บทที่ ๑

บทนำ

๑. บททั่วไปและความเป็นมาของปัญหา

โครงสร้างเปลือกบางเป็นตัวอย่างอันหนึ่งขององค์อาคารที่มีความแข็งแรงและสามารถรับแรงกระทำได้โดยรูปร่างและลักษณะของโครงสร้างเป็นหลัก ซึ่งแตกต่างออกไปจากองค์อาคารส่วนอื่น ๆ ที่ต้องใช้ขนาดเป็นหลัก ฉะนั้นผู้ออกแบบจึงได้พยายามที่จะออกแบบโครงสร้างเปลือกบางให้มีความหนาน้อยที่สุดเท่าที่ในทางปฏิบัติการก่อสร้างจะทำได้ เพื่อที่ว่าน้ำหนักคงที่ของโครงสร้างจะได้ลดน้อยลงและทำให้โครงสร้างเปลือกบางนี้เกิดความเค้นเนื่องจากแรงดัดน้อยที่สุด

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางเมื่อถูกแรงภายนอกกระทำตามทฤษฎีกลศาสตร์นั้น สมการพื้นฐานซึ่งบรรยายพฤติกรรมของวัตถุอยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรน-เชียล (Differential Equations) แบบพาร์เชียลภายใต้เงื่อนไขบนพื้นผิวของวัตถุ (Boundary Value Problems in Mechanics) สมการประเภทนี้อยู่ในรูปของคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากซับซ้อนและทำได้หลายแบบแต่ละแบบขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ใช้ ฉะนั้นการวิเคราะห์หาคำตอบแน่นอนของสมการชุดเหล่านี้จะเป็นไปได้ในกรณีที่เรขาคณิตและคุณสมบัติของวัตถุที่พิจารณาประกอบกับเงื่อนไขบนพื้นผิวอยู่ในรูปแบบง่ายๆเท่านั้น

ดังนั้นเราจึงนิยมหาคำตอบโดยประมาณของปัญหาดังกล่าวเมื่อเงื่อนไขที่กำหนดให้มีความซับซ้อน วิธีการหาคำตอบโดยประมาณมีด้วยกันหลายวิธีแต่ละวิธีต่างมุ่งหวังที่จะเปลี่ยนรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียล (Differential Equations) ไปเป็นชุดของสมการเชิงเส้น (Linear Equations) ซึ่งสะดวกในการหาคำตอบโดยใช้เครื่องคำนวณคอมพิวเตอร์ (Computer) วิธีการไฟไนท์เอลเม้นท์ (The Finite Element Method (F.E.M)) เป็นวิธีการหนึ่งที่กำลังเป็นที่

นิยมอย่างกว้างขวางในวงการของนักวิจัยระดับสูงและงานในทางปฏิบัติทั่วไป (๒) การวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างในการวิจัยนี้จึงจะใช้วิธีการของไฟไนท์เอลเม้นท์

หลักเบื้องต้นของวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ คือโครงสร้างจริงถูกแทนด้วยโครงสร้างสมมุติซึ่งเกิดจากการรวมตัวกันของชิ้นส่วนย่อยๆที่เชื่อมต่อกันตรงจุดที่กำหนดให้เรียกว่าขั้ว (Nodal Points) (๓) และกำหนดฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ (The Displacement Model) ของจุดต่างๆในชิ้นส่วนย่อยเพื่อใช้แสดงพฤติกรรมของโครงสร้างสมมุติ โครงสร้างสมมุติจะมีพฤติกรรมเหมือนโครงสร้างจริงได้มากน้อยขึ้นอยู่กับว่า ชิ้นส่วนย่อย (Elements) ถูกแบ่งให้เล็กลงและมีจำนวนมากเท่าไรพฤติกรรมของโครงสร้างสมมุติก็จะใกล้เคียงกับโครงสร้างจริงยิ่งขึ้นเท่านั้น และชิ้นส่วนย่อยๆจะต้องมีฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ที่มีคุณสมบัติสำคัญตามต้องการดังต่อไปนี้

๑.๑ มีความต่อเนื่องและประสานเข้ากันได้ระหว่างชิ้นส่วนย่อยข้างเคียง (Compatibility with Adjacent Elements)

๑.๒ ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็ง (Inclusion of Rigid Body Displacement)

๑.๓ ประกอบด้วยความเครียดคงที่และสภาพการโค้งคงที่ (Inclusion of Constant Strain and Curvature States)

โดยทั่วไปการใช้ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ (The Displacement Model) ร่วมกับวิธีการรวมส่วนย่อยโดยตรง (The Direct Stiffness) เป็นที่ยอมรับกันว่าเป็นวิธีที่ง่ายและได้ผลดีซึ่งอาศัยการสมมุติฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ร่วมกับทฤษฎียืดหยุ่น (Theory of Elasticity) จะสามารถหาสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (Element Stiffness) แต่ละอันได้ เมื่อนำสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยแต่ละอันมารวมกันเข้าตามลำดับจะได้เป็นสตีฟเนสแมททริกซ์ของโครงสร้าง (The Stiffness Matrix of Structure) ซึ่งจะอยู่ในระบบสมการเชิงเส้น (Linear System) มีดีกรีของความอิสระที่ขั้วต่าง ๆ (The Nodal Point Degrees of Freedom) ในโครงสร้างเป็นตัวไม่ทราบค่าและค่าสตีฟเนสกับแรงกระทำที่ขั้วเป็นตัวทราบค่า วิธีนี้ใช้ได้ผลกับการวิเคราะห์โครงสร้างเช่น Plane Truss, Axisymmetric Solid และ Thin Shell

ในงานวิจัยนี้ต้องการศึกษาถึงค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (Element Stiffness) ใน Local Coordinate และปรับปรุงแก้ไขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Program) ที่ใช้สำหรับวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปต่าง ๆ ที่สามารถแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆรูปสี่-เหลี่ยมผืนผ้าได้ การวิจัยครั้งนี้จะพิจารณาถึงชิ้นส่วนย่อยแบนราบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Element) ที่รับแรงกระทำทั้งในแนวระนาบและแรงดัด (In plane Forces and Bending) ปฏิกริยาในแนวระนาบเป็น Plane Stress ความเครียด (Strain) สามารถแทนได้ด้วยนิพจน์ของฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ในทิศทาง X และ Y (ตัวแปรการเคลื่อนที่ u และ v) ของแต่ละขั้ว สตีฟเนสในระนาบของชิ้นส่วนย่อย (The Membrane Stiffness Matrices) หาได้โดยใช้หลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (The Minimization of the Total Potential Energy)

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาถึงแรงดัด (Bending) สภาพความเครียด (Strain) สามารถแทนได้ด้วยนิพจน์ของฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ในทิศทาง Z (ตัวแปรการเคลื่อนที่ w) และการหมุนในทิศทางรอบแกน X และแกน Y (ตัวแปรการหมุน θ_x และ θ_y)

ข้อควรคำนึงสองประการที่สำคัญก่อนการรวมสตีฟเนสทั้งสองส่วนเข้าด้วยกันคือ

๑.๑ การเคลื่อนที่ในแนวระนาบจะไม่มีผลกระทบต่อการเปลี่ยนรูปที่เกิดจากแรงดัดและเป็นจริงในทางกลับกันด้วย

๑.๒ ตัวแปรการหมุนรอบแกน Z (θ_z) มิได้เป็นตัว Parameter ในการกำหนดฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่แบบใดๆและไม่มีความเกี่ยวข้องในขบวนการหาสตีฟเนสโดยวิธีพลังงานต่ำสุด ฉะนั้นการนำการหมุนรอบแกน Z นี้มาคิดด้วยสามารถทำได้โดยง่ายโดยการกำหนดค่าที่สัมพันธ์กับแรงบิดรอบแกน Z ให้เท่ากับศูนย์ลงไปในสตีฟเนสแมททริกซ์ (Stiffness Matrix)

การรวมสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (Element Stiffness) เข้าด้วยกันจะเกิดความยุ่งยากขึ้นถ้าชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดที่ต่อเชื่อมกันที่ขั้วหนึ่งๆอยู่ในระนาบเดียวกัน ทั้งนี้เนื่องจากการกำหนดให้ค่าสตีฟเนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z เป็นศูนย์ ชุดสมการสมดุลย์ในระดับชิ้นส่วนย่อยที่ขั้วหนึ่งๆจะมีหกสมการซึ่งสมการสุดท้ายที่สอดคล้องกับ θ_z จะเป็น $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ สมการเช่นนี้จะทำให้การคำนวณในบางโปรแกรมเกิดความผิดพลาดขึ้นได้ ในกรณีที่ Global Coordinate แตกต่างไปจาก Local Coordinate จำเป็นต้องแปลงค่า Local Stiffness ให้เป็น Global Stiffness โดยการคูณ Local Element Stiffness Matrix ด้วย Transformation Matrix จะได้สมการหกสมการแต่สมการเหล่านี้เป็น Singular (๔)

เพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ ค่าสัมประสิทธิ์สตีฟเนส (Stiffness Coefficient, $k'_{\theta z}$) ที่เหมาะสมจะถูกใส่ลงไปแทนค่าศูนย์ในแมททริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย จะทำให้สมการ $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ ใน Local Coordinate กลายเป็น $K_{\theta z;\theta z_i} = 0$ ซึ่งเมื่อแปลงจาก Local ไปเป็น Global แล้วจะทำให้ได้สมการที่สามารถคำนวณหาค่าผลลัพธ์ได้

๒. <u>บททบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางโดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ได้มีผู้เสนอชิ้นส่วนย่อยที่แตกต่างกันหลายรูปแบบซึ่งแบ่งได้เป็นสองพวกคือแผ่นแบนราบ (Plan Form) กับที่เป็นส่วนโค้ง (Type of Curvature) ชิ้นส่วนย่อยทุกๆอันค่าฟังก์ชั่นแห่งการประมาณ (Interpolation Function) ที่ใช้ขึ้นอยู่กับจำนวนของขั้วในแต่ละชิ้นส่วนและจำนวนดีกรีของความอิสระที่แต่ละขั้ว ทฤษฎีของโครงสร้างเปลือกบางที่ใช้สมมติฐานของ Kirchhoff จะมีดีกรีของความอิสระ 5 ค่า (การเคลื่อนที่ตามแกนที่ตั้งฉากกัน 3 ค่าและการหมุนรอบแกนที่สัมผัสกับผิวของโครงสร้าง 2 ค่า)

ชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้าง เปลือกบาง เกือบทั้งหมดจะใช้ระบบมีขั้วอยู่ที่มุมของชิ้นส่วนและแต่ละขั้วมี5 ดีกรีของความอิสระ ชิ้นส่วนย่อยบางอันมีการแบ่งย่อยลงไปอีกโดยการกำหนดขั้วที่กึ่งกลางด้านของชิ้นส่วนและดีกรีของความอิสระบางอันเท่านั้นที่ถูกนำมาพิจารณา (๕) สำหรับชิ้นส่วนที่แต่ละขั้วถูกกำหนดให้ดีกรีของความอิสระเป็น 6 ค่า (การเคลื่อนที่ตามแกนที่ตั้งฉากกัน 3 ค่า การหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกัน 3 ค่า) ซึ่งการรวมสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (ที่มี 6 ดีกรีของความอิสระ) เข้าด้วยกันจะเกิดความยุ่งยากขึ้นในกรณีที่ชิ้นส่วนย่อยเหล่านี้ต่อเชื่อมกันที่ขั้วหนึ่งๆต่างก็อยู่ในระนาบเดียวกัน ทั้งนี้เพราะการกำหนดค่าสตีฟเนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับผิวโครงสร้างเป็นศูนย์ ซึ่งทำให้สมการสุดท้ายที่สอดคล้องกับ θ_z ในระดับชิ้นส่วนย่อยที่ขั้วหนึ่งๆ เป็น $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$

การแก้ปัญหานี้มี 2 วิธี

๒.๑ โดยการรวมสมการตรงจุดที่ชิ้นส่วนย่อยมาเชื่อมต่อในระนาบเดียวกันใน Local Coordinate แล้วขจัดสมการ $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ ออกไป

๒.๒ โดยการใส่ค่าสัมประสิทธิ์สตีฟเนสที่เหมาะสมลงในตำแหน่งที่สอดคล้องกับ θ_z ในสตีฟเนสแมททริกซ์ (Stiffness Matrix)

O.C. ZIENKIEWICZ, C.J. PAREKH, และ I.P. KING (๖) ทำการวิเคราะห์ Arch Dams โดยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์และได้นำ Fictitious Rotation Stiffness มาใช้ในการแก้ปัญหาสมการ $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใส่ชุดสัมประสิทธิ์ของ Fictitious Rotation Stiffness ในทุกๆชิ้นส่วนย่อยไม่ว่าจะอยู่ในระนาบเดียวกันหรือไม่ สำหรับชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมชุดสัมประสิทธิ์ Fictitious Rotation Stiffness ที่ใช้ซึ่งจะไม่ทำให้เกิดการเสียสภาพสมดุลย์ในระดับ Local Coordinate สามารถแสดงได้ในรูปแมททริกซ์ (Matrix Form) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \end{bmatrix} = \alpha \, ETA \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \end{bmatrix}$$

๓. <u>วัตถุประสงค์และขอบเขตของงานวิจัย</u>

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ต้องการศึกษาและปรับปรุงค่าสตีฟเนสของชิ้นส่วนย่อยที่แต่ละชั้วมี 6 ดีกรีของความอิสระใน Local Coordinate โดยการใช้ค่า Fictitious Rotation Stiffness เพื่อแก้ปัญหาการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้อันเนื่องจากสมการ $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}$ และดัดแปลงแก้ไขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Program) ที่มีอยู่ให้เหมาะสมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์ นำผลที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลเม้นท์มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากสูตรสำเร็จที่ใช้กันทั่วไป

การวิจัยจะพิจารณาถึงชิ้นส่วนแบนราบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แต่ละชั้วมีดีกรีของความอิสระ 6 ดีกรี (การเคลื่อนที่ตามแกน X,Y,Z ที่ตั้งได้ฉากกันและการหมุนรอบแกน X,Y และ Z) ความหนาของชิ้นส่วนย่อยแต่ละชั้นถือว่าคงที่ เนื้อวัสดุเป็น Linear, Isotropic และ Elastic.