บทที่ ๒

ภูมิหลังของทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

๑. บทนำ

การเลือกชิ้นส่วนย่อยสำหรับหาสตีฟเนสของโครงสร้างในส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในแนวระนาบ (Membrane Stiffness) สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ใช้ชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่เรียกว่า QM5 ซึ่งมีขั้ว 5 ขั้วเป็นขั้วที่มุม 4 ขั้วและขั้วตรงกลางชิ้นส่วนอีก 1 ขั้ว ลักษณะสำคัญอันหนึ่งของ QM5 คือความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนคงที่ (Constant Shear Strain) เพราะฉะนั้นพลังงานเนื่องจากแรงเฉือนจึงไม่ต้องนำมาพิจารณา สำหรับชิ้นส่วนย่อยที่ใช้หาสตีฟ - เนสของโครงสร้างส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบ (Bending Stiffness) ใช้ชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เรียกว่า ACM ซึ่งมี 4 ขั้วเป็นขั้วที่มุม ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ประกอบด้วยนิพจน์โพลีโนเมียล (Polynomial) 12 เทอม ซึ่งความประสานเข้ากันได้ระหว่างชิ้นส่วนย่อย (Compatibility) ยังไม่สมบูรณ์แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาทางสถิตศาสตร์ (Static) ชิ้นส่วนย่อย ACM ให้ผลลัพธ์ (ระยะเคลื่อนที่) ที่มีความถูกต้องเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป (๗)

๒. สมมุติฐาน

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางที่รับน้ำหนักสถิต (Static Load) สำหรับงานวิจัยนี้ตั้งอยู่บนรากฐานของสมมุติฐานดังต่อไปนี้

๒.๑ ในระนาบของชิ้นส่วนย่อยมีสภาพเป็น Plane Stress

๒.๒ สมมุติฐานของ Kirchhoff เป็นจริงคือ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวกลาง (Middle Surface) ก่อนการเปลี่ยนรูปยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับผิวกลางหลังเกิดการเปลี่ยนรูป นั่นคือพลังงานเนื่องจากการบิดโดยแรงเฉือนไม่นำมาพิจารณาในการคำนวณหาสตีฟเนสของโครงสร้าง

ส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบ แต่จะนำมาพิจารณาในการคำนวณหาสติฟเนสของโครงสร้างในส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในระนาบ

๒.๓ ความหนาของชิ้นส่วนย่อยแต่ละชิ้นมีค่าคงที่

๒.๔ วัสดุมีคุณสมบัติเป็น Linear, Isotropicและ Elastic

๓. <u>การหาค่าพลังงานเนื่องจากความเครียด</u> (The Strain Energy Expression)

กำหนดให้ U เป็นพลังงานเนื่องจากความเครียด (Strain Energy) ทั้งหมดของชิ้นส่วนย่อยซึ่งแสดงค่าได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_{vol} (\underset{\sim}{\varepsilon}'^{T}\,[D]\,\underset{\sim}{\varepsilon}')\,dv + \frac{1}{2}\int_{vol} (\underset{\sim}{\varepsilon}''^{T}\,[D]\,\underset{\sim}{\varepsilon}'')\,dv \qquad (๒.๑)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'^{T} = \{\varepsilon'_x \;\; \varepsilon'_y \;\; \varepsilon'_{xy}\} \qquad (๒.๒)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}''^{T} = \{\varepsilon''_x \;\; \varepsilon''_y \;\; \varepsilon''_{xy}\}$$

$$\varepsilon'_x = u,_x \qquad \varepsilon'_y = v,_y \quad \varepsilon'_{xy} = u,_y + v,_x \qquad (๒.๓)$$

$$\varepsilon''_x = zw,_{xx} \qquad \varepsilon''_y = zw,_{yy} \; \varepsilon''_{xy} = 2zw,_{xy}$$

$$,x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad ,xx = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$,y = \frac{\partial}{\partial y} \qquad ,yy = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad ,xy = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (๒.๔)$$

$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_{xy}$ = ความเครียดเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวระนาบ

$\varepsilon''_x \; \varepsilon''_y \; \varepsilon''_{xy}$ = ความเครียดเนื่องจากแรงดัด

z = ระยะทางตั้งฉากวัดจากผิวกลาง(Middle Surface) มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของความหนา

โดยกฎของHooke $\underset{\sim}{\sigma} = [D]\,\underset{\sim}{\varepsilon}$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (๒.๕)$$

E = โมดูลัสยืดหยุ่น

ν = อัตราส่วนยืดหด

อินทิเกรล (Integral) เทอมแรกในสมการ (๒.๑) เป็นค่าพลังงานเนื่องจากความเครียด (Strain Energy) ของความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ในแนวระนาบ อินทิเกรล (Integral) เทอมที่สองเป็นค่าพลังงานเนื่องจากความเครียด (Strain Energy) อันเนื่องมาจากแรงดัด (Bending)

สมมุติฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ของจุดต่างๆภายในชิ้นส่วนย่อยในเทอมของตัวแปรการเคลื่อนที่ที่ขั้วของชิ้นส่วน ค่าความเครียด (Strain) ภายในชิ้นส่วนย่อยสามารถหาได้โดยการใช้ฟังก์-ชั่นการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = [B'] \underset{\sim}{u} \qquad (๒.๖)$$

$\underset{\sim}{u}$ = ตัวแปรการเคลื่อนที่ที่ขั้วในแนวระนาบของชิ้นส่วน

$[B']$ = แมททริกซ์เชื่อมระหว่างตัวแปรเคลื่อนที่ที่ขั้วกับความเครียดในระนาบ

ในทำนองเดียวกันค่าความเครียดเนื่องจากแรงดัดสามารถแสดงได้ในเทอมของตัวแปรเคลื่อนที่อันเนื่องมาจากแรงดัดดังนี้

$$\underset{\sim}{\varepsilon}'' = [B''] \underset{\sim}{w} \qquad (๒.๗)$$

$\underset{\sim}{w}$ = ตัวแปรเคลื่อนที่ที่ขั้วของชิ้นส่วนย่อยเนื่องจากแรงดัด

$[B'']$ = แมททริกซ์เชื่อมระหว่างตัวแปรเคลื่อนที่ที่ขั้วกับความเครียดเนื่องจากแรงดัด

แทนค่าสมการ (๒.๖) และ (๒.๗) ลงในสมการ (๒.๑) ค่าพลังงานเนื่องจากความเครียด (Strain Energy) จะเป็นดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_{vol} \underset{\sim}{u}^T [B']^T [D] [B'] \underset{\sim}{u}\, dv + \frac{1}{2}\int_{vol} \underset{\sim}{w}^T [B'']^T [D] [B''] \underset{\sim}{w}\, dv \qquad (๒.๘)$$

$$U = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^T [K_m] \underset{\sim}{u} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{w}^T [K_B] \underset{\sim}{w} \qquad (๒.๙)$$

$[K_m]$ = สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมในระนาบ (The Membrane Stiffness)

$$= \int_{vol} [B']^T \; [D] \; [B'] \; dv \qquad (๒.๑๐)$$

$[K_B]$ = สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยส่วนที่เกี่ยวกับพฤติกรรมนอกระนาบ (The Bending Stiffness)

$$= \int_{vol} [B'']^T \; [D] \; [B''] \; dv \qquad (๒.๑๑)$$

โดยการรวมพลังงานเนื่องจากความเครียดทั้งสองส่วนเข้าด้วยกันค่าพลังงานเนื่องจากความเครียดทั้งหมดของชิ้นส่วน คือ

$$U = \frac{1}{2} \; \underset{\sim}{r}^T \; [K_c] \; \underset{\sim}{r} \qquad (๒.๑๒)$$

$$K_c = \begin{bmatrix} K_m & 0 \\ 0 & K_B \end{bmatrix} \qquad (๒.๑๓)$$

$$[\underset{\sim}{r}]^T = [\underset{\sim}{u} \quad \underset{\sim}{w}] \qquad (๒.๑๔)$$

$[\underset{\sim}{r}]$ = แมททริกซ์รวมของตัวแปรการเคลื่อนที่ที่ขั้วของชิ้นส่วนย่อยในแนวระนาบ กับตัวแปรการเคลื่อนที่ที่ขั้วของชิ้นส่วนย่อยนอกระนาบ

$[K_c]$ = สติฟเนสรวมของชิ้นส่วนย่อย