ f_m Hz สามารถกำหนดขึ้นได้จากการสุ่มค่าของมันอย่างสม่ำเสมอด้วยระยะเวลาระหว่างการสุ่มน้อยกว่า $1/2\ f_m$ วินาที

สัญญาณโดยทั่วไปจะไม่มีแถบความถี่จำกัด แต่ส่วนมากแล้ว ส่วนของสเปคตรัมที่ความถี่สูง มักมีค่าน้อย จนอาจถือได้ว่า มีความถี่ไม่เกิน ความถี่ค่าหนึ่ง

การสร้างสัญญาณเดิมกลับคืนจากสัญญาณที่สุ่มมาได้[1.1] ทำโดยการส่งสัญญาณที่สุ่มมาได้ผ่านวงจรกรองแบบผ่านต่ำในอุดมคติที่ยอมให้สัญญาณความถี่ต่ำผ่านได้จนถึงความถี่ f_m และไม่ยอมให้ความถี่เท่ากับหรือมากกว่า $f_s - f_m$ ผ่านโดยที่ f_s คือความถี่สุ่ม

ในทางปฏิบัติ เราไม่สามารถสร้างวงจรกรองในอุดมคติได้ แต่ก็สามารถใช้วงจรกรองอันดับสูง ๆ แทนโดยมีความผิดพลาดน้อยเพียงพอที่จะยอมรับได้ ยิ่ง f_m และ $f_s - f_m$ ซึ่งเป็นความถี่ที่ต้องกรองออกใกล้กันเพียงใดก็ยิ่งต้องใช้วงจรกรองอันดับสูงขึ้นเพียงนั้น

3.2 การจัดรหัส

การจัดรหัส ดิจิตอล สำหรับสัญญาณอนาลอกมีได้หลายแบบ อาจจะเป็น Binary Gray code หรือ BCD แล้วแต่ว่าจะนำเอาข้อมูลไปใช้งานอะไร สำหรับระบบที่จะออกแบบนี้จะเลือกระบบ Binary เพราะเป็นแบบที่ง่ายที่สุด ระบบ Binary นี้มีหลายแบบ แบบพื้นฐานที่สุดก็คือ Natural binary ตามตาราง 3.2-1

BINARY	ANALOG FRACTION (F.S. = 1)	ANALOG VOLTAGE (V_{FS}= 10.24V)
111	7/8	8.96
110	6/8	7.68
101	5/8	6.40
100	4/8	5.12
011	3/8	3.84
010	2/8	2.56
001	1/8	1.28
000	0	0

ตาราง 3.2-1 Natural binary code(F.S. หมายถึง FULL SCALE)

ตามตาราง 3.2-1 นี้ จะเห็นได้ว่า เมื่อ binary เป็น 1 หมวด ค่า อนาลอก= ค่า V_{fs} (Full scale voltage)– ค่าของ LSB (Least significant bit) ถ้าให้แรงดัน V_{fs} เท่ากับ 10.24V_{fs} จะได้แรงดันของ LSB เท่ากับ

LSB = 10.24/8 = 1.28 V.

ตามปกติสัญญาณอนาลอกมีค่าทั้งทางบวกและลบ ระบบ Natural binary จึงยังไม่อาจนำมาใช้ได้ทันที มีรหัสหลายแบบที่ดัดแปลงไปจาก Natural binary ที่ใช้กันบ่อย ๆ ได้แก่[2.1] Sign plus magnitude, Offset binary, Two's complement, และ One's complement สำหรับสองแบบหลังนี้จะเป็น two's หรือ one's complement ในช่วงที่ค่าอนาลอกเป็นลบเท่านั้น ในตาราง 3.2-2 แสดงถึงระบบเหล่านี้สำหรับ 4 บิท

ANALOG FRACTION (V_{fs}=1)	ANALOG VOLTAGE (V_{fs}=10.24V)	SIGN PLUS MAGNITUDE	OFFSET BINARY	TWO'S COMPLEMENT	ONE'S COMPLEMENT
+7/8	8.96	0111	1111	0111	0111
+6/8	7.68	0110	1110	0110	0110
+5/8	6.40	0101	1101	0101	0101
+4/8	5.12	0100	1100	0100	0100
+3/8	3.84	0011	1011	0011	0011
+2/8	2.56	0010	1010	0010	0010
+1/8	1.28	0001	1001	0001	0001
0+		0000			0000
	0		1000	0000	
0-		1000			1111
-1/8	-1.28	1001	0111	1111	1110
-2/8	-2.56	1010	0110	1110	1101
-3/8	-3.84	1011	0101	1101	1100
-4/8	-5.12	1100	0100	1100	1011
-5/8	-6.40	1101	0011	1011	1010
-6/8	-7.68	1110	0010	1010	1001
-7/8	-8.96	1111	0001	1001	1000
-8/8	-10.24	-	0000	1000	-

ตาราง 3.2-2 รหัสที่ใช้กันมากสำหรับสัญญาณอนาลอกที่มีค่าทั้งบวกและลบ

ตามตาราง 3.2-2 จะเห็นได้ว่า Offset binary เหมาะสมที่สุดที่จะใช้ เพราะเป็นรหัสแบบง่าย ๆ เรียงเหมือน Natural binary เพียงแต่ที่ค่าอนาลอกเป็นศูนย์ เลื่อนมาอยู่ที่ 100...0 แทน ข้อสำคัญที่เลือกรหัสนี้มาใช้ก็คือ DAC ที่เป็น IC ที่มีขายมักนำมาเป็นแบบ Natural binary ซึ่งสามารถดัดแปลงให้เป็น Offset binary ได้โดยง่าย โดยเพียงแต่ใส่แรงดันไฟตรงเป็นออฟเซท ให้แก่ ออพแอมป์ภาคออกของ DAC ให้แรงดันออกเป็น 0 เมื่อ ค่าดิจิตอลเป็น 1000...0

สำหรับระบบที่ใช้เลขดิจิตอล N bits เพื่อแทนค่าอนาลอกในช่วง $\pm V_{fs}$ ด้วย Offset binary code ค่า LSB (Least significant bit) จะเท่ากับ

$$\mathrm{LSB} = \frac{V_{fs}}{2^{N-1}} \qquad (3.2\text{-}1)$$

และความสัมพันธ์ระหว่างค่าอนาลอก V_a และค่าดิจิตอล Deq ซึ่งเป็นค่าดิจิตอลที่แปลงเป็นเลขฐาน 10 เป็นไปตามสมการ

$$V_a = \mathrm{Deq} \times \mathrm{LSB} - V_{fs} \qquad (3.2\text{-}2)$$

เราสามารถหาช่วงของค่าอนาลอกที่แทนได้ด้วยค่าดิจิตอลโดยอาศัยสองสมการข้างต้นนี้ ที่ค่า ดิจิตอลต่ำสุด Deq = 0 ดังนี้

$$V_{amin} = -V_{fs} \qquad (3.2\text{-}3)$$

และที่ค่าดิจิตอลสูงสุด $\mathrm{Deq} = 2^N-1$ โดยการแทนค่า Deq และค่า LSB จาก (3.2-1) ลงใน (3-2-2) เราจะได้

$$V_{amax} = \frac{(2^N-1)\ V_{fs}}{2^{N-1}} - V_{fs} = V_{fs} - \frac{V_{fs}}{2^{N-1}}$$

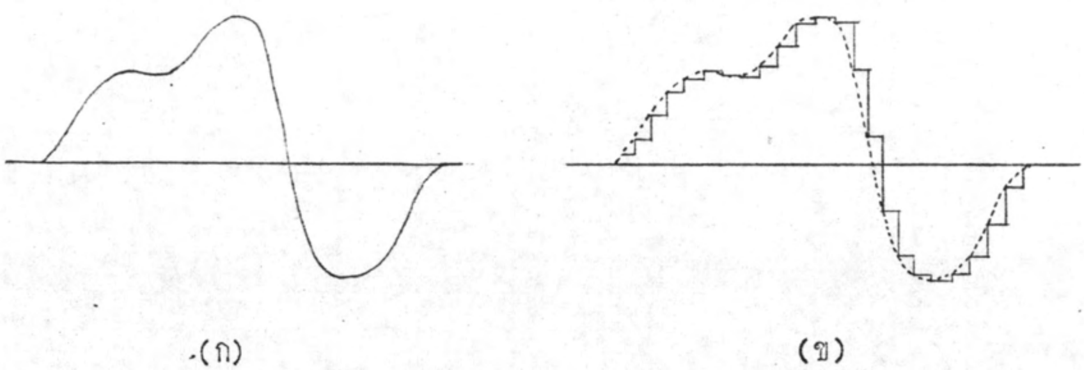
เทอมหลังก็คือ LSB นั่นเอง ดังนั้น

$$V_{amax} = V_{fs} - \mathrm{LSB} \qquad (3.2\text{-}4)$$

จะเห็นได้จาก (3.2-3) และ (3.2-4) ว่า ในระบบ offset binary ช่วงของค่าอนาลอกที่แทนได้ด้วยค่าดิจิตอล ทางค่าบวกจะน้อยกว่าทางค่าลบอยู่ 1LSB เสมอ

3.3 การวิเคราะห์สเปคตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่ม

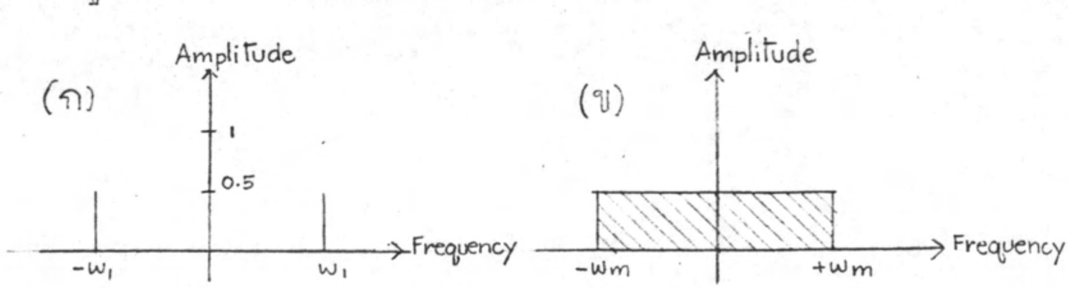
สัญญาณสม่ำเสมอใด ๆ เมื่อผ่านการสุ่มแล้วผลที่ได้จะเป็นสัญญาณที่ไม่สม่ำเสมอ คือเป็นรูปขั้นบันได ที่มีความกว้างเท่ากับคาบการสุ่ม ตามรูป 3.3.1



รูป 3.3-1 แสดงสัญญาณที่ได้จากการสุ่ม (ข) เทียบกับสัญญาณเข้า (ก)

จะเห็นได้ว่ารูปคลื่นที่ได้จากการสุ่มผิดเพี้ยนไปจากสัญญาณเข้า เราสามารถศึกษาว่ารูปคลื่นนี้เพี้ยนไปมากน้อยเพียงใดได้จากการวิเคราะห์ สเปคตรัมของมัน เพราะความเพี้ยนเกิดขึ้นเนื่องจากมี ฮาร์โมนิคสูง ๆ ของสัญญาณเดิมเกิดเพิ่มขึ้น

ในการวิเคราะห์สเปคตรัม สัญญาณซายน์ความถี่ w_1 จะแทนด้วยสเปคตรัมสองเส้นขนาดเท่ากันและเท่ากับครึ่งหนึ่งของขนาดสัญญาณเดิมอยู่ที่ $+w_1$ และ $-w_1$ บนแกนความถี่ ดังที่แสดงในรูป 3.3-2 (ก) สัญญาณใด ๆ ซึ่งประกอบขึ้นด้วยหลายความถี่ แต่มีความถี่จำกัดไม่เกิน w_m สามารถแทนได้ด้วยแถบความถี่ในรูป 3.3-2 (ข) ซึ่งประกอบด้วยเส้นความถี่ย่อยเป็นคู่-เหมือนในรูป 3.3-2 (ก) เรียงติดกันไปหมด



รูป 3.3-2 แสดงสเปคตรัมของ (ก) สัญญาณซายน์ความถี่ w_1 (ข) สัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัดไม่เกิน w_m

ในการวิเคราะห์ต่อจากนี้ไปเราจะศึกษาจากสัญญาณซายน์ความถี่เดียวผลการวิเคราะห์จะใช้ได้กับสัญญาณใด ๆ ก็ได้ ทั้งนี้เพราะ ตามทฤษฎีบทของ Fourier สัญญาณต่อเนื่องใด ๆ ประกอบขึ้นด้วยสัญญาณซายน์ จำนวนหนึ่งซึ่งมีความถี่เป็น 1 เท่า, 2 เท่า, 3 เท่า..ฯลฯ ของความถี่ของสัญญาณต่อเนื่องนั้น ๆ สัญญาณซายน์ ที่มีความถี่เท่ากับสัญญาณเดิม เรียกว่า ส่วนมูลฐาน (Fundamental Component) ส่วนสัญญาณซายน์ที่เหลือซึ่งล้วนแต่มีความถี่เป็นจำนวนเท่าลงตัวของความถี่สัญญาณเดิมรวมเรียกว่า ฮาร์โมนิค (Harmonic) ของมัน ดังนั้น โดยการศึกษาสัญญาณซายน์ความถี่เดียว สามารถนำมาประยุกต์เข้ากับสัญญาณต่อเนื่องใด ๆ ก็ได้

สัญญาณใด ๆ f(t) สามารถแทนได้ด้วย Fourier series ดังนี้[6.2]

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kwt + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kwt \qquad (3.3-1)$$

โดยที่

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos kwt \, dt; \; k = 0,1,2,\ldots \qquad (3.3-2)$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin kwt \, dt; \; k = 1,2,3,\ldots \qquad (3.3-3)$$

ดังนั้น k^{th} harmonic จะมีขนาด

001613

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \qquad (3.3-4)$$

เราจะศึกษาสัญญาณซายน์ที่ถูกสุ่มดังแสดงในรูป 3.3-3 สัญญาณ f(t) จะคงที่เป็นช่วง ๆ เพื่อความสะดวกเราจะแบ่ง f(t) ออกเป็นจำนวนช่องลงตัว S ช่อง จากสมการ (3.3-2) เราแบ่งการ integrate ออกเป็นช่วง ๆ ตรงตามช่องที่ f(t) มีค่าคงที่ สามารถย้าย f(2) ซึ่งเป็นค่า f(t) ในช่วงย่อยออกนอก integration ดังนั้น

$$A_k = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{S} f(i) \int_{-\frac{T}{2} + (i-1)\frac{T}{S}}^{-\frac{T}{2} + \frac{iT}{S}} \cos \frac{2\pi kt}{T}\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi k}\sum_{i=1}^{S} f(i)\left\{ \sin \frac{2\pi k}{T}\left[-\frac{T}{2} + \frac{iT}{S}\right] - \sin \frac{2\pi k}{T}\left[-\frac{T}{2} + \frac{(i-1)T}{S}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{S} f(i)\left\{ \sin\left[2\pi k(\frac{i}{S} - \frac{1}{2})\right] - \sin\left[2\pi k(\frac{i-1}{S} - \frac{1}{2})\right]\right\}$$

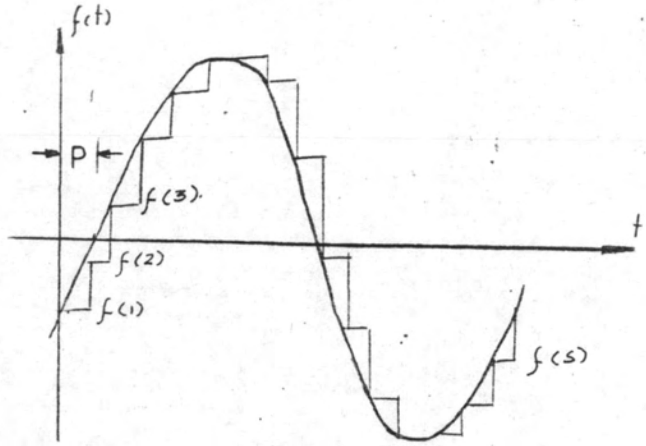
จากการแทนค่า f(i) ด้วยคลื่นซายน์ที่มีเฟส P ตามในรูป 3.3–3

$$A_k = \frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{S} \sin\left[-P + \frac{2\pi(i-1)}{S}\right]\left\{\sin\left[2\pi k(\frac{i}{S} - \frac{1}{2})\right] - \sin\left[2\pi k(\frac{i-1}{S} - \frac{1}{2})\right]\right\} \tag{3.3-5}$$

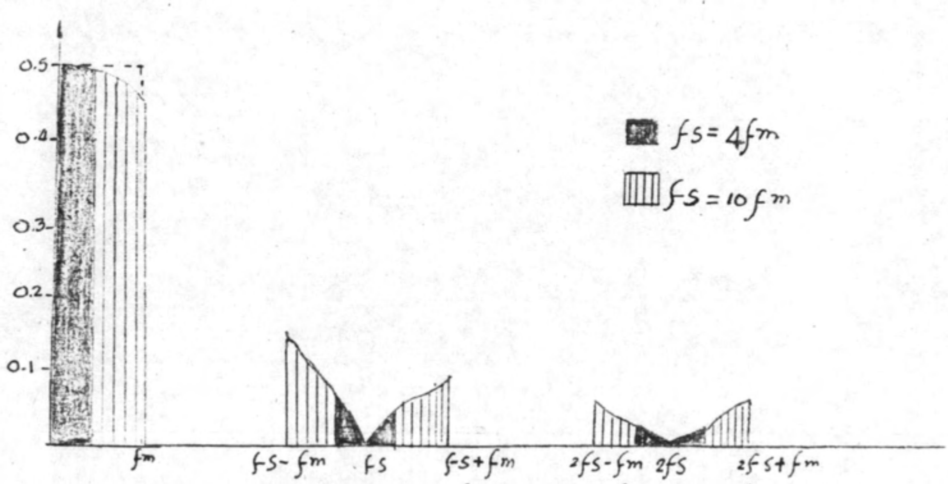
ในทำนองเดียวกัน

$$B_k = \frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{S} \sin\left[-P + \frac{2\ \ (i-1)}{S}\right]\left\{\cos\left[2\pi k(\frac{i-1}{S} - \frac{1}{2})\right] - \cos\left[2\pi k(\frac{i}{S} - \frac{1}{2})\right]\right\} \tag{3.3-6}$$

โปรแกรมสำหรับหาขนาดของ k^{th} harmonic จากสมการ (3.3–4) (3.3–5) และ (3.3–6) และผลของการคำนวณ สำหรับค่า S (จำนวนช่วงที่แบ่งใน 1 คาบของ f(t) หรืออีกนัยหนึ่งคืออัตราส่วนระหว่างความถี่สุ่มต่อความถี่ของสัญญาณเข้า) จาก 4 ถึง 15 ได้รวบรวมไว้ที่ภาคผนวก ก. แต่สรุปผลได้ว่า โดยใช้ความถี่สุ่ม f_s สัญญาณเข้าความถี่ f_m ที่ถูกสุ่มจะมีสเปคตรัมที่ความถี่ $f_s - f_m$, $f_s + f_m$, $2f_s - f_m$, $2f_s + f_m$,... และจากผลการคำนวนในตารางที่ภาคผนวกดังกล่าวสามารถพลอตแถบความถี่



รูป 3.3-3 คลื่นชายน์ที่ถูกสุ่ม ซึ่งจะทำการวิเคราะห์สเปคตรัม



รูป 3.3-4 สเปคตรัมของสัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด ไม่เกิน f_m และถูกสุ่มด้วยความถี่ f_s ในรูปแสดงกรณีที่สุ่มด้วยความถี่สุ่ม 4 และ 10 เท่าของความถี่ f_m

ได้ตามรูป 3.3-4 การพล็อตไม่ได้ทำอย่างตรงไปตรงมา แต่แปลงโดยให้ความถี่สุ่ม f_s คงที่ สำหรับสัญญาณเข้าถือว่ามีสเปคตรัมขนาดคงที่เท่ากับ 0.5 จากความถี่ 0 ถึง f_m