บทที่ ๓

การหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย

๑. สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในแนวระนาบ (The Membrane Stiffness)

ชิ้นส่วนย่อยที่ใช้หาสติฟเนสของโครงสร้างส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในแนวระนาบคือ ชิ้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่เรียกว่า QM5 ซึ่ง Local และNatural Coordinate System สำหรับชิ้นส่วนย่อยนี้แสดงไว้ในรูปที่ ๓.๑ The Natural Coordinate เป็นระบบ s และ t ขณะที่ The Local Cartesian System เป็นระบบ X และ Y ระบบ s และ t กำหนดว่าแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าเป็นค่าคงที่ s หรือ t รูป ๓.๑ แสดงถึงชิ้นส่วนย่อย QM5 ที่มีแต่ละด้านเป็น s และ t ใน (s,t) Coordinate.

The Local Cartesian System และThe Natural Coordinate System สัมพันธ์กันดังนี้

$$x = \sum_{i=1}^{4} h_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} h_i y_i \qquad (i = \text{Exterior Nodal Point Number}) \qquad (๓.๑)$$

ฟังก์ชั่นแห่งการประมาณ (Interpolation Functions) แสดงได้ดังนี้

$$h_1 = \frac{1}{4}(1 - s)(1 - t)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1 + s)(1 - t)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1 + s)(1 + t) \qquad (๓.๒)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1 - s)(1 + t)$$

x_i และ y_i เป็น Local Cartesian Coordinate ของชิ้นส่วนย่อยที่มีขั้วภายนอก ๔ ขั้ว

รูป ๓.๒ แสดงถึงดีกรีของความอิสระที่ขั้วและเวคเตอร์การเคลื่อนที่จากสมการ (๓.๒) ฟังก์ชั่นแห่งการประมาณรวมกับพจน์สำหรับดีกรีของความอิสระภายในตรงจุดเริ่มต้นของ The Natural Coordinate System กลายเป็นฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$u\ (s,\ t) = \sum_{i=1}^{4} h_i\ u_i + h_5\ u_5$$

$$v\ (s,\ t) = \sum_{i=1}^{4} h_i\ v_i + h_5\ v_5 \qquad (๓.๓)$$

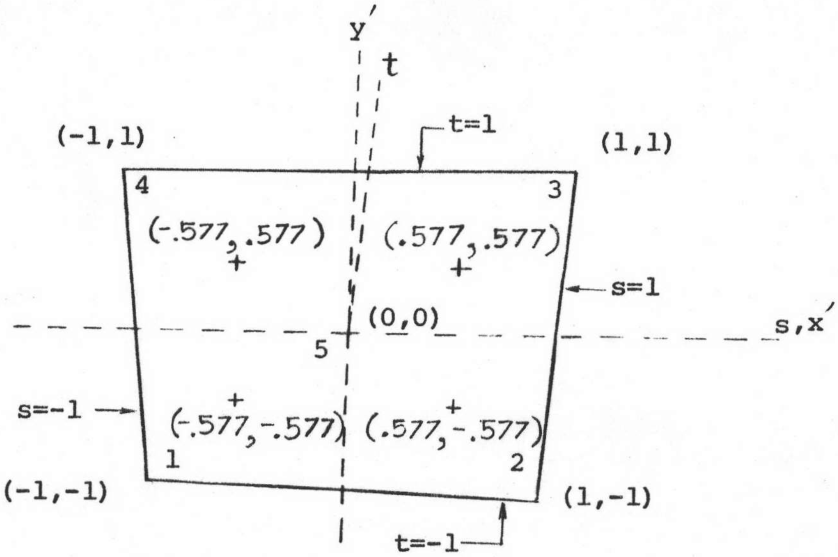
$$h_5 = (1 - s^2)(1 - t^2)$$

ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ตามสมการ (๓.๓) มีคุณสมบัติที่ทำให้ระยะเคลื่อนที่ระหว่างชิ้นส่วนย่อยที่พิจารณากับชิ้นส่วนย่อยที่ต่อเนื่องกันมีความประสานเข้ากันได้เนื่องจากการแปรเปลี่ยนของระยะเคลื่อนตามด้านโดยรอบของชิ้นส่วนย่อยเป็นเชิงเส้น ทั้งนี้เพราะว่าค่า h_5 จะหมดไปที่บริเวณขอบของชิ้นส่วนและจากการพิจารณาค่าพลังงานจากแรงเฉือนเฉพาะขั้วที่กึ่งกลางชิ้นส่วนพบว่าการตอบสนองต่อการดัดงอดีขึ้น ค่าพลังงานเนื่องจากแรงเฉือนของขั้วตรงกลางชิ้นส่วนสามารถหาได้โดยการกำหนดให้ค่าความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนเป็นค่าคงที่ตลอดชิ้นส่วนย่อยและความเครียดคงที่เนื่องจากแรงเฉือนสามารถหาค่าได้โดยการคิดค่าความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนที่จุดกำเนิดของ The Natural Coordinate (s = t = 0)

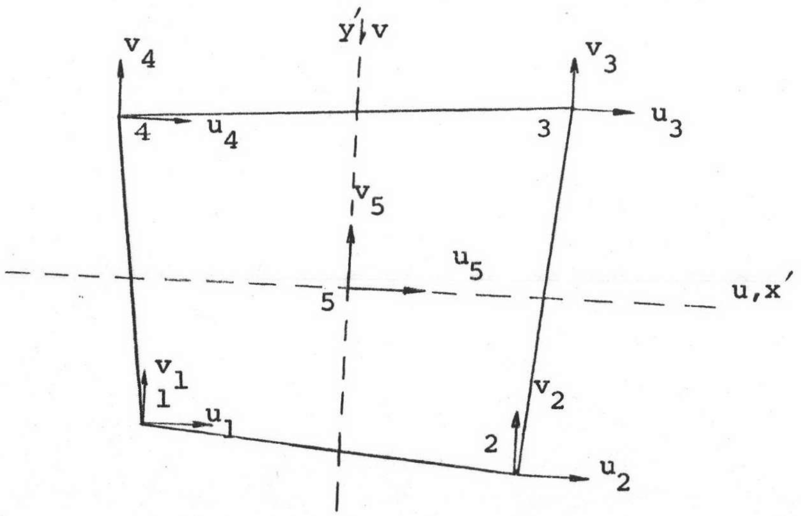
ด้วยเหตุผลตามที่กล่าวร่วมกับสมการ (๒.๔) ค่า The Strain-Displacement Equations สามารถหาได้ดังนี้

$$\varepsilon'_x = u,_x = \sum_{i=1}^{4} h_{i,x}\ u_i + h_{5,x}\ u_5$$

$$\varepsilon'_y = v,_y = \sum_{i=1}^{4} h_{i,y}\ v_i + h_{5,y}\ v_5 \qquad (๓.๔)$$



รูปที่ ๓.๑ แสดงรูปร่างลักษณะของชิ้นส่วนย่อย QM5



รูปที่ ๓.๒ แสดงดีกรีของความอิสระสำหรับ QM5

$$\varepsilon'_{xy} = u,_y + v,_x = \sum_{i=1}^{4} h_{i,y}\, u_i \Big|_{x=y=o} + \sum_{i=1}^{4} h_{i,x}\, v_i \Big|_{x=y=o}$$

จากสมการ (2.6)

$$\underset{\sim}{\varepsilon'} = [B'] \underset{\sim}{u}$$

สำหรับชิ้นส่วนย่อย QM5 $\underset{\sim}{u}$ มีค่าดังนี้

$$u^T = \{u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\ u_4\ v_4\ u_5\ v_5\} \qquad (๓.๕)$$

ค่าความเครียดทั้ง ๓ ค่ามีความสัมพันธ์กับตัวแปรการเคลื่อนที่ที่ขั้วทั้งสิบตัวโดยแมททริกซ์ 3 x 10[B′] เนื่องจากค่าฟังก์ชั่นแห่งการประมาณอยู่ในรูปของ s และ t เพราะฉะนั้นจะต้องใช้ Chain Rule เพื่อที่จะคำนวณหาค่าอนุพันธ์เทียบกับระบบ x และ y Coordinate ค่าอนุพันธ์ที่ต้องการคือ

$$h_{i,x} = h_{i,s}\, s,_x + h_{i,t}\, t,_x \qquad (๓.๖)$$

$$h_{i,y} = h_{i,s}\, s,_y + h_{i,t}\, t,_y$$

ซึ่ง Chain Rule สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x,_s & y,_s \\ x,_t & y,_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (๓.๗)$$

Invert ของ Chain Rule

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s,_x & t,_x \\ s,_y & t,_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \qquad (๓.๘)$$

ค่าอนุพันธ์ที่ต้องการในสมการ (๓.๘) คือ

$$s,_x = 1/J\ y,_t$$

$$t,_x = 1/J\ y,_s$$

$$s,_y = 1/J\ x,_t \qquad (๓.๙)$$

$$t,_y = 1/J\ x,_s$$

J หมายถึง The Jacobian Determinant มีค่าตามที่กำหนดคือ

$$J = J(s,t) = x,_s\, y,_t - x,_t\, y,_s \qquad (๓.๑๐)$$

อนุพันธ์ของสมการ (3.1)

$$x,_s = \sum_{i=1}^{4} h_{i,s}\, x_i$$

$$x,_t = \sum_{i=1}^{4} h_{i,t}\, x_i \qquad (๓.๑๑)$$

$$y,_s = \sum_{i=1}^{4} h_{i,s}\, y_i$$

$$y,_t = \sum_{i=1}^{4} h_{i,t}\, y_i$$

แมททริกซ์ 3 x 10[B′]

$$[B'] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 & R_3 & 0 & R_4 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 & Z_2 & 0 & Z_3 & 0 & Z_4 & 0 & Z_5 \\ Z_6 & R_6 & Z_7 & R_7 & Z_8 & R_8 & Z_9 & R_9 & Z_{10} & R_{10} \end{bmatrix} \qquad (๓.๑๒)$$

$$R_i = h_{i,x}$$

$$Z_i = h_{i,y} \qquad (๓.๑๓)$$

$$R_{i+5} = R_i\big|_{s=t=o}$$

$$Z_{i+5} = Z_i\big|_{s=t=o} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

นิพจน์เหล่านี้สามารถคำนวณได้และแสดงค่าไว้ในตารางที่ ๓.๑

สมการ (๒.๑๐) กำหนดค่า The Membrane Stiffness ของชิ้นส่วนย่อยไว้ดังนี้

$$[K_m] = \int_{vol} [B']^T [D] [B'] dv$$

สำหรับระบบ s และ t สมการ (๒.๑๐) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$[K_m] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} T [B']^T [D] [B'] J \, ds dt \qquad (๓.๑๔)$$

ซึ่ง T เป็นค่าความหนาของชิ้นส่วนย่อย สำหรับชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ Closed Form Solution ของสมการ (๓.๑๔) ยังไม่สามารถหาได้ต้องใช้วิธี Numerical Integration สูตรการอินทิเกรดที่ใช้กันมีอยู่ 2 สูตรซึ่งแตกต่างกัน (9) ทั้งสองสูตรเป็นสูตรอินทิเกรดของ Gauss (Gaussian Integration) สูตรแรกปรับปรุงจากการอินทิเกรด 3 จุดใน 1 มิติเป็น 9 จุดใน 2 มิติสูตรที่สองเป็นการอินทิเกรด 4 จุดซึ่งปรับปรุงจากสูตรอินทิเกรด 2 จุด ถึงแม้นว่าสูตรที่ หนึ่งจะสามารถคำนวณได้ผลอย่างละเอียดกว่ากับนิพจน์อนุพันธ์ที่ลำดับสูงในสมการพลังงานเนื่องจากความเครียด แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้สูตรที่สองเพราะคำนวณหาค่าสตีฟเนสได้ง่ายและสะดวกกว่า ผลลัพธ์ที่ได้ถูกต้องเพียงพอ (๘.๙) โดยการใช้สูตรที่สองสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยสามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$[K_m] = \sum_{j=1}^{4} T [B'(s_j, t_j)]^T [D] [B'(s_j, t_j)] J(s_j, t_j) \qquad (๓.๑๕)$$

จุด 4 จุดที่ใช้ในวิธีการของ Numerical Integration ในระบบ s และ t มีค่าโดยประมาณดังต่อไปนี้ (รูปที่ ๓.๑)

$$(-.577, -.577), (.577, -.577), (.577, .577), (-.577, .577) \qquad (๓.๑๖)$$

และก่อนที่จะรวมสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย $[K_m]$ เข้าไปในสตีฟเนสรวมของโครงสร้าง $[K_c]$ ดีกรีของความอิสระ 2 ค่าภายในชิ้นส่วนย่อยจะถูกขจัดออกไปโดยวิธีการของ Static Condensation

๒. <u>สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบ</u> (The Bending Stiffness)

ชิ้นส่วนย่อยที่ใช้ในการหาสตีฟเนสของโครงสร้างส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบคือชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ACM Adini และ Clough (๑๐) ได้ใช้ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วน-

ตารางที่ ๓.๑ แสดงพจน์ต่างๆสำหรับ $[B']$ ในสมการ(๓.๑๒)

$$R_1 = -(x_{24} - x_{34}s - x_{23}t)/8J$$

$$R_2 = -(-x_{23} + x_{34}s + x_{14}t)/8J$$

$$R_3 = -(-x_{24} + x_{12}s - x_{14}t)/8J$$

$$R_4 = -(x_{13} - x_{12}s + x_{23}t)/8J$$

$$R_5 = 2((1 - s^2)tx_{,s} - (1 - t^2)sx_{,t})/J$$

$$R_6 = -x_{24}/\bar{J}$$

$$R_7 = x_{23}/\bar{J}$$

$$R_8 = x_{24}/\bar{J}$$

$$R_9 = -x_{13}/\bar{J}, \quad R_{10} = 0$$

$$Z_1 = (y_{24} - y_{34}s - y_{23}t)/8J$$

$$Z_2 = (-y_{23} + y_{34}s + y_{14}t)/8J$$

$$Z_3 = (-y_{24} + y_{12}s - y_{14}t)/8J$$

$$Z_4 = (y_{13} - y_{12}s + y_{23}t)/8J$$

$$Z_5 = -2((1 - s^2)ty_{,s} - (1 - t^2)sy_{,t})/J$$

$$Z_6 = y_{24}/\bar{J} \qquad Z_7 = -y_{23}/\bar{J}$$

$$Z_8 = -y_{24}/\bar{J} \qquad Z_9 = y_{13}/\bar{J}, \quad Z_{10} = 0$$

โดยที่

$$X_{ij} = X_i - X_j$$

$$Y_{ij} = Y_i - Y_j$$

$$J = \{(x_{13}y_{24} - x_{24}y_{13}) + s(x_{34}y_{12} - x_{12}y_{34}) + t(x_{23}y_{14} - x_{14}y_{23})\}/8$$

$$\bar{J} = J(0,0) = x_{13}y_{14} - x_{24}y_{13}$$

ย่อยเป็นนิพจน์โพลีโนเมียล (Polynomial Expression) ซึ่งประกอบด้วย 12 พจน์เป็นครั้งแรก ระบบ Local Cartesian Coordinate ของชิ้นส่วนย่อยและระบบการจัดหมายเลขประจำข้อ (The Nodal Point Numbering System) ได้แสดงไว้ในรูปที่ ๓.๓ ดีกรีของความอิสระที่ข้อ-แสดงไว้ในรูปที่ ๓.๔ ตามภาพที่ ๓.๔ จะมีดีกรีของความอิสระ ๓ อันที่ข้อแต่ละข้อ ฉะนั้นในชิ้นส่วนแต่ละอันมีดีกรีของความอิสระอยู่ 12 อัน ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่โพลีโนเมียนที่ประกอบด้วย 12 พจน์สามารถแสดงได้ดังนี้

$$W(x,y) = \underset{\sim}{\Phi}_B \underset{\sim}{\alpha} \qquad (๓.๑๗)$$

$$\underset{\sim}{\Phi}_B = \{1,\ x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3 x^3y, xy^3\} \qquad (๓.๑๘)$$

$\underset{\sim}{\alpha}^T$ เป็นแมททริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของโพลีโนเมียนซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\alpha} \quad \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_{12}\} \qquad (๓.๑๙)$$

ตัวแปรการเคลื่อนที่ 12 ตัวที่ข้อทั้ง 4 ของชิ้นส่วนย่อยคือ

$$\underset{\sim}{w}^T = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}\} \qquad (๓.๒๐)$$

ค่า w_i สามารถคำนวณหาได้จากสมการ (๓.๑๗) ที่ข้อต่างๆส่วน θ_{xi} และ θ_{yi} สามารถหาได้โดย

$$\theta_{xi} = w_{,y}\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}$$

$$\theta_{yi} = -w_{,x}\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \qquad (๓.๒๑)$$

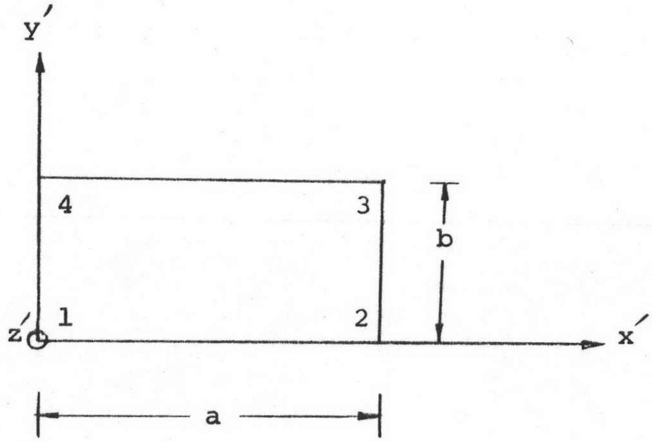
โดย $$\underset{\sim}{w} = [A]\underset{\sim}{\alpha} \qquad (๓.๒๒)$$

โดยการแปรผันกลับสมการ (๓.๒๒) ค่าสัมประสิทธิ์ของโพลีโนเมียลในสมการ (๓.๒๒) สามารถหาได้

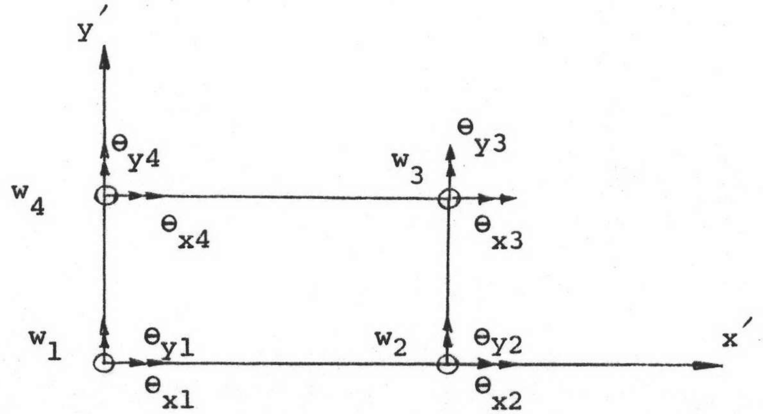
$$\underset{\sim}{\alpha} = [A]^{-1}\underset{\sim}{w} \qquad (๓.๒๓)$$

ดังนั้นสมการ (๓.๑๗) สามารถแสดงให้อยู่ในพจน์ของการเคลื่อนที่ที่ข้อได้ในลักษณะดังต่อไปนี้

$$w(x,y) = \underset{\sim}{\Phi}_B [A]^{-1}\underset{\sim}{w} \qquad (๓.๒๔)$$



รูปที่ ๓.๓ แสดงรูปร่างลักษณะของชิ้นส่วนย่อย ACM



รูปที่ ๓.๔ แสดงดีกรีของความอิสระที่ขั้วต่าง ๆ ของ ACM

แมททริกซ์ [A] และ $[A]^{-1}$ แสดงไว้ในตารางที่ ๓.๒ และค่าความเครียดในชิ้นส่วนย่อยหาได้โดยใช้สมการ (๒.๓) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon''_x = zw,_{xx}$$

$$\varepsilon''_y = zw,_{yy}$$

$$\varepsilon''_{xy} = 2zw,_{xy} \qquad (๓.๒๕)$$

โดยการใช้สมการ (๓.๒๕) ร่วมกับสมการ (๓.๒๔) ค่าความเครียดสามารถแสดงได้ในรูป

$$\varepsilon''_x = z\underset{\sim}{\Phi}_{B,xx}[A]^{-1}\underset{\sim}{w}$$

$$\varepsilon''_y = z\underset{\sim}{\Phi}_{B,yy}[A]^{-1}\underset{\sim}{w}$$

$$\varepsilon''_{xy} = 2z\underset{\sim}{\Phi}_{B,xy}[A]^{-1}\underset{\sim}{w} \qquad (๓.๒๖)$$

และจากสมการ (๒.๗)

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'' = [B'']\underset{\sim}{w}$$

ซึ่ง

$$[B''] = z\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_{B,xx} \\ \underset{\sim}{\Phi}_{B,yy} \\ 2\underset{\sim}{\Phi}_{B,xy} \end{bmatrix}[A]^{-1} \qquad (๓.๒๗)$$

จากสมการ (๒.๑๑) สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบ (The Bending Stiffness) เป็นดังนี้

$$[K_B] = \int_{vol}[B'']^T[D][B'']dv$$

แทนค่าสมการ (๓.๒๗) ลงในสมการข้างบนจะได้ค่าสตีฟเนสเป็น

$$[K_B] = [A]^{-1^T}[\bar{B}''][A]^{-1} \qquad (๓.๒๘)$$

โดยที่

$$[\bar{B}''] = \int_0^b\int_0^a\{\underset{\sim}{\Phi}_{B,xx}\ \underset{\sim}{\Phi}_{B,yy}\ 2\underset{\sim}{\Phi}_{B,xy}\}[D]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_{B,xx} \\ \underset{\sim}{\Phi}_{B,yy} \\ 2\underset{\sim}{\Phi}_{B,xy} \end{bmatrix}dxdy \qquad (๓.๒๙)$$

ตารางที่ ๓.๒ ก แสดงค่าแมททริกซ์ [A]

1											
		1									
	-1										
1	a		a^2			a^3					
		1		a			a^2			a^3	
	-1		-2a			$-3a^2$					
1	a	b	a^2	ab	b^2	a^3	a^2b	ab^2	b^3	a^3b	ab^3
		1		a	2b		a^2	2ab	$3b^2$	a^3	$3ab^2$
	-1		-2a	-b		$-3a^2$	-2ab	$-b^2$		$-3a^2b$	$-b^3$
1		b			b^2				b^3		
		1			2b				$3b^2$		
	-1			-b				$-b^2$			$-b^3$

ตารางที่ ๓.๒ข แสดงค่าแมททริกซ์ $[A]^{-1}$

1											
		-1									
	1										
$-\frac{3}{a^2}$		$\frac{2}{a}$	$\frac{3}{a^2}$		$\frac{1}{a}$						
$-\frac{1}{ab}$	$-\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a}$		$-\frac{1}{ab}$			$\frac{1}{ab}$		$-\frac{1}{b}$
$-\frac{3}{b^2}$	$-\frac{2}{b}$								$\frac{3}{b^2}$	$-\frac{1}{b}$	
$\frac{2}{a^3}$		$-\frac{1}{a^2}$	$-\frac{2}{a^3}$		$-\frac{1}{a^2}$						
$\frac{3}{a^2b}$		$-\frac{2}{ab}$	$-\frac{3}{a^2b}$		$-\frac{1}{ab}$	$\frac{3}{a^2b}$		$\frac{1}{ab}$	$-\frac{3}{a^2b}$		$\frac{2}{ab}$
$\frac{3}{ab^2}$	$\frac{2}{ab}$		$-\frac{3}{ab^2}$	$-\frac{2}{ab}$		$\frac{3}{ab^2}$	$-\frac{1}{ab}$		$-\frac{3}{ab^2}$	$\frac{1}{ab}$	
$\frac{2}{b^3}$	$\frac{1}{b^2}$								$-\frac{2}{b^3}$	$\frac{1}{b^2}$	
$-\frac{2}{a^3b}$		$\frac{1}{a^2b}$	$\frac{2}{a^3b}$		$\frac{1}{a^2b}$	$-\frac{2}{a^3b}$		$-\frac{1}{a^2b}$	$-\frac{2}{a^3b}$		$-\frac{1}{a^2b}$
$-\frac{2}{ab^3}$	$-\frac{1}{ab^2}$		$\frac{2}{ab^3}$	$\frac{1}{ab^2}$		$-\frac{2}{ab^3}$	$\frac{1}{ab^2}$		$-\frac{2}{ab^3}$	$-\frac{1}{ab^2}$	

แมททริกซ์ $\left[\bar{D}\right]$ ในสมการ (๓.๒๙) ได้จากการอินทิเกรดสมการ (๒.๑๑) ตลอดความหนาของชิ้นส่วนย่อยและรวมผลลัพธ์ที่ได้เข้ากับสมการความสัมพันธ์ของความเค้นความเครียดซึ่งแสดงในสมการ (๒.๕)ฉะนั้นแมททริกซ์ $\left[\bar{D}\right]$ แสดงได้ดังนี้

$$\left[\bar{D}\right] = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \qquad (๓.๓๐)$$

ผลคูณภายในเครื่องหมายอินทิเกรดของสมการ (๓.๒๙) สามารถหาค่าได้และปริมาณต่าง ๆ สามารถอินทิเกรดได้ง่ายและเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นแมททริกซ์ $\left[\bar{B}'\right]$ สามารถหาค่าได้.