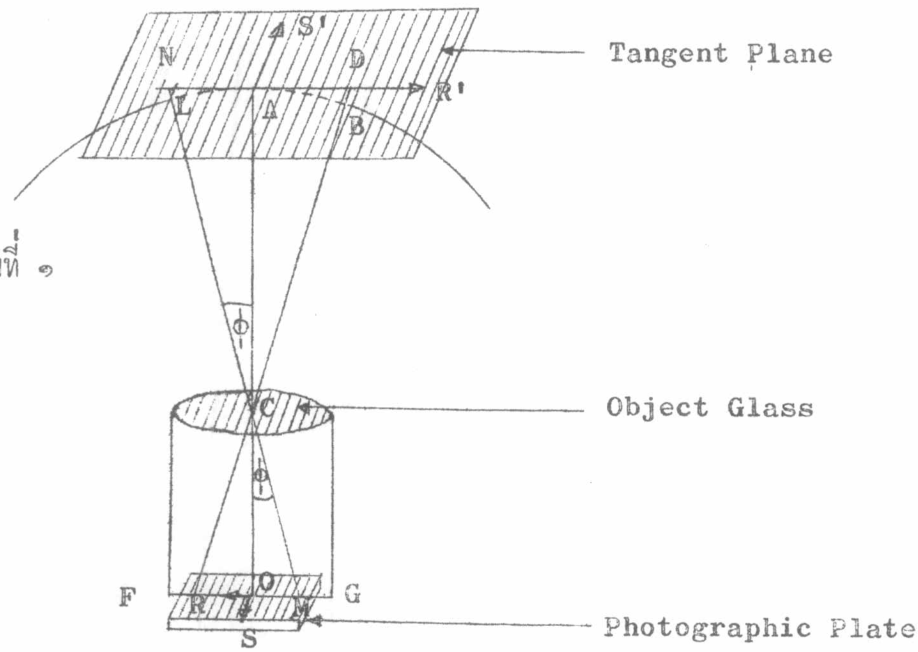
บทที่ ๔

ทฤษฎีทั่วไปว่าด้วยการหาตำแหน่งดาวหางจากภาพถ่ายและหาการจัดตัวของหางดาวหางในอวกาศ

๔.๑ การถ่ายภาพโดยวิธีหักเหแสงผ่าน Object Glass[1]



แผนภาพที่ ๑

จากแผนภาพที่ ๑ Object Glass มีไว้สำหรับหักเหแสงที่มาจากดาว

Photographic Plate เป็นระนาบของฟิล์มที่ใช้บันทึกภาพของดาวหรือสิ่งที่ต้องการถ่าย

Tangent Plane เป็นระนาบสมมติในอวกาศ โดยพื้นที่ของระนาบนี้วางตั้งฉากกับทิศของการสังเกตและขนานกับ Photographic Plate

CO เป็น Optical Axis ของ Object Glass

C เป็นจุดศูนย์กลางของ Object Glass

---

[1] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.279.

FG เป็น Focal Plane ของ Object Glass

O เป็นจุดใจกลางของ Photographic Plate

สมมติดาวดวงหนึ่งปรากฏให้เห็นในทิศ CA แสงจากดาวดวงนี้ที่ตกลงบน Object Glass จะไปโฟกัสที่จุด O บน Plate ถ้าสมมติว่ามีดาวอีกดวงหนึ่งปรากฏให้เห็นในทิศ CB แสงจากดาวที่หักเหผ่าน Object Glass จะไปโฟกัสที่ R ในกรณีที่ R อยู่ตรงขอบของ Plate พอดี จะได้ว่า

$$l = 2\,OR \qquad \text{------} \quad (1)$$

เนื่องจาก $OR = OC \tan R\hat{C}O = OC \tan A\hat{C}B$ ------ (2)

เพราะฉะนั้นแทนสมการ (๒) ลงใน (๑) จะได้

$$l = 2\,OC \tan \beta \qquad \text{------} \quad (3)$$

มุม β ในสมการ (๓) แทนระยะห่างตามมุมระหว่างดาว A และ B

โดยเหตุที่ OC เป็นความยาวโฟกัสของ Object Glass ซึ่งทราบค่า และ l แทนความยาวของ Plate ที่ใช้ถ่าย เมื่อทราบขนาดของ Plate ที่ใช้ถ่าย และทราบความยาวโฟกัสของ Object Glass ย่อมสามารถคำนวณหาขอบเขตของท้องฟ้าซึ่งสามารถถ่ายภาพให้ติดบน Plate ได้

๔.๒ The tangent plane[2]

จากแผนภาพที่ ๑ ส่วนโค้ง LAB เป็น Celestial sphere ซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์กลาง CA เป็นรัศมีของทรงกลมท้องฟ้า มีทิศตั้งฉากกับ Tangent Plane ถ้าต่อ CL และ CB ออกไปพบ Tangent Plane ที่ N และ D จะได้ว่า N เป็น Projection ของดาว L และ D เป็น Projection ของดาว B บน Tangent Plane

ในทำนองเดียวกันเมื่อต่อ LC และ BC ออกไปพบ Photographic Plate ที่ M และ R จะได้ว่า M และ R เป็นภาพของดาว L และดาว B ตามลำดับ

ถ้าให้ $\phi = O\hat{C}M = A\hat{C}L$ ------ (4)

จะได้ว่า $\tan \phi = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{AN}{AC}$ ------ (5)

---

[2] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.280-282.

โดยเหตุที่ระบบของภาพดาวที่ปรากฏบน Photographic Plate และระบบของ Projections ของดาวบน Tangent Plane นั้นคล้ายคลึงกัน ผิดกันแต่เพียงขนาดของสเกลเท่านั้น

ถ้ากำหนดให้ AR' และ AS' เป็นทิศทางบวกของแกน ๒ แกน ซึ่งตั้งฉากกันใน Tangent Plane

ให้ OR และ OS ขนานกับ AR' และ AS' ตามลำดับ

จะได้ว่าในระนาบของ Photographic plate ทิศทางบวกจะเป็นทิศทางที่ตรงกันข้ามกับ AR' และ AS'

โดยเหตุที่ Projections ของดาวบน Tangent Plane ไม่จำเป็นต้องอยู่บนแกน NR' หรือ AS' อาจจะอยู่ ณ ตำแหน่งใดก็ได้บนระนาบนี้

ในทำนองเดียวกันภาพของดาวบน Photographic plate ก็ไม่จำเป็นต้องอยู่บนแกน OS หรือ RM โดยอาจจะอยู่ ณ ตำแหน่งใดก็ได้บนระนาบ Photographic Plate

ดังนั้นถ้าให้ ξ', η' เป็น Co-ordinates ของ Projection ของดาวบน Tangent Plane

ξ, η เป็น Co-ordinates ของภาพดาวบน Photographic Plate ในแผนภาพที่ ๒ ถ้าให้ J, Q เป็น Projection ของดาว S และ Pole P บน Tangent Plane ตามลำดับ

จากสามเหลี่ยม CON' และ CAI จะได้ว่า

$$\tan N'\hat{C}O = \tan I\hat{C}A$$

$$\therefore \frac{N'O}{OC} = \frac{AI}{AC}$$

หรือ $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{AI}{N'O}$ -------------------------- (6)

ในทำนองเดียวกันในสามเหลี่ยม RCO และ DCA จะได้ว่า

$$\tan R\hat{C}O = \tan D\hat{C}A$$

$$\therefore \frac{RO}{OC} = \frac{DA}{AC}$$

หรือ $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{DA}{RC}$ ------------------------ (7)

สมการ (๖) = สมการ (๗) :-

$$\frac{AI}{N'O} = \frac{DA}{RO} \qquad \text{--------------------------} \quad (8)$$

เมื่อแทน $AI = \xi'$, $N'O = \xi$, $DA = \eta'$ และ $RO = \eta$ ลงในสมการ (๖) และ (๗) จะได้

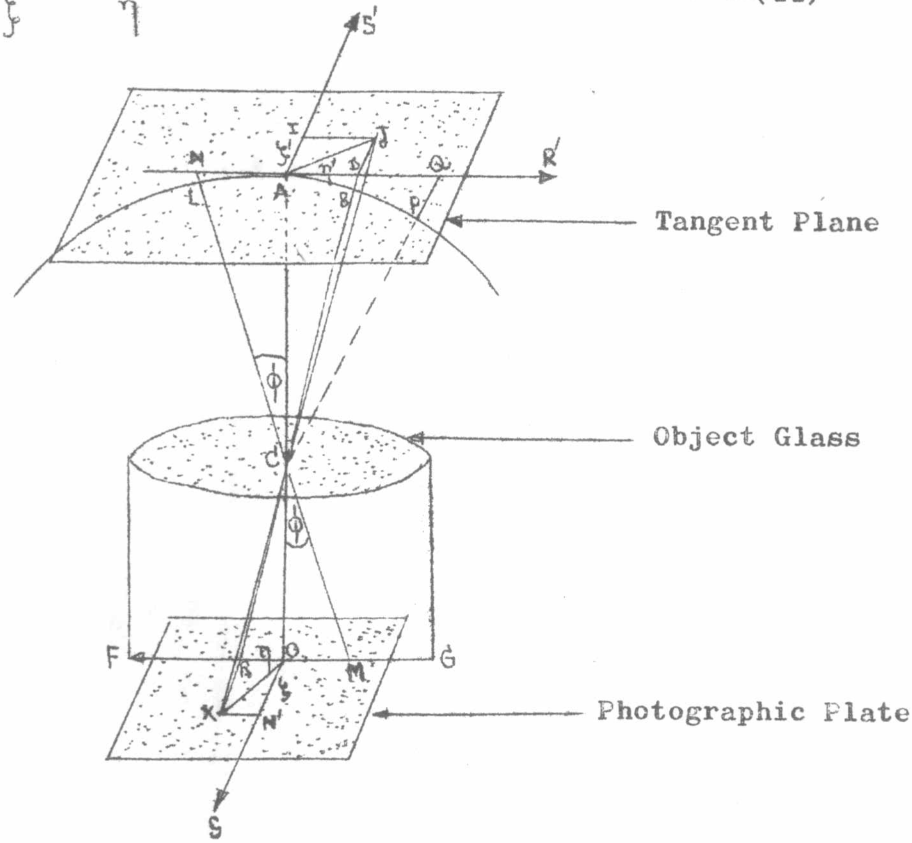
$$\frac{AC}{OC} = \frac{\xi'}{\xi} \qquad \text{--------------------------} \quad (9)$$

และ

$$\frac{AC}{OC} = \frac{\eta'}{\eta} \qquad \text{--------------------------} \quad (10)$$

สมการ (๙) = สมการ (๑๐) :-

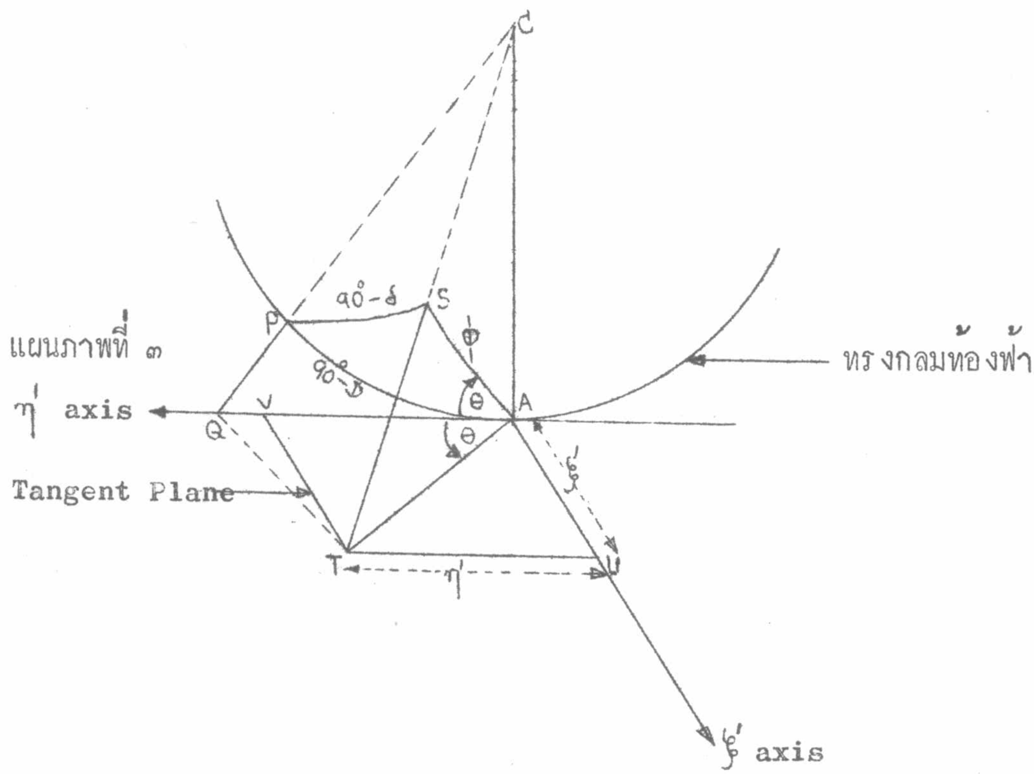
$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} \qquad \text{--------------------------} \quad (11)$$



แผนภาพที่ ๒

สมการ (๙) และ (๑๐) ให้ความหมายว่า จากการทราบ ξ และ η ของเทห์ฟากฟ้าที่ต้องการศึกษาจาก Plate ที่ถ่าย และทราบ AC (ระยะห่างของดาวหลักหรือดาว A จากโลก) และ OC (ความยาวโฟกัสของ Object Glass) ย่อมสามารถหา Co-ordinates ของเทห์ฟากฟ้าที่ศึกษาบน Tangent Plane ได้

๔.๓ <u>ความสัมพันธ์ระหว่างแกนหลักและ Right Ascension และ Declination ของเทห์ฟากฟ้า ๒ สิ่งใด ๆ</u>[3]



แผนภาพที่ ๓ แสดงให้เห็นเฉพาะส่วนบนของแผนภาพที่ ๒ โดยเขียนส่วนโค้งของทรงกลมท้องฟ้าให้กลับลงมาอยู่ทางด้านล่าง ในภาพทิศจาก A ไป V และจาก A ไป U เป็นทิศของแกนหลัก

T เป็น Projection ของดาว S บน Tangent Plane

A และ S เป็นเทห์ฟากฟ้าซึ่งทราบ Right Ascension และ Declination

จาก C ถ้าโยงเส้นตรงไปยัง S และต่อออกไปพบ Tangent Plane ที่ T จะได้ว่า T เป็น Projection ของดาว S บน Tangent Plane

ถ้าเขียนส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AS จะได้ว่าระนาบที่ผ่าน ASC จะตัดกับ Tangent Plane ด้วยเส้นตรง AT และ Projection ของดาวซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่งใดก็ตามบน

---

[3]W.M.Smart, "Astronomical Photography," <u>Spherical Astronomy</u> (Cambridge University Press, 1971), p.283-284.

ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AS นี้ จะอยู่บนเส้นตรง AT

ถ้าให้ P เป็นขั้วเหนือของทรงกลมท้องฟ้า จะได้ว่า AP เป็นเมอริเดียนของ A และ Projection ของ AP บน Tangent Plane ก็คือเส้นตรง AQ

เนื่องจาก AT อยู่ใน Tangent Plane และตั้งฉากกับ AC เพราะฉะนั้น AT สัมผัสกับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AS ที่ A

ในทำนองเดียวกัน AQ สัมผัสกับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AP ที่ A

โดยเหตุที่ AQ เป็นเงาของส่วนโค้ง PA บน Tangent Plane

และ AT เป็นเงาของส่วนโค้ง SA บน Tangent Plane

ถ้าให้ $Q\hat{A}T = \theta$ จะได้ว่า Spherical angle PAS $= \theta$ ด้วย

$$\therefore \; Q\hat{A}T = P\hat{A}S = \theta \quad \text{------------------------} \quad (12)$$

สมการ (๑๒) ให้ความหมายว่า ณ จุดสัมผัสกับทรงกลมท้องฟ้า มุมระหว่างส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ ๒ วงซึ่งตัดกัน จะเท่ากับมุมระหว่างเส้นตรง ๒ เส้นบน Tangent Plane ที่จุดนี้ โดยที่เส้นตรง ๒ เส้นดังกล่าว เป็นเงาของส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ทั้ง ๒ บน Tangent Plane ถ้าส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ตัดกันที่จุดอื่น ซึ่งไม่ใช่เป็นจุดสัมผัส มุมระหว่างเงาของส่วนโค้งทั้งสองบน Tangent Plane จะไม่เท่ากับมุมระหว่างส่วนโค้งของวงกลมใหญ่บนทรงกลมท้องฟ้า ตัวอย่างที่เห็นได้ชัด เช่น จากแผนภาพที่ ๓ TQ เป็นเงาของส่วนโค้ง SP บน Tangent Plane AQ เป็นเงาของส่วนโค้ง AP บน Tangent Plane มุมระหว่างเส้นตรง AQ และ QT หรือ $A\hat{Q}T$ นั้นไม่เท่ากับ $S\hat{P}A$ ซึ่งเป็นมุมระหว่างส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AP และ SP

ถ้าลากเส้น TU และ TV ให้ตั้งฉากกับ AU และ AQ ตามลำดับ และแทนส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AS ด้วย ϕ จะได้ว่า ในสามเหลี่ยมมุมฉาก AVT

$$VT = \xi = AT \sin \theta \quad \text{--------------} \quad (13)$$

$$UT = \eta = AT \cos \theta \quad \text{--------------} \quad (14)$$

และในสามเหลี่ยมมุมฉาก CAT

$$AT = AC \tan A\hat{C}T = AC \tan \phi \quad \text{-----------} \quad (15)$$

เมื่อแทนสมการ (๑๕) ลงในสมการ (๑๓) และ (๑๔) จะได้

$$\xi' = AC \tan \phi \sin \theta \quad \text{------------------} \quad (16)$$

$$\eta' = AC \tan \phi \cos \theta \quad \text{------------------} \quad (17)$$

แทน ξ' และ η' จากสมการ (๙) และ (๑๐) ลงในสมการ (๑๖) และ (๑๗) จะได้

$$\xi = OC \tan \phi \sin \theta \quad \text{------------------} \quad (18)$$

$$\eta = OC \tan \phi \cos \theta \quad \text{------------------} \quad (19)$$

สมการ (๑๘) และ (๑๙) ให้ความหมายว่า เมื่อทราบ ξ และ η จากภาพถ่าย และทราบความยาวโฟกัส OC ของ Object Glass ย่อมสามารถคำนวณหา ϕ และ θ ได้

ถ้าให้ A, D เป็น Right Ascension และ Declination ของดาว A

α, δ เป็น Right Ascension และ Declination ของดาว S

เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแกนหลัก ξ, η กับ A, D, α และ δ ได้

จาก Spherical triangle ASP

$$AP = 90^{\circ} - D \quad \text{---------------------------} \quad (20)$$

$$SP = 90^{\circ} - \delta \quad \text{---------------------------} \quad (21)$$

$$A\hat{P}S = \alpha - A \quad \text{---------------------------} \quad (22)$$

$$AS = \phi \quad \text{---------------------------} \quad (23)$$

$$S\hat{A}P = \theta \quad \text{---------------------------} \quad (24)$$

โดยใช้สูตร A,B และ C จะได้

$$\cos \phi = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) \quad \text{-----} \quad (25)$$

$$\sin \phi \sin \theta = \cos \delta \sin(\alpha - A) \quad \text{------------------} \quad (26)$$

$$\sin \phi \cos \theta = \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A) \quad \text{----} \quad (27)$$

สมการ (๒๗) ÷ สมการ (๒๕) :-

$$\tan \phi \cos \theta = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)} \quad \text{------} \quad (28)$$

แทนสมการ (๒๘) ลงในสมการ (๑๙) :—

$$\eta = OC \left[\frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}\right] \text{-----(29)}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อหารสมการ (๒๖) ด้วยสมการ (๒๕) จะได้

$$\tan\phi\sin\theta = \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)} \text{------(30)}$$

แทนสมการ (๓๐) ลงในสมการ (๑๘) :—

$$\xi = OC\left[\frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}\right] \text{--(31)}$$

ถ้าสมมติให้

$$\frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)} = a \quad \text{-------(32)}$$

และ $$\frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)} = b \quad \text{--------(33)}$$

แทนสมการ (๓๒) และ (๓๓) ลงในสมการ (๒๙) และ (๓๑) จะได้

$$\eta = OC \times a \quad \text{-----------------------------------(34)}$$

และ $$\xi = OC \times b \quad \text{-----------------------------------(35)}$$

สมการ (๓๕) ÷ สมการ (๓๔) :-

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{b}{a} \quad \text{-----------------------------------(36)}$$

สมการ (๑๘) ÷ สมการ (๑๙) :-

$$\frac{\xi}{\eta} = \tan\theta \quad \text{-----------------------------------(37)}$$

สมการ (๓๖) = สมการ (๓๗) :-

$$\tan\theta = \frac{\xi}{\eta} = \frac{b}{a} \quad \text{--------------------------(38)}$$

สมการ (๓๘) ให้ความหมายว่าเมื่อทราบ a และ b จากการคำนวณในสมการ (๓๒) และ (๓๓) ย่อมสามารถคำนวณหามุม θ ได้ หรือถ้าทราบสเกล ξ และ η ย่อมสามารถคำนวณหามุม θ ได้เช่นกัน ในเมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง AQ (แกน η') และ AT บน **Tangent Plane**

จากแผนภาพที่ ๒ ถ้ามุม $\mathrm{J\hat{A}D}$ บน Tangent Plane เท่ากับ θ แล้วมุม $\mathrm{X\hat{O}R}$

บน Photographic Plate ย่อมเท่ากับ θ ด้วย จากนี้ถ้าทราบ XO ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างภาพดาว S และดาว A บน Photographic Plate ย่อมสามารถคำนวณหาสเกล η และ ξ บนระนาบของ Plate ได้จากสูตร

$$\eta = XO \cos\theta \quad \text{-------------------} \quad (39)$$

$$\xi = XO \sin\theta \quad \text{-------------------} \quad (40)$$

คราวนี้แทนสมการ (๓๙) และ (๓๕) ลงในสมการ (๑๙) และ ๑๘) ตามลำดับจะได้

$$\tan\phi = b/\sin\theta \quad \text{-------------------} \quad (41)$$

และ $\tan\phi = a/\cos\theta$ ------------------- (42)

ซึ่งสมการ (๔๑) และ (๔๒) ให้ความหมายว่า จากการทราบค่า a, b และ θ บน Photographic Plate ย่อมสามารถคำนวณหา ϕ ซึ่งเป็นระยะห่างตามมุมของเทห์ฟากฟ้า ๒ สิ่งใด ๆ ได้ และความหมายนี้มีผลใช้ได้กับระยะห่างตามมุมของตำแหน่งใด ๆ ก็ตาม ๒ ตำแหน่งบนทรงกลมท้องฟ้า ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องเป็นตำแหน่งของดาว

จากสมการ (๓๒) ถ้าเอา $\sin\delta$ หารทั้งเศษและส่วนทางเทอมซ้ายจะได้

$$\frac{\cos D - \cot\delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin D + \cot\delta \cos D \cos(\alpha - A)} = a$$

หรือ $$\cot\delta = \frac{\cos D - a \sin D}{a \cos D \cos(\alpha - A) + \sin D \cos(\alpha - A)} \quad \text{-----} (43)$$

ในทำนองเดียวกัน

จากสมการ (๓๓) ถ้าเราเอา $\sin\delta$ หารทั้งเศษและส่วนทางเทอมซ้ายจะได้

$$\frac{\cot\delta \sin(\alpha - A)}{\sin D + \cot\delta \cos D \cos(\alpha - A)} = b$$

หรือ $$\cot\delta = \frac{b \sin D}{\sin(\alpha - A) - b \cos D \cos(\alpha - A)} \quad \text{-------------} (44)$$

สมการ (๔๓) = สมการ (๔๔) :-

$$\therefore \quad \frac{\cos D - a \sin D}{a \cos D \cos(\alpha - A) + \sin D \cos(\alpha - A)} = \frac{b \sin D}{\sin(\alpha - A) - b \cos D \cos(\alpha - A)}$$

$$\frac{\sin(\alpha - A) - b \cos D \cos(\alpha - A)}{a \cos D \cos(\alpha - A) + \sin D \cos(\alpha - A)} = \frac{b \sin D}{\cos D - a \sin D}$$

$$\frac{\tan(\alpha - A) - b \cos D}{a \cos D + \sin D} = \frac{b \sin D}{\cos D - a \sin D}$$

$$\tan(\alpha - A) - b \cos D = \frac{b \sin D(a \cos D + \sin D)}{\cos D - a \sin D}$$

$$\tan(\alpha - A) = b \cos D + \frac{b \sin D(a \cos D + \sin D)}{\cos D - a \sin D} \quad \text{------------(45)}$$

โดยเหตุที่สมการ (๔๔) และ (๔๕) เป็นสมการสำคัญ ซึ่งต้องนำไปใช้ในการคำนวณหา Apparent R.A. และ Apparent Dec.ของเทห์ฟากฟ้าใด ๆ จากภาพถ่าย ซึ่งสมควรรวบรวมเป็นสูตร เพื่อความสะดวกต่อการนำไปใช้ดังนี้.-

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(\alpha - A) &= b \cos D + \frac{b \sin D(a \cos D + \sin D)}{\cos D - a \sin D} \\ \cot \delta &= \frac{b \sin D}{\sin(\alpha - A) - b \cos D \cos(\alpha - A)} \end{aligned}}$$

สูตรข้างบนให้ความหมายว่า เมื่อทราบ R.A. และ Dec.ของดาวฤกษ์ที่ใช้กำหนดแกนหลัก และทราบ a และ b ซึ่งมีความสัมพันธ์เกี่ยวโยง ดาวฤกษ์ที่ใช้กำหนดแกนหลักกับเทห์ฟากฟ้าซึ่งต้องการศึกษา ตามสมการ (๓๔) และ (๓๕) ย่อมสามารถใช้สมการที่หนึ่งคำนวณหา α ได้ จากนี้แทนค่า α ที่หาได้ลงในสมการที่ (๒) ก็จะได้ค่าของ δ

๔.๔ การเปลี่ยน Mean R.A. และ Mean Dec. ของดาวซึ่งทราบจาก Ephemeris เป็น Apparent R.A. และ Apparent Dec.[4]

โดยเหตุที่ Right Ascension และ Declination ของดาวที่บอกไว้ใน Ephemeris เป็น Mean R.A. และ Mean Dec. ซึ่งเป็นการบอกตำแหน่งของดาวเทียบกับจุดเริ่มต้นของปี โดยถือเอาดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง แต่ในการปฏิบัติจริง ๆ นั้น ตำแหน่งของดาวที่ปรากฏบนภาพถ่าย ย่อมเป็นตำแหน่งของดาวเมื่อเทียบกับโลก ดังนั้น การที่จะนำค่า R.A. และ Dec. ของดาวหลักไปใช้ประกอบการคำนวณ R.A. และ Dec. จะต้องเป็น Apparent R.A. และ Apparent Dec. ซึ่งเป็นการบอกตำแหน่งของดาว ณ เวลาที่ทำการศึกษาจริง ๆ โดยถือเอาโลกเป็นจุดศูนย์กลางและได้แก้ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวอันเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ หมดสิ้นแล้ว ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวเกิดขึ้นได้ดังต่อไปนี้.-

๑. การหักเหของแสงจากดาวผ่านบรรยากาศของโลก (Refraction error)

๒. การที่แกนของกล้องไม่ได้เล็งที่ตำแหน่งใจกลางของดาวที่ศึกษา (Error of tilt)

๓. การที่ตำแหน่งที่สังเกตอยู่บนผิวโลก ไม่ได้อยู่ที่จุดใจกลางของโลก (Annual Parallax)

๔. การที่จุดอ้างอิงคือ Vernal Equinax และระนาบอ้างอิงคือ Ecliptic หรือ Equater ไม่มีตำแหน่งที่คงที่อันเนื่องจากการส่ายของแกนหมุนของโลก หรืออิทธิพลจากแรงดึงดูดของดวงจันทร์หรือดาวเคราะห์อื่น (Precession and Nutation)

๕. การที่โลกมีการเคลื่อนที่ไปบนเส้นทางโคจรรอบดวงอาทิตย์ (Annual Aberration)

---

[4] W.M.Smart, "Precession and Nutation," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.243-245.

๖. การที่โลกมีการหมุนรอบตัวเอง (Diurnal Aberration)

นอกจากนี้ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาว ยังอาจเกิดขึ้นได้จากสาเหตุอื่น สำหรับความคลาดเคลื่อนในข้อที่ ๑ อันเนื่องจากการหักเหของแสงผ่านบรรยากาศของโลกนั้น ถือว่ามีค่าน้อยมากตัดทิ้งได้ ส่วนความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวในข้อที่ ๒ ถ้าแกนของกล้องเล็งอยู่ภายในขอบเขต ๒-๓ องศา ของใจกลางดาวที่ศึกษา ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุนี้สามารถตัดทิ้งได้เช่นกัน ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวที่ต้องแก้คือ Annual Parallax, Annual Aberration, Diurnal Aberration, Precession and Nutation

โดยเหตุที่ความคลาดเคลื่อนเนื่องจาก Annual Parallax มีค่าไม่เกิน ๐.๓ ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุนี้จึงตัดทิ้งได้ และเนื่องจาก Diurnal Aberration มีค่าน้อยมาก ซึ่งสามารถตัดทิ้งได้ ดังนั้นความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวซึ่งต้องแก้จริง ๆ ในทางปฏิบัติ จึงเหลือเพียง Precession and Nutation และ Annual Aberration

โดยเหตุที่ตำแหน่งของดาวซึ่งบอกไว้ใน Astronomical Ephemeris นั้น เป็นตำแหน่งที่เทียบกับจุดเริ่มต้นของปี โดยถือเอาดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง และยังไม่ได้แก้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ แต่ตำแหน่งของดาวซึ่งต้องนำไปใช้ในการกำหนดแกนหลักขึ้นบนภาพถ่ายนั้น เป็นตำแหน่งของดาวซึ่งเทียบกับเวลาที่ศึกษา โดยถือเอาโลกเป็นจุดศูนย์กลาง และได้แก้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ หมดแล้ว

ถ้าให้ (α , δ) เป็น Right Ascension และ Declination ของดาวที่บอกไว้ใน Astronomical Ephemeris โดยเทียบกับจุดเริ่มต้นของปีและถือดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง (α, δ) นี้มีชื่อเรียกว่า Mean Place of a star

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ (α_1, δ_1) เป็น Right Ascension และ Declination ของดาวเทียบกับเวลาที่ทำการศึกษา โดยถือเอาดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง (α_1 , δ_1) จะมีชื่อว่า True Place of a star

(α, δ) และ (α_1, δ_1) ย่อมมีความสัมพันธ์กันดังนี้.-

$\alpha_1 - \alpha$ = Precession in R.A. for τ years + The effect of nutation on the R.A.

$= \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2$ ------------------------ (46)

ในเมื่อ $\Delta\alpha_1$ = Precession in R.A. for τ years

หาได้จากสูตร

$$\Delta\alpha_1 = \tau (m + n \sin\alpha \tan\delta) \quad \text{-------------------- (47)}$$

τ = เศษส่วนของปี นับจากจุดเริ่มต้นของปีถึงเวลาที่ทำการศึกษา

สำหรับ $\Delta\alpha_2$ = The effect of nutation on the R.A.

$$= \Delta\psi(\cos\epsilon + \sin\epsilon \sin\alpha \tan\delta) - \Delta\epsilon \cos\alpha \tan\delta \quad \text{---(48)}$$

แทนสมการ (๔๗) และ (๔๘) ลงในสมการ (๔๖) จะได้

$$\alpha_1 - \alpha = (m\tau + \Delta\psi\cos\epsilon) + \sin\alpha\tan\delta\,(n\tau + \Delta\psi\sin\epsilon) \quad \text{-------(49)}$$

เนื่องจาก m และ n มีความสัมพันธ์กับ Luni-solar precession θ และ planetary precession l ตามสมการ

$$m = \theta\cos\epsilon - l,\ n = \theta\sin\epsilon \quad \text{---------------------(50)}$$

แทนสมการ (๕๐) ลงในสมการ (๔๙) จะได้

$$\alpha_1 - \alpha = \left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\theta}\right)(m+n \sin\alpha\tan\delta) + \frac{l\,\Delta\psi}{\theta} - \Delta\epsilon\cos\alpha\tan\delta \quad \text{-------(51)}$$

ในสมการ (๕๑) ค่า m และ n เป็นหน่วยของเวลาเป็นวินาที

l, $\Delta\psi$, θ, $\Delta\epsilon$ เป็นหน่วยของมุมเป็นฟิลิบดา

ถ้าเขียนใหม่โดยให้

$$\left.\begin{array}{l} A = \left(\tau + \dfrac{\Delta\psi}{\theta}\right);\ B = -\Delta\epsilon\ ;\ E = \dfrac{l\,\Delta\psi}{15\ \theta} \\ a = m+n\sin\alpha\tan\delta\ ;\ b = \dfrac{1}{15}\cos\alpha\tan\delta \end{array}\right\} \quad \text{-----------(52)}$$

สมการ (๕๒) จะกลายเป็น

$$\alpha_1 - \alpha = Aa + Bb + E \quad \text{---------------------------------(53)}$$

เทอมทางขวามือของสมการ (๕๓) เป็นหน่วยของเวลาเป็นวินาที

A,B,E เป็นปริมาณที่คำนวณได้จากช่วงเวลาของปีคือ τ

สำหรับ $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ นั้น สอดคล้องกับวันที่ศึกษาตำแหน่งดาว และสอดคล้องกับ luni-solar และ planetary precessions Θ และ 1 ตามสมการ

$$\Delta\psi = at + b \sin \Omega + c \sin 2\Omega + l \sin 2\Theta + m \sin 2☾$$

และ $$\Delta\epsilon = b_1 \cos \Omega + c_1 \cos 2\Omega + l_1 \cos 2\Theta + m_1 \cos 2☾$$

ในเมื่อ Ω เป็นลองกิจูดของ Moon's ascending node N

Θ เป็น Sun's longitude

และ ☾ เป็น Moon's longitude

ค่า $\Delta\psi$ และ $\Delta\epsilon$ มีชื่อว่า Bessel's day numbers (หรือ star numbers) มีตารางบอกไว้ใน Ephemeris ของแต่ละวันในปีหนึ่ง ๆ

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\delta_1 - \delta = (\tau + \frac{\Delta\psi}{\Theta}) n \cos\alpha + \Delta\epsilon \sin \alpha \qquad \text{---------------(54)}$$

ในเมื่อ n , $\Delta\epsilon$ มีหน่วยเป็นฟิลิบดา

ถ้าเขียน $a' = n \cos \alpha$; $b' = - \sin \alpha$ --------------------(55)

และใช้ค่า A,B จากสมการ (๕๒) สมการ (๕๔) จะกลายเป็น

$$\delta_1 - \delta = Aa' + Bb' \qquad \text{---------------------------(56)}$$

ดังนั้น จากสมการ (๕๓) และ (๕๖) เมื่อทราบ Mean Place ของดาวจาก Ephemeris และทราบค่าของ Bessel's day numbers ย่อมสามารถคำนวณหา True Place ของดาว ณ เวลาที่ทำการศึกษาได้

สมการ (๕๓) และ (๕๖) อาจจะเขียนเป็นสูตรสำเร็จได้อีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\alpha_1 - \alpha = f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha) \tan \delta \qquad \text{----------------------(57)}$$

$$\delta_1 - \delta = g \cos (G + \alpha) \qquad \text{----------------------(58)}$$

ในเมื่อ g เป็นหน่วยของมุมเป็นฟิลิบดา

f เป็นหน่วยของเวลาเป็นวินาที

f,g,G มีชื่อว่า Independent day numbers (หรือ star numbers) มีตารางบอกไว้สำหรับแต่ละวันใน Ephemeris

โดยเหตุที่ α_1 และ δ_1 ที่คำนวณได้จากสมการ (๕๓) และ (๕๖) หรือคำนวณได้จากสมการ (๕๗) และ (๕๘) นั้น เป็น True Place of a star ซึ่งเป็นตำแหน่งของดาวขณะที่ทำการศึกษาจริง แต่ว่าเป็นการเทียบกับดวงอาทิตย์ จำเป็นต้องเปลี่ยนตำแหน่งนี้เทียบกับโลก สำหรับตำแหน่งของดาวบนทรงกลมท้องฟ้า ซึ่งมีโลกเป็นจุดศูนย์กลาง และมี True equinox และ True equator ขณะที่ทำการศึกษา เป็นสิ่งอ้างอิงมีชื่อว่า Apparent place โดยที่ Apparent place และ True place มีความสัมพันธ์กันตามสมการ

Apparent place = true place plus the corrections due to aberration and annual parallax --(59)

เนื่องจากการแก้ความคลาดเคลื่อนของ Right Ascension และ Declination อันเนื่องจาก Aberration หาได้จากสมการ

$$\Delta\alpha = Cc + Dd \quad \text{-----------------------------(60)}$$

$$\Delta\delta = Cc' + Dd' \quad \text{-----------------------------(61)}$$

และโดยเหตุที่ความคลาดเคลื่อนของ R.A. และ Dec. อันเนื่องจาก Annual parallax มีค่าน้อยมากดังที่ได้กล่าวแล้ว ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (๖๐) และ (๖๑) ในสมการ (๕๙) จะได้

Apparent R.A. = True R.A. + Cc + Dd ------------------------(62)

Apparent Dec. = True Dec. + Cc' + Dd' ------------------------(63)

จากสมการ (๖๒) และ (๖๓) ให้ความหมายว่า เมื่อทราบ α_1 , δ_1 จากสมการ (๕๓) และ (๕๖) หรือทราบจากสมการ (๕๗) และ (๕๘) ย่อมสามารถคำนวณหา Apparent R.A. และ Apparent Dec. ซึ่งบอกตำแหน่งของดาวในขณะที่ทำการศึกษาจริง ๆ โดยเทียบกับโลก และแก้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ หมดสิ้นแล้ว

ดังนั้นในการหาตำแหน่งของดาวจากภาพถ่ายนั้นมีหลักดังนี้.-

๑. หา Mean Place ของดาวที่ศึกษาจาก Astronomical Ephemeris หรือใน Almanacs ในปีที่ศึกษานั้น โดยค่าที่อ่านได้นี้คือ α และ δ

๒. คำนวณหา True Place (α_1 , δ_1) จากสมการ

$$\alpha_1 - \alpha = Aa + Bb + E$$

และ $\delta_1 - \delta = Aa' + Bb'$

หรืออาจคำนวณจากสมการ

$$\alpha_1 - \alpha = f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha) \tan \delta$$

และ $\delta_1 - \delta = g \cos (G + \alpha)$

ในเมื่อค่าที่นอกเหนือไปจาก α และ δ นั้น ทราบได้จาก **Ephemeris** ในตารางที่ว่าด้วย **Star numbers**

๓. จาก α_1 และ δ_1 ที่หาได้ในหัวข้อ ๒ แทนลงในสมการ

$$\text{Apparent R.A.} = \alpha_1 + Cc + Dd$$

และ $\text{Apparent Dec.} = \delta_1 + Cc' + Dd'$

ก็สามารถหา **Apparent R.A.** และ **Apparent Dec.** ได้ ซึ่งค่าทั้งสองนี้บอกถึงตำแหน่งของดาว ณ เวลาที่ทำการศึกษาเมื่อเทียบกับโลก และได้แก้ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ หมดสิ้นแล้ว

๔.๕ ความสัมพันธ์ระหว่างสเกลบนกระดาษอัดรูปและสเกลบน Plate[5]

หลังจากที่ถ่ายภาพของเทห์ฟากฟ้าลงบน **Plate** แล้ว จำเป็นต้อง **Print** ภาพจาก **Plate** นี้ลงบน **Plate** แผ่นอื่นหรือกระดาษอัดรูป ทั้งนี้แล้วแต่จุดประสงค์ที่จะนำไปใช้ และจะให้มีสเกลขนาดเท่าใดก็ได้ แต่ไม่ว่ารูปที่อัดภาพดาวจะมีขนาดใหญ่สักเท่าใดก็ตาม สเกลบนกระดาษอัดรูป ย่อมมีความสัมพันธ์กับสเกลบน **Plate** ที่ถ่ายภาพดาว ความสัมพันธ์อันนี้ใช้หลักที่ว่า ภาพของดาวที่ปรากฏบน **Plate** และกระดาษอัดรูปนั้นเหมือนกันทุกอย่าง เพียงแต่ว่าระยะห่างระหว่างดาวที่ปรากฏบนกระดาษอัดรูปมีขนาดโตขึ้นหรือเล็กลงเท่านั้น

ถ้าให้ $(XO)_{Plate}$ เป็นระยะระหว่างดาวฤกษ์ ๒ ดวงใด ๆ บน **Plate**

θ เป็นมุมซึ่ง $(XO)_{Plate}$ กระทำกับแกน η บน **Plate** ซึ่งมี **Origin** อยู่ที่ O

จากสมการ (๓๙) และ (๔๐) จะได้ว่า

$$(\eta)_{Plate} = (XO)_{Plate} \cos \theta \quad \text{------------------------(64)}$$

---

[5] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.278-285.

และ $(\xi)_{Plate} = (XO)_{Plate} \sin\theta$ --------------------(65)

ในทำนองเดียวกัน

ถ้าให้ $(XO)_{Print}$ เป็นระยะห่างระหว่างดาวฤกษ์ ๒ ดวงเดิมบนกระดาษอัดรูป จะได้ว่ามุมซึ่ง $(XO)_{Print}$ กระทำกับแกน η บนกระดาษอัดรูปซึ่งมี Origin ที่ O มีค่าเท่ากับ θ ด้วย

$\therefore (\eta)_{Print} = (XO)_{Print} \cos\theta$ --------------------(66)

และ $(\xi)_{Print} = (XO)_{Print} \sin\theta$ --------------------(67)

โดยเหตุที่ $(\eta)_{Plate}$ และ $(\xi)_{Plate}$ มีความสัมพันธ์กับความยาวโฟกัสของ Object Glass ตามสมการ (๓๔) และ (๓๕) ที่ว่า

$(\eta)_{Plate} = OC \times a$ ------------------------------(68)

และ $(\xi)_{Plate} = OC \times b$ ------------------------------(69)

ในเมื่อ OC เป็นความยาวโฟกัสของ Object Glass

ส่วน a และ b ขึ้นกับ Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ทั้งสอง ตามสมการ (๓๒) และ (๓๓)

จากสมการ (๖๘) และ (๖๙) ถ้าเขียนใหม่จะได้

$$OC = \frac{(\eta)_{Plate}}{a} \quad \text{------------------------(70)}$$

$$\text{และ} \quad OC = \frac{(\xi)_{Plate}}{b} \quad \text{------------------------(71)}$$

เนื่องจาก a และ b มีค่าคงที่ไม่ว่าจะพิจารณาที่ระนาบของ Plate หรือระนาบของกระดาษอัดรูปก็ตาม ดังนั้น ถ้าพิจารณาที่ระนาบของกระดาษอัดรูปบ้างจะได้ว่า

$$(OC)^* = \frac{(\eta)_{Print}}{a} \quad \text{------------------------(72)}$$

$$\text{และ} \quad (OC)^* = \frac{(\xi)_{Print}}{b} \quad \text{------------------------(73)}$$

ซึ่ง (OC)* ในที่นี้เป็นความยาวโฟกัสรวมของ Object Glass ที่ใช้ถ่ายภาพดาว และของ Object Glass ที่ใช้อัดภาพลงบนกระดาษอัดรูป

สมการ (๗๓) ÷ สมการ (๗๑):-

$$\frac{(OC)^*}{OC} = \frac{(\xi)_{Print}}{(\xi)_{Plate}} \qquad \text{-------------------(74)}$$

แทนสมการ (๖๕) และ (๖๗) ลงในสมการ (๗๔):-

$$\frac{(OC)^*}{OC} = \frac{(XO)_{Print}\ \sin\theta}{(XO)_{Plate}\ \sin\theta} = \frac{(XO)_{Print}}{(XO)_{Plate}}$$

$$OC = \frac{(XO)_{Plate}\ (OC)^*}{(XO)_{Print}} \qquad \text{-------------------(75)}$$

แทนสมการ (๗๒) ลงในสมการ (๗๕):-

$$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}}\ \frac{(\eta)_{Print}}{a} \qquad \text{---------------(76)}$$

แทนสมการ (๖๘) ลงในสมการ (๗๐):-

$$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}}\ \frac{(\xi)_{Print}}{b} \qquad \text{---------------(77)}$$

สมการ (๗๖) และ (๗๗) ให้ความหมายว่าเมื่อทราบ a และ b จาก Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ ๒ ดวงใด ๆ ที่ใช้กำหนดแกนหลัก เพียงแต่วัดระยะห่างระหว่างดาวทั้งสองบน Plate และบนกระดาษอัดรูป ก็จะได้ค่า $(XO)_{Plate}$ และ $(XO)_{Print}$ จากแกนหลักที่ตั้งขึ้นที่ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งบนกระดาษอัดรูป ลากเส้นจากดาวฤกษ์ดวงที่เหลือไปตั้งฉากกับแกนทั้งสองนี้และวัดค่า จะได้ค่าของ $(\eta)_{Print}$ และ $(\xi)_{Print}$ จากนี้แทนค่าลงในสมการ (๗๖) หรือ (๗๗) ก็สามารถหาความยาวโฟกัสของ Object Glass ที่ใช้ถ่ายภาพดาวลงบน Plate ได้

ในทำนองเดียวกัน ถ้าทราบความยาวโฟกัส OC ของ Object Glass และทราบ $(XO)_{Plate}$, $(XO)_{Print}$, $(\eta)_{Print}$, $(\xi)_{Print}$ ย่อมสามารถใช้สมการ (๓๖) และ (๓๗) คำนวณหาค่า a และ b ได้เช่นเดียวกัน

๔.๖ จาก Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ ๒ ดวงใด ๆ ซึ่งทราบค่ากำหนดแกนหลักขึ้นที่ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งบนระนาบของกระดาษอัดรูป[6]

การที่จะกำหนดทิศของ η และ ξ ขึ้นบนระนาบของกระดาษอัดรูป จำเป็นต้องทราบว่าทิศที่ Right Ascension ของดาวที่มีค่าเพิ่มขึ้นนั้นอยู่ทางด้านใด ซึ่งทิศนี้จะเป็นทิศบวกของแกน ξ สำหรับสูตรที่ใช้คำนวณคือ

๑. $$a = \frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}$$

๒. $$b = \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}$$

๓. $$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}} \quad \frac{(\eta)_{Print}}{a}$$

๔. $$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}} \quad \frac{(\xi)_{Print}}{b}$$

๕. $$\tan\theta = \frac{(\xi)_{Print}}{(\eta)_{Print}}$$

ในเมื่อ A,D เป็น Apparent R. A. และ Apparent Dec. ของดาวดวงที่ ๑ ซึ่งใช้เป็น Origin ของแกนหลักที่กำหนดขึ้น ได้จากคำนวณในหัวข้อ ๔.๔

α, δ เป็น Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวดวงที่ ๒ ได้จากคำนวณในหัวข้อ ๔.๔

OC เป็นความยาวโฟกัสของ Object Glass ได้จากคำนวณในหัวข้อ ๔.๕

$(XO)_{Plate}$, $(XO)_{Print}$ เป็นระยะห่างระหว่างดาวทั้งสองบน Plate และบนกระดาษอัดรูปได้จากการวัดโดยตรง

$(\eta)_{Print}$, $(\xi)_{Print}$ เป็นค่าตามแกน η และ ξ ของดาวดวงที่ ๒ บนระนาบของกระดาษอัดรูปซึ่งต้องการคำนวณหา

[6] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.280-283.

สำหรับการคำนวณอาจแบ่งออกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้.-

ขั้นที่ ๑ แทนค่า Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ ๒ ดวงใด ๆ (ที่จะใช้กำหนดแกนหลักขึ้นที่ดาวดวงหนึ่ง) ลงในสูตรที่ ๑ และ ๒ จะได้ค่าของ a และ b ซึ่งจะมีเครื่องหมายบวกลบออกมาในตัวเสร็จ

ขั้นที่ ๒ แทนค่า a,b ที่คำนวณได้จากขั้นที่ ๑, ค่า $(XO)_{Plate}$ และ $(XO)_{Print}$ ที่วัดได้โดยตรง และค่าความยาวโฟกัส OC ของ Object Glass ที่คำนวณได้จากหัวข้อ ๔.๕ ลงในสูตรที่ ๓ และ ๔ ย่อมสามารถคำนวณหา $(\xi)_{Print}$ และ $(\eta)_{Print}$ ได้จากค่าตัวเลข และเครื่องหมายของ $(\xi)_{Print}$ และ $(\eta)_{Print}$ นี้สามารถบอกได้ทันทีเลยว่าแกน η ควรจะอยู่ในทิศใด และเอียงทำมุมอย่างไรกับเส้นตรงซึ่งเชื่อมโยงดาวทั้งสอง ทั้งนี้เพราะเราทราบทิศทางบวกของแกน ξ แล้วว่าอยู่ทางด้านใด

ขั้นที่ ๓ ตรวจสอบทิศที่หาได้อีกครั้งหนึ่งจากสูตรที่ ๕

๔.๗ หา Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวหาง[7]

จากจุดศูนย์กลางของส่วนหัวดาวหางบนระนาบของกระดาษอัดรูป ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับแกน η และ ξ ซึ่งสร้างขึ้นในหัวข้อ ๔.๖ วัดความยาวของเส้นตรงทั้งสองที่ลากขึ้นนี้สมมติให้เป็น $(\eta)_{Print}$ และ $(\xi)_{Print}$ จากนี้ใช้สูตร

$$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}} \quad \frac{(\eta)_{Print}}{a}$$

และ

$$OC = \frac{(XO)_{Plate}}{(XO)_{Print}} \quad \frac{(\xi)_{Print}}{b}$$

คำนวณหาค่า a และ b

ในเมื่อ OC เป็นความยาวโฟกัสของ Object Glass เป็นเทอมที่ทราบค่า

$(XO)_{Plate}$, $(XO)_{Print}$ เป็นระยะห่างจากดาวที่ใช้เป็น Origin ของแกนหลักถึงจุดศูนย์กลางของส่วนหัวดาวหางบน Plate และบนกระดาษอัดรูปซึ่งค่าทั้งสองนี้ได้จากการวัดโดยตรง

---

[7]W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p. 283-285.

จากค่า a และ b ที่คำนวณได้ แทนค่าลงในสมการ (๔๕) และ (๔๔) ที่ว่า

$$\tan(\alpha - A) = b \cos D + b \sin D \frac{(a \cos D + \sin D)}{\cos D - a \sin D}$$

$$\text{และ } \cot \delta = \frac{b \sin D}{\sin(\alpha - A) - b \cos D \cos(\alpha - A)}$$

ก็สามารถคำนวณหา Apparent R.A. α และ Apparent Dec. δ ของดาวหางได้ ในเมื่อ

A และ D เป็น Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวที่ใช้เป็น Origin ของแกนหลักบนระนาบของกระดาษอัดรูป

จาก a,b,A, D ซึ่งทราบค่า แทนค่าลงในสมการ (๔๕) ย่อมให้ค่าของ α เมื่อแทนค่า b,A,D และ α ที่คำนวณได้ลงในสมการ (๔๔) ย่อมให้ค่าของ δ

๔.๘ กำหนดแกนหลักขึ้นที่จุดศูนย์กลางของส่วนหัวดาวหางบนระนาบของภาพถ่าย[8]

จาก Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวหางที่ได้ในหัวข้อ ๔.๗ และ Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ใด ๆ อีกดวงหนึ่งซึ่งทราบค่า ย่อมสามารถกำหนดแกนหลักขึ้นที่จุดศูนย์กลางของหัวดาวหางได้ ด้วยวิธีเดียวกับหัวข้อ ๔.๖ สำหรับสูตรที่ใช้คำนวณคือ

๑. $$a = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)}$$

๒. $$b = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)}$$

๓. $$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

ในเมื่อ A = Apparent R.A. ของดาวหาง

D = Apparent Dec. ของดาวหาง

α และ δ เป็น Apparent R.A. และ Apparent Dec. ของดาวฤกษ์ที่ใช้ประกอบการคำนวณ

[8] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.278-285.

โดยแทนค่า A,D, α และ δ ลงในสูตรที่ ๑ และ ๒ จะได้ค่า a และ b จากนี้แทนค่า a และ b ที่หาได้ลงในสูตรที่ ๓ ย่อมสามารถคำนวณหามุม θ ได้ จากมุม θ ที่หาได้นี้ ย่อมสามารถกำหนดทิศของ η และ ξ ได้ทันที เพราะ θ เป็นมุมซึ่งทิศ η ทำกับทิศจากดาวหางไปยังดาวฤกษ์ที่ใช้ประกอบการคำนวณ บนระนาบของภาพถ่าย และเป็นที่น่าสังเกตว่าทิศของ η และ ξ ณ ตำแหน่งของดาวหางนี้เกือบขนานกับทิศของ η และ ξ ณ ตำแหน่งของดาวฤกษ์ที่ใช้กำหนดแกนหลักขึ้นครั้งแรกในหัวข้อ ๔.๖

๔.๙ หาทิศ Projection ของ Radius Vector บนระนาบของ Plate[9]

ที่จุดศูนย์กลางของส่วนหัวของดาวหางบนระนาบของกระดาษอัดรูป ซึ่งได้ตั้งแกน η และ ξ เรียบร้อยแล้วดังหัวข้อ ๔.๘ เราสามารถกำหนดทิศ Projection ของ Radius Vector ขึ้นได้ โดยเหตุที่ Radius Vector เป็นทิศจากดวงอาทิตย์ไปยังดาวหางเราจำเป็นต้องหาทิศจากดาวหางไปยังดวงอาทิตย์เสียก่อน แล้วจึงกลับทิศจึงจะเป็นทิศของ Radius Vector สำหรับ Projection ของมันก็ย่อมให้ความหมายเดียวกัน สำหรับสูตรที่ใช้คำนวณคือ

๑. $$a = \frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}$$

๒. $$b = \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)}$$

๓. $$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

ในเมื่อ A = Apparent R.A. ของดาวหาง (ทราบจากหัวข้อ ๔.๗)

D = Apparent Dec. ของดาวหาง (ทราบจากหัวข้อ ๔.๗)

α = Apparent R.A. ของ Sun ณ วันที่ทำการศึกษา (ทราบจาก Ephemeris)

δ = Apparent R.A. ของ Sun ณ วันที่ทำการศึกษา (ทราบจาก Ephemeris)

θ = มุมซึ่ง Projection ของทิศจากดาวหางไปยังดวงอาทิตย์ทำกับแกน η บนระนาบของกระดาษอัดรูป

[9] W.M.Smart, "Astronomical Photography," Spherical Astronomy (Cambridge University Press, 1971), p.278-285.

โดยแทนค่า A,D, α และ δ ซึ่งทราบค่าลงในสูตร ๑ และ ๒ จะหาค่า a และ b ได้จากนี้ แทนค่า a และ b ที่หาได้ลงในสูตร ๓ ก็จะได้ค่าของมุม θ

จากสมการ (๓๘) เนื่องจาก $\tan\theta = \xi/\eta = b/a$

ดังนั้นอัตราส่วนของ $\frac{b}{a}$ ย่อมเป็นอัตราส่วนของ $\frac{\xi}{\eta}$ ด้วย

โดยเหตุที่ η และ ξ มีความสัมพันธ์กับ a และ b ตามสมการ (๓๔) และ (๓๕) ที่ว่า

$$\eta = OC \times a$$

และ $$\xi = OC \times b$$

ในเมื่อ OC = ความยาวโฟกัสของ Object Glass

ดังนั้นถ้า a และ b มีเครื่องหมายอย่างไรแล้ว η และ ξ ย่อมมีเครื่องหมายตาม a และ b ด้วย

จากการทราบอัตราส่วน $\frac{b}{a}$ ในสูตร ๓ ย่อมทราบอัตราส่วน $\frac{\xi}{\eta}$ ด้วย และโดยการทอนอัตราส่วน $\frac{\xi}{\eta}$ ให้เหมาะสม ย่อมสามารถกำหนดสเกลของ η และ ξ ขึ้นได้ตามแกน η และ ξ ซึ่งได้ตั้งขึ้น ณ ตำแหน่งของดาวหางดังหัวข้อ ๔.๘ และทิศทางของสเกล η และ ξ ที่กำหนดขึ้นนั้น ย่อมทราบได้จากเครื่องหมายของ a และ b ดังที่ได้กล่าวแล้ว เมื่อทราบว่า Projection ของทิศจากดาวหางไปยังดวงอาทิตย์ทำมุมเท่าไรกับแกน η แล้ว มุมซึ่ง Projection ของทิศจากดวงอาทิตย์ไปยังดาวหางทำกับแกน η ย่อมทราบได้โดยง่ายเพียงแต่บวกเข้าไปอีก ๑๘๐ องศา

๔.๑๐ <u>หาความยาวของหางดาวหางเป็นองศา</u>[10]

จาก Plate ที่ถ่ายภาพดาวหาง นำมาอัดให้ได้ภาพดาวหางที่เห็นส่วนหางปรากฏชัดและยาวที่สุดซึ่งอาจทำได้ โดยการ Dilute น้ำยาอัดรูปให้เจือจางพอ เพื่อลด Contrast ของความเข้มระหว่างส่วนหัวและส่วนหาง ซึ่งแตกต่างกันมาก เมื่อได้ภาพดาวหางที่ปรากฏหางชัดและยาวที่สุดแล้ว Mark ตำแหน่งของหางที่สิ้นสุดบนระนาบของกระดาษอัดรูปไว้ สมมติว่าตำแหน่งนี้คือ M ถ้าหางที่เห็นเป็นหางแบบพลาสมา ทิศจากจุด

---

[10] W.M. Smart, "Astronomical Photography," <u>Spherical Astronomy</u> (Cambridge University Press, 1971), p.278-285.

ใจกลางหัวดาวหางไปยัง M ย่อมเป็นทิศ Projection ของ Tail Vector บนระนาบของกระดาษอัดรูปแต่ถ้าหางที่เห็นเป็นหางฝุ่นซึ่งย่อมมีความโค้ง ทิศจากจุดใจกลางหัวดาวหางไปยัง M จะไม่ใช่ทิศ Projection ของ Tail Vector ซึ่งทิศ Projection ของ Tail Vector สำหรับกรณีนี้ย่อมทราบได้จากทิศที่เหยียดตรงออกไปของหาง จากจุดใจกลางหัวดาวหางในระยะแรก โดยเหตุที่หางดาวหางอาจเป็นหางที่เหยียดตรง หรือหางที่โค้ง ดังที่ได้กล่าวแล้ว ดังนั้นการบอกความยาวของหางดาวหางเป็นองศาที่ปรากฏบนทรงกลมท้องฟ้าจึงจำเป็นจะต้องบอกว่า เป็นความยาวที่ Position Angle (pa) ใด

ถ้าให้ $(XO)_{Plate}$ เป็นระยะห่างระหว่างจุดใจกลางหัวดาวหาง และตำแหน่งที่สิ้นสุดของหางที่ปรากฏบน Plate

$(XO)_{Print}$ เป็นระยะห่างระหว่างจุดใจกลางหัวดาวหาง และตำแหน่งที่สิ้นสุดของหางที่ปรากฏบนกระดาษอัดรูป

$(\eta)_{Print}$ และ $(\xi)_{Print}$ เป็นค่าตามแกน η และ ξ ของตำแหน่งที่สิ้นสุดของหางบนกระดาษอัดรูป

ความยาวของหางเป็นองศาบนทรงกลมท้องฟ้าที่ปรากฏต่อผู้สังเกตบนโลก (ϕ) ย่อมสามารถคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้.-

๑. $$a = \frac{(XO)_{Plate} \, (\eta)_{Print}}{(XO)_{Print} \, F}$$

๒. $$b = \frac{(XO)_{Plate} \, (\xi)_{Print}}{(XO)_{Print} \, F}$$

๓. $$\tan \theta = \frac{(\xi)_{Print}}{(\eta)_{Print}}$$

๔. $$\tan \phi = \frac{b}{\sin \theta}$$

๕. $$\tan \phi = \frac{a}{\cos \theta}$$

ในเมื่อ θ เป็นมุมซึ่ง $(XO)_{Print}$ ทำกับแกน η

โดยแทนค่า $(XO)_{Plate}$, $(XO)_{Print}$, $(\eta)_{Print}$, $(\xi)_{Print}$ และ F ลงในสูตร ๑ และ ๒ จะได้ค่าของ a และ b และแทนค่า $(\xi)_{Print}$ และ $(\eta)_{Print}$ ลงในสูตร (๓) จะได้ค่ามุม θ จากนี้แทนค่า a,b และ θ ที่หาได้ลงในสูตร (๔) หรือ (๕) ก็จะได้ค่าของมุม ϕ

๔.๑๑ หา Aberration Angle ψ [11]

จากแผนภาพที่ ๔ E เป็นตำแหน่งของโลก

S เป็นตำแหน่งของดวงอาทิตย์บนทรงกลมท้องฟ้า

C เป็นตำแหน่งของดาวหางบนทรงกลมท้องฟ้า

$\vec{r}$ เป็นทิศทางของ Radius Vector จากดวงอาทิตย์ไปยังดาวหาง

$\vec{T}$ เป็นทิศทางของ Tail Vector ที่เหยียดออกไปในอวกาศ

$\vec{P}_r$ เป็นทิศ Projection ของ Radius Vector บน Tangent Plane หรือ Plane of Sky

$\vec{P}_T$ เป็นทิศ Projection ของ Tail Vector บน Tangent Plane หรือ Plane of Sky

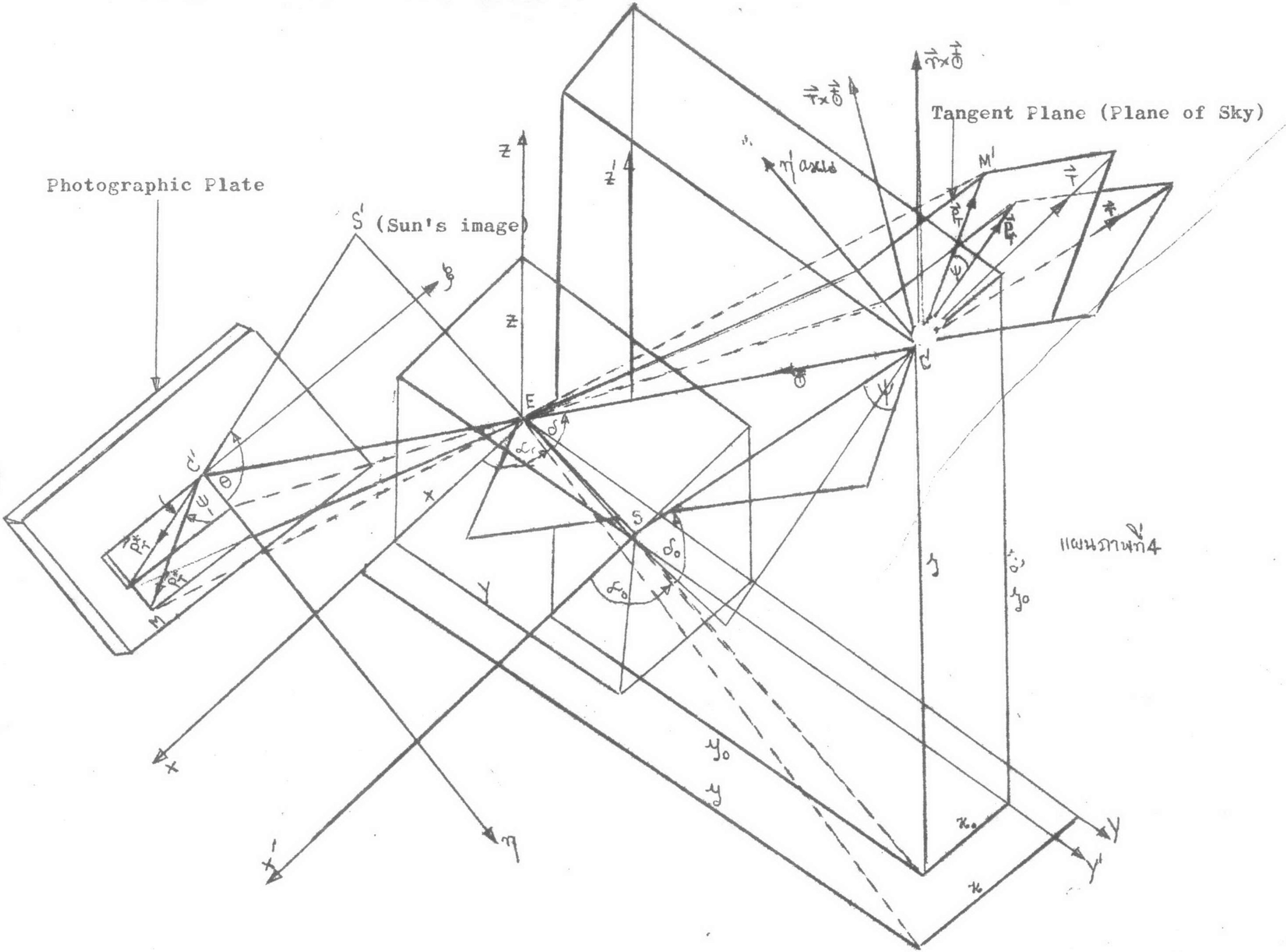
$\vec{P}^*_T$ เป็นทิศ Projection ของ Tail Vector บน Photographic Plate

$\vec{P}^*_T$ เป็นทิศ Projection ของ Radius Vector บน Photographic Plate

C' และ S' เป็นภาพของดาวหางและดวงอาทิตย์ที่ปรากฏบน Photographic Plate

---

[11] K. Jockers, Rhea Lüst and Th Nowak, Astron. & Astrophys. 21(1972), 206.


Photographic Plate
S' (Sun's image)
Tangent Plane (Plane of Sky)
η' axis
Z
Z'
E
S
C'
M
M'
x
y
y₀
x'
y'
η
ξ
θ
ψ
δ₀
α₀

แผนภาพที่4

ψ เป็นมุมระหว่าง $\vec{P}_{T-}$ และ $\vec{P}_T$ บน Tangent Plane (Plane of Sky) หรือคือมุมระหว่าง $\vec{P}^*_r$ และ $\vec{P}^*_T$ บน Photographic Plate ซึ่งมุม ψ นี้มีชื่อเรียกว่า Aberration Angle

$\vec{\text{♁}}$ เป็นทิศจากดาวหางไปยังโลก

ดังนั้น ถ้าทราบมุมซึ่ง Projection ของ Radius Vector และ Projection ของ Tail Vector ทำกับแกน ๆ บนระนาบของกระดาษอัดรูป ผลต่างของมุมทั้งสองนี้จะให้ค่าของ Aberration Angle ψ ทันที

๔.๑๒ หาขนาดของ $\vec{P}_r$ [12]

ในสามเหลี่ยม SEC ของแผนภาพที่ ๔

$$E\,S \sin S\hat{E}C = SC \sin E\hat{C}S = r \sin E\hat{C}S \quad \text{--------------(78)}$$

เนื่องจาก
$$\vec{P}_r = \frac{\vec{\text{♁}} \times [\vec{r} \times \vec{\text{♁}}]}{(\vec{\text{♁}}, \vec{\text{♁}})}$$

$$\therefore \left|\vec{P}_r\right| = \left|\frac{\vec{\text{♁}} \times [\vec{r} \times \vec{\text{♁}}]}{\vec{\text{♁}} \cdot \vec{\text{♁}}}\right| = \frac{(\text{♁})\left[(r\text{♁}) \sin E\hat{C}S\right] \sin 90^\circ}{\text{♁}\text{♁} \cos 0^\circ}$$

$$= \frac{r\,\text{♁}^2 \sin E\hat{C}S}{\text{♁}^2} = r \sin E\hat{C}S \quad \text{---------------------(79)}$$

สมการ (๗๘) = สมการ (๗๙) :-

$$\therefore \left|\vec{P}_r\right| = ES \sin S\hat{E}C = ES \sin \phi \quad \text{-----------------(80)}$$

ในเมื่อ ES เป็นระยะห่างของโลกจากดวงอาทิตย์ ณ วันที่ทำการศึกษา ทราบได้จาก Ephemeris

ϕ เป็นมุมที่ดาวหางและดวงอาทิตย์รองรับที่โลก ทราบได้จากการคำนวณโดยใช้สูตร

$$\tan \phi = \frac{a}{\cos \theta}$$

หรือ
$$\tan \phi = \frac{b}{\sin \theta}$$

---

[12] K. Jockers, Rhea Liist and Th Nowak, Astron. & Astrophys. 21(1972), 206.

โดยที่ a,b และ θ ทราบจากหัวข้อ ๔.๙

ดังนั้น เมื่อแทนค่า ES และ ϕ ลงในสมการ (๘๐) ย่อมสามารถคำนวณหา $|\vec{P}_r|$ ได้ ซึ่งจะบอกให้ทราบว่า Projection ของ Radius Vector มีขนาดยาวเท่าใดบนระนาบของท้องฟ้า และค่า $|\vec{P}_r|$ ที่หาได้นี้จะมีประโยชน์ต่อไป ในการศึกษาอิทธิพลของลมสุริยะที่มีต่อดาวหาง

๔.๑๓ <u>หาขนาดของ $\vec{P}_T$</u>[13]

สมมติให้มุมระหว่าง $\vec{\phi}$ และ $\bar{T}$ ใน Space เท่ากับ θ^* จะได้ว่า

$$\vec{P}_T = \frac{\vec{\phi} \times [\vec{T} \times \vec{\phi}]}{(\vec{\phi}.\vec{\phi})}$$

$$\therefore \; |\vec{P}_T| = \left| \frac{\vec{\phi} \times [\vec{T} \times \vec{\phi}]}{\vec{\phi}.\vec{\phi}} \right| = \frac{(\phi)\;[(T\phi)\sin\theta^*]\;\sin 90^\circ}{\phi\phi\;\cos 0^\circ}$$

$$= \frac{T\phi^2 \sin\theta^*}{\phi^2} = T\sin\theta^* \qquad \text{------------------(81)}$$

สมการ (๘๑) ให้ความหมายว่า ถ้าทราบความยาวของหางดาวหางที่ปรากฏบนระนาบของท้องฟ้า ($|\bar{P}_T|$) และทราบมุมซึ่ง $\vec{\phi}$ ทำกับ $\bar{T}$ ย่อมสามารถคำนวณหา T ได้ในเมื่อ T เป็นความยาวของหางดาวหางที่เหยียดไปในอวกาศ

จากแผนภาพที่ ๔ เมื่อพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก MC'E และ M'CE จะเห็นว่า

$$\tan M\hat{E}C' = \tan M'\hat{E}C$$

$$\therefore \; \frac{MC'}{C'E} = \frac{M'C}{CE}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{MC'}{F} = \frac{|\bar{P}_T|}{\phi}$$

$$\text{หรือ} \quad |\bar{P}_T| = \phi\,\frac{MC'}{F} \qquad \text{------------------- (82)}$$

---

[13] K. Jockers, Rhea Liist and Th Nowak, <u>Astron. & Astrophys.</u> 21(1972), 206.

ในเมื่อ $|\vec{P}_T|$ เป็นความยาวของหางที่ปรากฏบนระนาบของท้องฟ้า

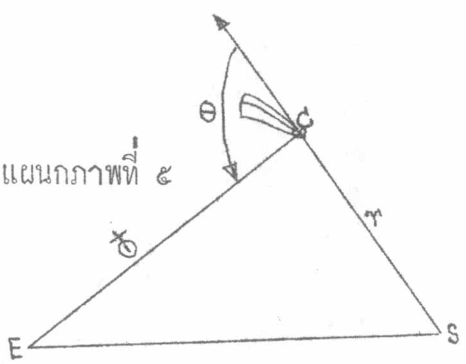
δ เป็นระยะห่างของโลกจากดาวหาง ทราบจาก I.A.U. Data

MC' เป็นความยาวของหางดาวหางที่ปรากฏบน Photographic Plate

F เป็นความยาวโฟกัสของ Object Glass

โดยเหตุที่ δ , MC' และ F เป็นเทอมที่ทราบค่า เมื่อแทนลงในสมการ (๘๒) ย่อมสามารถคำนวณหา $|\vec{P}_T|$ ได้ ซึ่งค่า $|\vec{P}_T|$ ที่หาได้นี้ จะมีประโยชน์ต่อไป ต่อการศึกษาอิทธิพลของลมสุริยะที่มีต่อดาวหาง ทั้งนี้เพราะ Tail Vector $\vec{T}$ มีความสัมพันธ์กับ Solar wind velocity vector และ Comet's orbital velocity vector โดยจำกัดความว่า Tail vector $\vec{T}$ เป็นผลต่างของ Solar windvelocity vector และ Comet's orbital velocity vector

๔.๑๔ หา Phase Angle ของดาวหาง [14]



แผนภาพที่ ๕

แทนสมการ (๗๘) ลงในสมการ (๘๐) จะได้

$$|\vec{P}_r| = ES \sin S\hat{E}C = r \sin E\hat{C}S$$

$$\therefore \sin E\hat{C}S = \frac{|\vec{P}_r|}{r} \quad \text{----------(83)}$$

โดยเหตุที่ $|\vec{P}_r|$ ทราบจากหัวข้อ ๔.๑๒ และ r ซึ่งเป็นระยะห่างของดาวหางจากดวงอาทิตย์ ทราบได้จาก I.A.U. Data ดังนั้น เมื่อแทนค่าทั้งสองนี้ลงในสมการ (๘๓) ย่อมสามารถคำนวณหามุม $E\hat{C}S$ ได้

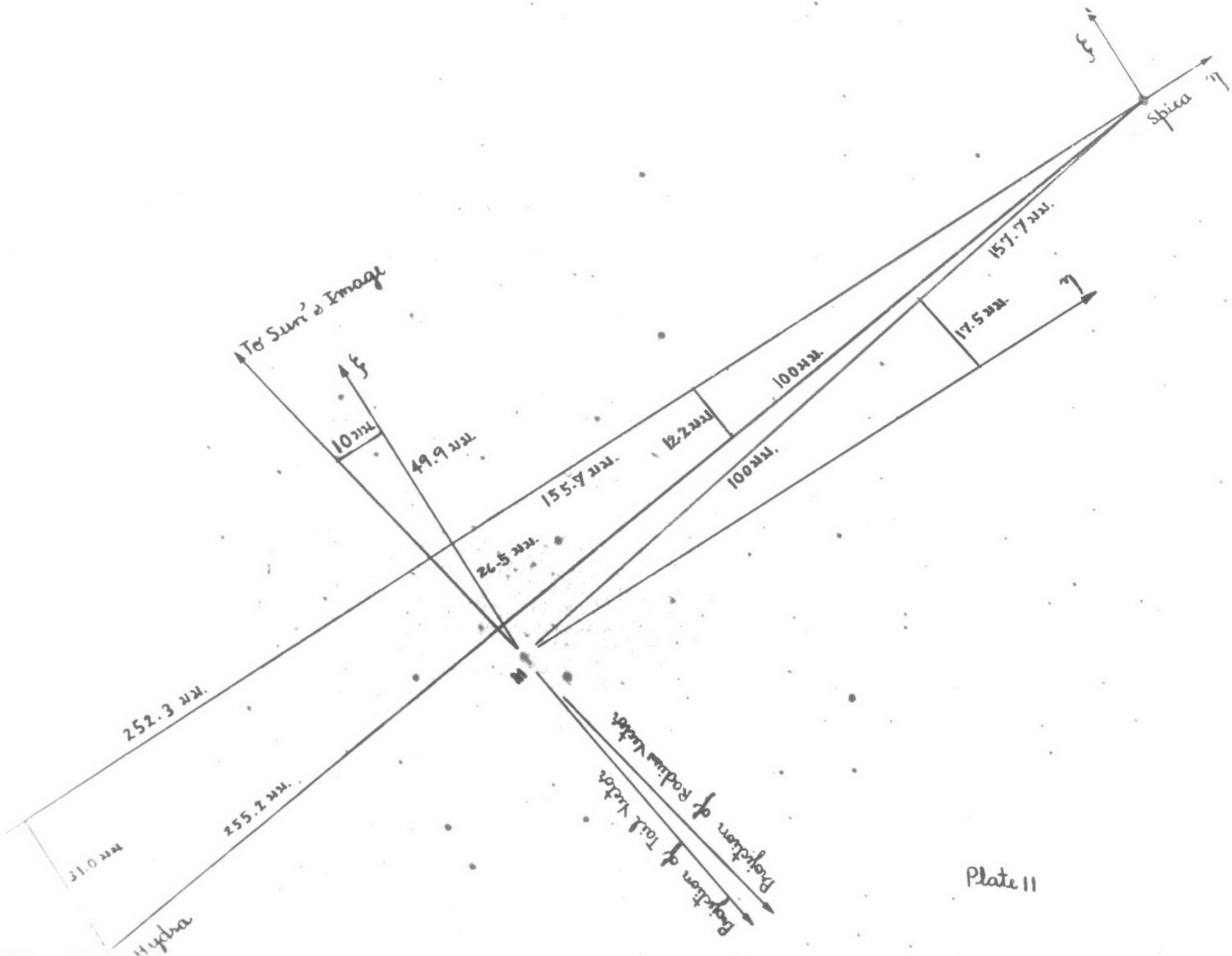
เนื่องจาก θ = Phase Angle

$\therefore$ Phase Angle (θ) = $180^\circ - E\hat{C}S$

สำหรับค่า Phase Angle ที่หาได้นี้จะมีประโยชน์ต่อไป ต่อการศึกษาอิทธิพลของลมสุริยะที่มีต่อดาวหาง และการศึกษาความสว่างของดาวหางซึ่งขึ้นกับ Phase Angle ในบางกรณี

---

[14] Bobronikoff, "Comet", Astrophysics (The Maple Press Company, York, P.A: J.A. Hynex, 1951), P.



To Sun's Image
Spica
10 mm.
49.9 mm.
155.7 mm.
12.2 mm.
100 mm.
100 mm.
157.7 mm.
17.5 mm.
26.5 mm.
252.3 mm.
255.2 mm.
31.0 mm.
Hydra
Projection of Radius Vector
Projection of Tail Vector

Plate 11