อันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟที่แบ่งพวกได้

นายปลาสน์ กงตาล

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2524

DEGREE SEQUENCES OF PARTITE HYPERGRAPHS

MR.PASAAD KONGTALN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1981

Thesis Title	Degree Sequences of Partite Hypergraphs
By	Mr. Pasaad Kongtaln
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

.... Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag, Ph.D.)

Thesis Committee

Subha Sutchritpongsa .... Chairman

(Associate Professor Subha Sutchritpongsa, Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit .... Member

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)

Virool Boonyasombat .... Member

(Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟที่แบ่งพวกได้
ชื่อนิสิต	นายปลาสน์ กงตาล
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.วิรุฬห์ บุญสมบัติ
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	๒๕๒๓

บทคัดย่อ

ไฮเปอร์กราฟหมายถึง คู่ลำดับ $(V,\mathcal{E})$ ซึ่ง V เป็นเซตจำกัดที่ไม่ว่างเปล่า และ $\mathcal{E}$ เป็นเซตของสับเซตที่ไม่ว่างเปล่าของ V ซึ่ง $\cup\mathcal{E} = V$ เราเรียกสมาชิกใน V และ $\mathcal{E}$ ว่าจุดและขอบตามลำดับ ไฮเปอร์กราฟเอกรูปยศ r หมายถึง ไฮเปอร์กราฟที่ทุก ๆ ขอบมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ r เราเรียกไฮเปอร์กราฟ $(V,\mathcal{E})$ ว่าเป็นไฮเปอร์กราฟที่แบ่งได้ k พวก ก็ต่อเมื่อสามารถแบ่ง V ออกเป็นสับเซตที่ไม่ว่างเปล่า ได้ k สับเซต $V_1,\ldots, V_k$ โดยที่จำนวนสมาชิกที่อยู่ร่วมกันในแต่ละขอบ E กับแต่ละสับเซต V_t สำหรับ $1 \le t \le k$ มีได้ไม่เกินหนึ่ง เราเรียกการแบ่ง $(V_1,\ldots,V_k)$ นั้นว่าการแบ่ง k พวกของ V ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราศึกษาเฉพาะไฮเปอร์กราฟเอกรูปยศ 3 ที่แบ่งได้ 3 พวก

ดีกรีของจุด v ใด ๆ ในไฮเปอร์กราฟ $H = (V,\mathcal{E})$ คือ จำนวนสมาชิกในเซต $\{E \in \mathcal{E} / v \in E\}$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $d_H(v)$ กำหนดให้ $H = (V,\mathcal{E})$ เป็นไฮเปอร์กราฟเอกรูปยศ 3 ที่แบ่งได้ 3 พวก และการแบ่ง 3 พวกของ V ประกอบด้วย $V_1 = \{v_1,\ldots, v_{n_1}\}$, $V_2 = \{v_{n_1+1},\ldots, v_{n_1+n_2}\}$, $V_3 = \{v_{n_1+n_2+1},\ldots, v_{n_1+n_2+n_3}\}$ แล้ว อันดับดีกรีของ H หมายถึงอันดับจำกัดของดีกรีของจุดที่แบ่งไว้แล้วดังนี้

$$(d_H(v_1),\ldots, d_H(v_{n_1}) ; d_H(v_{n_1+1}),\ldots, d_H(v_{n_1+n_2}) ; d_H(v_{n_1+n_2+1}),\ldots, d_H(v_{n_1+n_2+n_3}))$$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราได้ค้นหาลักษณะเฉพาะของอันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟเอกรูปยศ 3 ที่แบ่งได้ 3 พวก สรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $\delta = (\delta_1(1),\ldots,\delta_1(n_1);\delta_2(1),\ldots,\delta_2(n_2);\delta_3(1),\ldots,\delta_3(n_3))$ เป็นอันดับจำกัดของจำนวนเต็มบวกที่แบ่งไว้แล้ว 3 พวก จะได้ว่า δ เป็นอันดับดีกรีของไฮเปอร์กราฟเอกรูปยศ 3 ที่แบ่งได้ 3 พวก เมื่อ และก็ต่อเมื่อ

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n_1} \delta_1(i) = \sum_{j=1}^{n_2} \delta_2(j) = \sum_{k=1}^{n_3} \delta_3(k)$$

และ

(2) สามารถหาเมตริกซ์ μ ที่สมาชิกประกอบด้วยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเรียงอยู่ใน n_1 แถว n_2 คอลัมน์ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$(2.1) \quad \delta_1(i) = \sum_{j=1}^{n_2} \mu(i,j) \quad \text{สำหรับทุก } i \text{ ซึ่ง } 1 \le i \le n_1$$

$$(2.2) \quad \delta_2(j) = \sum_{i=1}^{n_1} \mu(i,j) \quad \text{สำหรับทุก} j \text{ ซึ่ง } 1 \le j \le n_2$$

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \min\{\mu(i,j), |B|\} \ge \sum_{k\in B} \delta_3(k)$$

สำหรับทุก B ซึ่ง $B \subsetneq \{1,\ldots, n_3\}$

Thesis Title	Degree Sequences of Partite Hypergraphs
Name	Mr. Pasaad Kongtaln
Thesis Advisor	Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.
Department	Mathematics
Academic Year	1980

ABSTRACT

A hypergraph is defined to be an ordered pair $(V, \mathcal{E})$, where V is a finite non-empty set, and $\mathcal{E}$ is a set of non-empty subsets of V such that $\cup \mathcal{E} = V$. Elements of V and $\mathcal{E}$ are called vertices and edges respectively. A hypergraph in which every edge has cardinality r is called an r-uniform hypergraph. A hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$ is called a k-partite hypergraph if V can be partitioned into k subsets V_t, $1 \leq t \leq k$, such that for every edge E and for $1 \leq t \leq k$, the cardinality of the set $E \cap V_t$ is at most 1. Such an ordered partition $(V_1, \ldots, V_k)$ is called a k-partition of V. In this study, we consider only 3-partite 3-uniform hypergraphs.

The degree of a vertex v in a hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$, denoted by $d_H(v)$, is the cardinality of the set $\{E \in \mathcal{E} / v \in E\}$. Given a 3-partite 3-uniform hypergraph $H = (V, \mathcal{E})$, where the 3-partition of V consists of $V_1 = \{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$, $V_2 = \{v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}\}$, and

$V_3 = \{v_{n_1+n_2+1}, \ldots, v_{n_1+n_2+n_3}\}$. Then the degree sequence of H is the partitioned finite sequence

$$\delta_H = (d_H(v_1),\ldots,d_H(v_{n_1});\ d_H(v_{n_1+1}),\ldots,d_H(v_{n_1+n_2});$$
$$d_H(v_{n_1+n_2+1}),\ldots,\ d_H(v_{n_1+n_2+n_3})).$$

In this study, we look for a characterization of degree sequences of 3-partite 3-uniform hypergraphs. The main result of our study is the following :

<u>Theorem</u>. Let $\delta = (\delta_1(1),\ldots,\ \delta_1(n_1);\ \delta_2(1),\ldots,\delta_2(n_2);\ \delta_3(1),\ldots,\delta_3(n_3))$ be a given partitioned finite sequence of positive integers. Then δ is a degree sequence of some 3-partite 3-uniform hypergraph if and only if

(1) $$\sum_{i=1}^{n_1} \delta_1(i) = \sum_{j=1}^{n_2} \delta_2(j) = \sum_{k=1}^{n_3} \delta_3(k), \text{ and}$$

(2) there exists a non-negative integral valued $n_1 \times n_2$ - martix μ such that

$$\delta_1(i) = \sum_{j=1}^{n_2} \mu(i,j) \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n_1\ ;$$

$$\delta_2(j) = \sum_{i=1}^{n_1} \mu(i,j) \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n_2\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \min\{\mu(i,j),\ |B|\} \geq \sum_{k\varepsilon B} \delta_3(k) \text{ for } B \subseteq \{1,\ldots,n_3\}.$$

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr.Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his helpful advice in preparing and writing this thesis. Also, I would like to express my gratitude to all of my teachers for their previous lectures.

CONTENTS