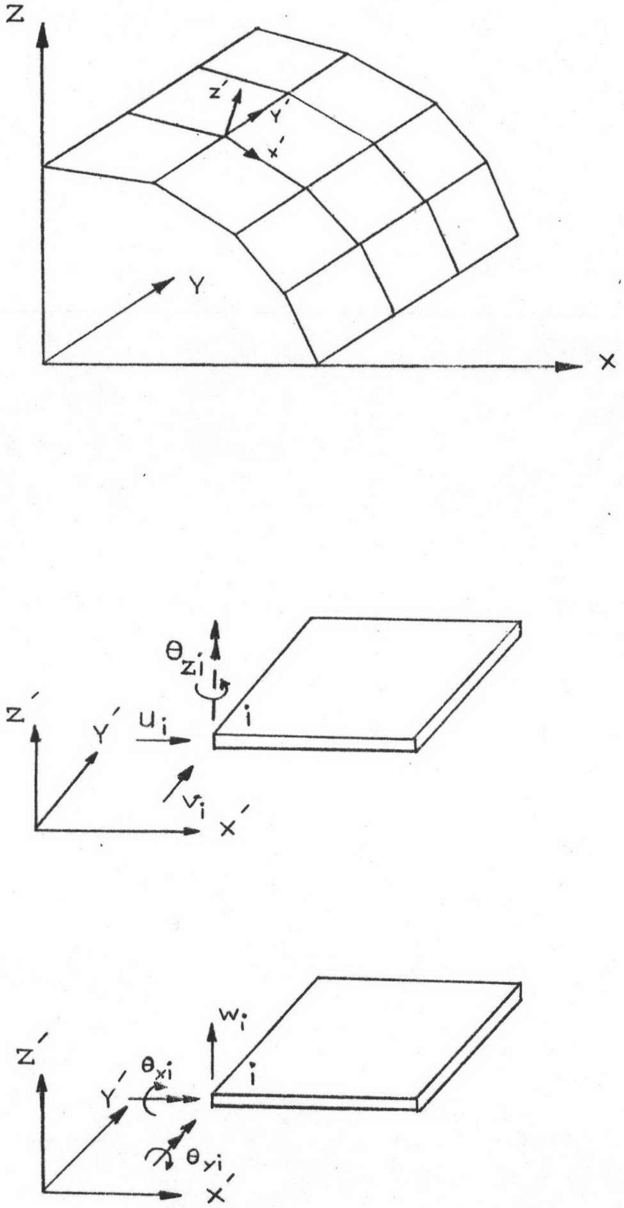
บทที่ ๔

วิธีการไฟไนท์เอลเม้นท์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์นั้น ลำดับแรกแบ่งโครงสร้างออกเป็นชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หาสตีฟเนส (Stiffness) ของชิ้นส่วนย่อยโดยใช้ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ร่วมกับทฤษฎียืดหยุ่น (Theory of Elasticity) และหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด (The Minimization of the Total Potential Energy) เปลี่ยนสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยจาก Local Coordinate ให้อยู่ใน Global Coordinate โดยแมททริกซ์แปรเปลี่ยน (Transformation Matrix) รวมสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดเข้าด้วยกันโดยวิธีการรวมส่วน (The Direct Stiffness Procedure) เป็นสตีฟเนสของโครงสร้าง กำหนดเงื่อนไขบนพื้นผิวโครงสร้าง (Boundary Condition) ทำให้สามารถหาค่าระยะเคลื่อน (displacements) ที่ขั้วต่างๆอันเนื่องจากแรงกระทำได้ นำค่าระยะเคลื่อนที่ขั้วต่างๆไปหาค่าแรงกระทำในระนาบและแรงตัดต่อไปได้

๑. <u>การหาค่าสตีฟเนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z</u>

การหาค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในระนาบและนอกระนาบได้กล่าวไว้ในบทที่ ๓ เมื่อนำสตีฟเนสทั้งสองส่วนรวมกันเข้าจะได้แมททริกซ์สตีฟเนสขนาด 20x20 ใน Local Coordinate ของชิ้นส่วนย่อยที่แต่ละขั้วมี 5 ดีกรีของความอิสระ กรณีของโครงสร้างเปลือกบางชิ้นส่วนย่อยจะมีการหมุนรอบแกน Z เป็นดีกรีของความอิสระเพิ่มขึ้นอีก 1 ดีกรี ตามรูปที่ ๔.๑ ดังนั้นแมททริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยสำหรับโครงสร้างเปลือกบางจะมีขนาดเป็น ๒๔x๒๔ ซึ่งสามารถหาได้โดยการกำหนดค่าสตีฟเนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z ในแมททริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยที่แต่ละขั้วมี 5 ดีกรีของความอิสระให้เท่ากับศูนย์ แต่ในการวิเคราะห์จะเกิดปัญหาขึ้นในกรณีที่ชิ้นส่วนย่อยที่ต่อเนื่องกันอยู่ในระนาบเดียวกัน ทั้งนี้เพราะการเปลี่ยนสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยจาก Local Coordinate เป็น Global Coordinate ด้วยการคูณสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยด้วยแมททริกซ์



รูปที่ ๔.๑ แสดงดีกรีของความอิสระสำหรับชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบาง

แปรเปลี่ยน (Transformation Matrix) จะทำให้ได้สมการที่เป็น Singular ในงานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีแก้ไขปัญหาการใช้ชิ้นส่วนย่อยที่แต่ละข้อมี 5 ดีกรีของความอิสระมาวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางโดยการใช้ค่า Fictitious Rotation Stiffness ที่เหมาะสมแทนค่าศูนย์ในแมททริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยใน Local Coordinate ซึ่งเมื่อเปลี่ยนให้อยู่ใน Global Coordinate แล้วจะได้สมการซึ่งสามารถคำนวณหาค่าผลลัพธ์ต่างๆได้

ค่า Fictitious Set of Rotation Stiffness ที่ใช้ใน การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางนี้ ได้เพิ่มเติมมาจากค่าที่ O.C. Zienkiewicz, C.J. Parekh, และ I.P. King ได้เสนอไว้ดังได้กล่าวแล้วในบทที่ ๑ โดยอาศัยหลักการที่ว่าค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยจะขึ้นอยู่กับค่าโมดูลัสยืดหยุ่น ความหนา และพื้นที่ สำหรับโปรแกรมที่ใช้ค่า Fictitious Set of Rotation Stiffness (ที่ใช้กับชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดไม่ว่าจะอยู่ในระนาบเดียวกันหรือไม่ และไม่มีผลกระทบต่อความสมดุลย์ใน Local Coordinate) ของชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบนราบมีค่าตามที่กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \\ M_{zl} \end{bmatrix} = \alpha\ ETA \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{zl} \end{bmatrix} \qquad (๔.๑)$$

α = สัมประสิทธิ์ของ Fictitious Rotation Stiffness

E = โมดูลัสยืดหยุ่น

T = ความหนาของชิ้นส่วนย่อย

A = พื้นที่ของชิ้นส่วนย่อย

๒. การหาค่าแมททริกซ์แปรเปลี่ยน (๑๑)

สำหรับเวคเตอร์ (vector) $\underset{\sim}{i}$ อันหนึ่งที่กำหนดให้อยู่ในแนวแกน x_m ของ Local axes (x_m, y_m, z_m) โดยที่เวคเตอร์ $\underset{\sim}{i}$ เอียงทำมุม $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ กับแกน X,Y,Z ของGlobal Axes ตามลำดับดังแสดงในรูป ๔.๒ ทิศทางของแกน x_m สามารถกำหนดได้ด้วย Direction Cosines

C_x, C_y, C_z ซึ่งมีค่าดังนี้

$$C_x = \text{Cos } \gamma_x \qquad (๔.๒)$$

$$C_y = \text{Cos } \gamma_y \qquad (๔.๓)$$

$$C_z = \text{Cos } \gamma_z \qquad (๔.๔)$$

สมมุติให้เวคเตอร์ i มี Coordinate เป็น x_j, y_j, z_j ที่จุดตั้งต้น j และ X_k, y_k Z_k ที่ปลาย k ใน Global Coordinate System Direction Cosines เขียนได้เป็น

$$C_x = \frac{X_k - X_j}{L_i} \qquad (๔.๕)$$

$$C_y = \frac{Y_k - Y_j}{L_i} \qquad (๔.๖)$$

$$C_z = \frac{Z_k - Z_j}{L_i} \qquad (๔.๗)$$

โดยที่

$$L_i = \sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2 + (Z_k - Z_j)^2} \qquad (๔.๘)$$

๒.๑ การแปรเปลี่ยนตามลำดับการหมุนรอบแกน Y- Z- X

ลำดับแรกกำหนดให้ระบบแกนอ้างอิง (X,Y,Z) หมุนรอบแกน Y ไปเป็นมุม α ตามรูปที่ ๔.๓ จะได้ชุดใหม่ของระบบแกน X_α Y_α Z_α โดยที่แกน x_α ของระบบแกนใหม่จะทับกับเส้นที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ X - Z กับระนาบ Y - X_m แกน X_α และ Z_α จะยังคงอยู่ในระนาบ X - Z ตามเดิม แกน Y_α จะทับกับแกน Y เวคเตอร์ $\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z$ ในระบบแกน X -Y - Z สามารถแตกเป็น $V_{\alpha x}, V_{\alpha y}, V_{\alpha z}$ ในระบบของแกนใหม่ X_α Y_α Z_α ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha x} \\ V_{\alpha y} \\ V_{\alpha z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \text{Cos}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \\ \bar{V}_z \end{bmatrix} \qquad (๔.๙)$$

$$\text{Sin}\alpha = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \qquad (๔.๑๐)$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \qquad (๔.๑๑)$$

$$\left[V_\alpha\right] = \left[C_\alpha^s\right]\left[\bar{V}\right] \qquad (๔.๑๒)$$

ลำดับที่สองกำหนดให้ระบบแกน X_α Y_α Z_α หมุนรอบแกน Z_α เป็นมุม β ตามรูปที่ ๔.๔ จากการหมุนครั้งนี้ทำให้แกน X_βทับกับแกน X_m และแกน Z_β ยังคงทับกับแกน Z_αตามเดิมแกน Y_m และ Z_m จะอยู่ในระนาบ Y_β- Z_β เวคเตอร์ $V_{\alpha x}$ $V_{\alpha y}$, $V_{\alpha z}$ ในระบบแกน X_α, Y_α, Z_α สามารถแตกให้อยู่ในระบบแกนใหม่ X_β, Y_β, Z_β ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V_{\beta x} \\ V_{\beta y} \\ V_{\beta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\beta & \text{Sin}\beta & 0 \\ -\text{Sin}\beta & \text{Cos}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha x} \\ V_{\alpha y} \\ V_{\alpha z} \end{bmatrix} \qquad (๔.๑๓)$$

$$\text{Sin}\beta = C_y \qquad (๔.๑๔)$$

$$\text{Cos}\beta = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \qquad (๔.๑๕)$$

$$\left[V_\beta\right] = \left[C_\beta^s\right]\left[V_\alpha\right] \qquad (๔.๑๖)$$

ลำดับสุดท้ายกำหนดให้ระบบแกน X_β Y_β Z_βหมุนรอบแกน X_β ซึ่งทับกับแกน X_m เป็นมุม Ψ_y ซึ่งทำให้แกน Y_β ทับ Y_m และ Z_βทับกับแกน Z_m พอดีตามรูป ๔.๕ เวคเตอร์ $V_{\beta x}$ $V_{\beta y}$ $V_{\beta z}$ ในระบบแกน $X_{\beta x}$ $Y_{\beta y}$ $Z_{\beta z}$สามารถแตกเป็น V_x, V_y, V_z ในระบบแกน X_m, Y_m, Z_m ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi_y & \sin\Psi_y \\ 0 & -\sin\Psi_y & \cos\Psi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\beta x} \\ V_{\beta y} \\ V_{\beta z} \end{bmatrix} \quad (๔.๑๗)$$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{s}_{\Psi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\beta} \end{bmatrix} \quad (๔.๑๘)$$

รวมสมการ (๔.๑๒), (๔.๑๖) และ (๔.๑๘) เข้าด้วยกันชุดของเวคเตอร์ในระบบแกน X, Y, Z ของเวคเตอร์ Vo สามารถที่จะแตกให้เป็นชุดของเวคเตอร์ในระบบแกน X_m, Y_m, Z_m ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{s}_{\Psi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{s}_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{s}_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \end{bmatrix} \quad (๔.๑๙)$$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{s}_{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \end{bmatrix} \quad (๔.๒๐)$$

$$\begin{bmatrix} C^{s}_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{s}_{\Psi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{s}_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{s}_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (๔.๒๑)$$

ซึ่งค่า $\begin{bmatrix} C^{s}_{y} \end{bmatrix}$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} C^{s}_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_xC_y\cos\Psi_y - C_z\sin\Psi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2}\,\cos\Psi_y & \dfrac{-C_yC_z\cos\Psi_y + C_x\sin\Psi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \dfrac{C_xC_y\sin\Psi_y - C_z\cos\Psi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2}\,\sin\Psi_y & \dfrac{C_yC_z\sin\Psi_y + C_x\cos\Psi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (๔.๒๒)$$

สำหรับค่า Sin Ψ_y และ Cos Ψ_y หาได้โดยการกำหนดจุด P ให้อยู่ในระบบแกน X,Y,Z ซึ่งมี $\bar{X}_p$, $\bar{Y}_p$, $\bar{Z}_p$ เป็นพิกัดของจุด P ตามแกน X,Y,Z ตามลำดับดังในรูปที่ ๔.๕ เวคเตอร์ $\bar{X}_p$, $\bar{Y}_p$, $\bar{Z}_p$ สามารถแตกให้อยู่ในระบบแกน X_β, Y_β, Z_β ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} X_{\beta p} \\ Y_{\beta p} \\ Z_{\beta p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_p \\ \bar{Y}_p \\ \bar{Z}_p \end{bmatrix} \qquad (๔.๒๓)$$

$$X_{\beta p} = C_x\bar{X}_p + C_y\bar{Y}_p + C_z\bar{Z}_p \qquad (๔.๒๔)$$

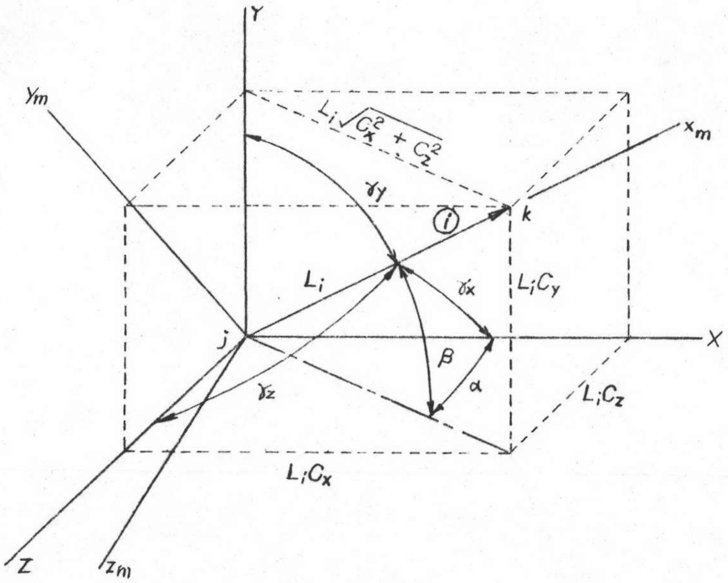
$$Y_{\beta p} = \frac{-C_xC_y}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\bar{X}_p + \sqrt{C_x^2 + C_z^2}\,\bar{Y}_p - \frac{C_yC_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\bar{Z}_p \qquad (๔.๒๕)$$

$$Z_{\beta p} = \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\bar{X}_p + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\bar{Z}_p \qquad (๔.๒๖)$$

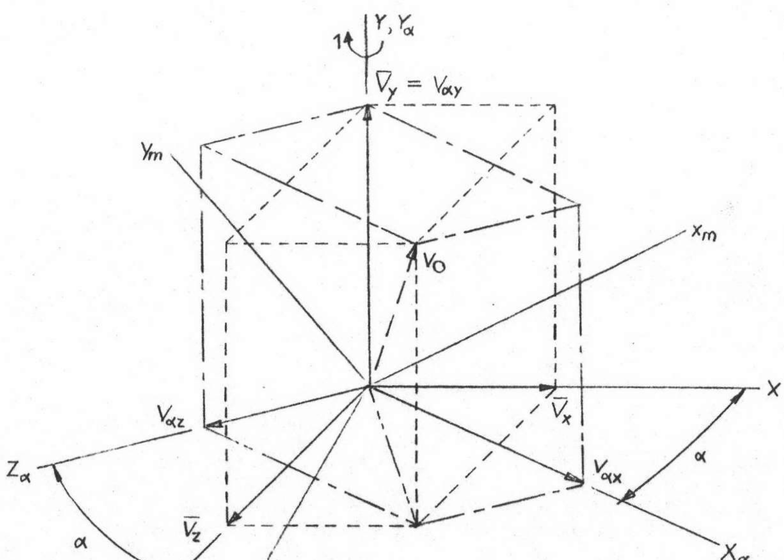
จากรูป ๔.๘

$$\sin \Psi_y = \frac{Z_{\beta p}}{\sqrt{Y^2_{\beta p} + Z^2_{\beta p}}} \qquad (๔.๒๗)$$

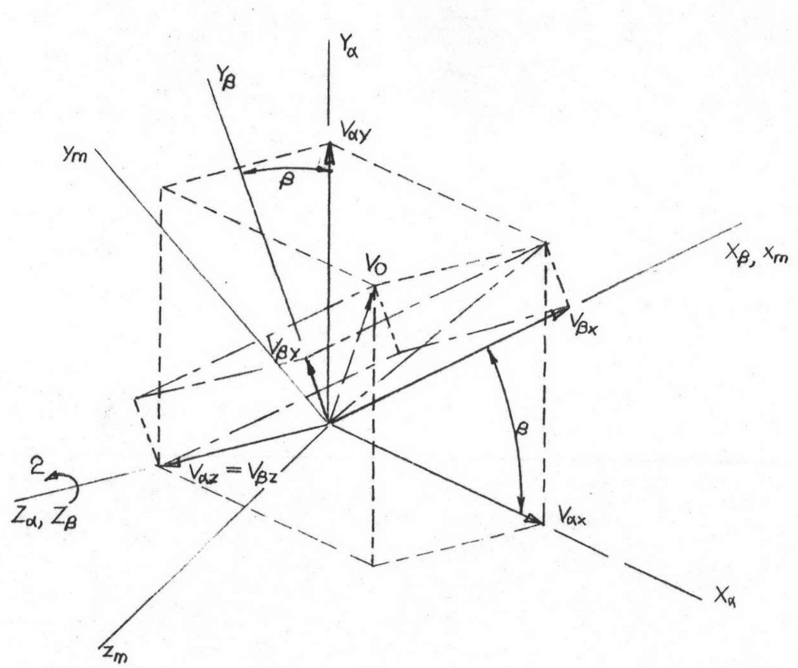
$$\cos \Psi_y = \frac{Y_{\beta p}}{\sqrt{Y^2_{\beta p} + Z^2_{\beta p}}} \qquad (๔.๒๘)$$



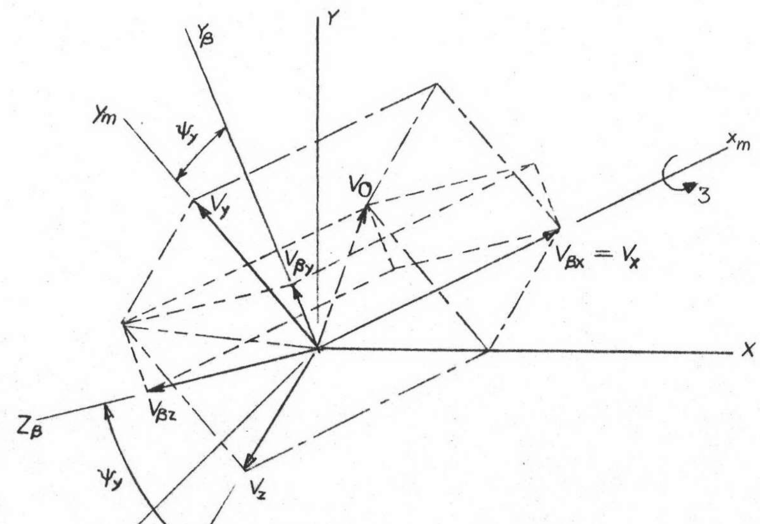
รูปที่ ๔.๒ แสดงการวางตัวของเวคเตอร์ i ในระบบแกนอ้างอิง X,Y,Z



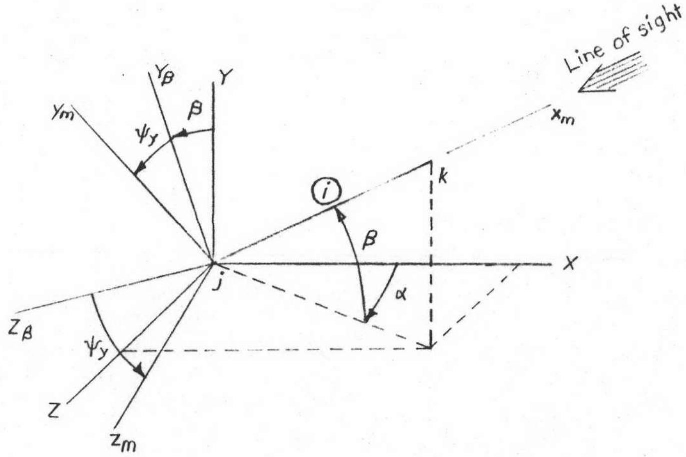
รูปที่ ๔.๓ แสดงการหมุนรอบแกน Yจากระบบ X,Y,Z เป็น $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$

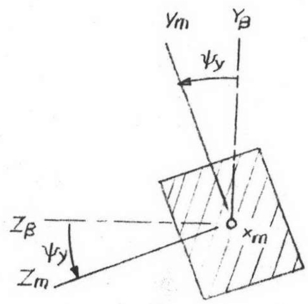


รูปที่ ๔.๔ แสดงการหมุนรอบแกน Z_α จากระบบ $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ เป็น $X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$



รูปที่ ๔.๕ แสดงการหมุนรอบแกน X_β จากระบบ $X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$ เป็น X_m, Y_m, Z_m





รูปที่ ๔.๖ แสดงมุม ψ ของระบบการหมุน Y-Z-X

๓. การวิเคราะห์หาค่าแรงในแนวระนาบและแรงดัด

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของวิธีการเคลื่อน (The Displacement Method) ซึ่งมีสมการพื้นฐานคือ

$$\{\underset{\sim}{P}\} = [K_c]\{\underset{\sim}{r}\} \qquad (๔.๒๙)$$

$\{\underset{\sim}{P}\}$ = คอลัมน์แมททริกซ์ของแรงกระทำภายนอก

$\{\underset{\sim}{r}\}$ = คอลัมน์แมททริกซ์ของระยะเคลื่อนที่

$[K_c]$ = สตีฟเนสแมททริกซ์ของโครงสร้าง

ค่าระยะเคลื่อนที่ที่ข้อต่าง ๆ สามารถหาค่าได้โดยการแก้สมการพื้นฐานนี้

แรงในแนวระนาบเป็นแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาวประกอบด้วยแรงในทิศทาง X, Y (F_x, F_y) และแรงเฉือนในระนาบ (F_{xy}) ซึ่งหาได้จากสมการ

$$F_x = \frac{ET}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon'_x + \nu\varepsilon'_y\right] \qquad (๔.๓๐)$$

$$F_y = \frac{ET}{(1-\nu^2)}\left[\nu\varepsilon'_x + \varepsilon'_y\right] \qquad (๔.๓๑)$$

$$F_{xy} = \frac{ET}{(1-\nu^2)}\left[\frac{(1-\nu)}{2}\varepsilon'_{xy}\right] \qquad (๔.๓๒)$$

สำหรับแรงดัดเป็นแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาวประกอบด้วยแรงดัดรอบแกน x,y (M_x,M_y) และแรงดัดในทิศทาง xy ซึ่งหาได้ดังนี้จากสมการ

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \qquad (๔.๓๓)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon''_x \\ \varepsilon''_y \\ \varepsilon''_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (๔.๓๔)$$

จากสมการ (๓.๒๖)

$$\varepsilon''_x = z\,\Phi_{\tilde{B},xx} \left[A\right]^{-1} \underset{\sim}{w}$$

$$\varepsilon''_y = z\,\Phi_{\tilde{B},yy} \left[A\right]^{-1} \underset{\sim}{w} \qquad (๔.๓๕)$$

$$\varepsilon''_{xy} = 2z\,\Phi_{\tilde{B},xy} \left[A\right]^{-1} \underset{\sim}{w}$$

แทนค่าสมการ (๔.๓๕) และ (๔.๓๖) ลงในสมการ (๔.๓๔) แล้วอินทิเกรดจะได้

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{\tilde{B},xx} \\ \Phi_{\tilde{B},yy} \\ 2\Phi_{\tilde{B},xy} \end{Bmatrix} \left[A\right]^{-1} \underset{\sim}{w} \qquad (๔.๓๖)$$

๔. <u>โปรแกรมคอมพิวเตอร์</u>

๔.๑ <u>ลำดับขั้นการคำนวณของโปรแกรม</u>

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์สามารถสรุปลำดับขั้นการคำนวณได้ดังนี้

ก. ป้อนข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ เช่น ค่าพิกัดตามแกนทั้งสามของขั้วต่าง ๆหมายเลขประจำขั้วและชิ้นส่วนย่อย ความหนาของชิ้นส่วนย่อย ภาวะเงื่อนไขบนพื้นผิวและแรงกระทำที่ขั้ว

ในทิศทางตามแกนทั้งสาม

ข. คำนวณค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยและเปลี่ยนค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยใน Local Coordinate ให้เป็นสตีฟเนสในระบบ Global Coordinate

ค. รวมสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดให้เข้าเป็นสตีฟเนสของโครงสร้างโดยวิธีการรวมส่วนโดยตรง

ง. กำหนดภาวะเงื่อนไขบนพื้นผิวของโครงสร้าง

จ. แก้สมการ (๔.๒๙) หาค่าระยะเคลื่อนที่ขั้วต่างๆ

ฉ. คำนวณหาค่าแรงในระนาบและแรงดัด

๔.๒ แผนภูมิของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนท์-เอลเม้นท์