

ทฤษฎีบททางบท. เกี่ยวกับจุดคงที่



น.ส. พัฒนา โชติพานิช

001983

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๑๓

I16644059

SOME FIXED POINT THEOREMS

Miss Patana Chotipanich

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1974

Accepted by the graduate school, Chulalongkorn University
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science.

B. Tamthae

.....

Dean of the Graduate School



Thesis Committee

[Signature]
.....

Chairman

[Signature]
.....

[Signature]
.....

Thesis Supervisor

Dr. Virool Boonyasombat

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ทฤษฎีบทบางบทเกี่ยวกับจุดคงที่
ชื่อ น. ส. พัฒนา โชติพานิช
แผนกวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2516

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทสองบทที่คล้ายคลึงกันกับ Banach's contraction theorem ซึ่งเป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดี

ทฤษฎีบทแรกกล่าวถึง uniformly locally contractive mapping ซึ่งได้แก่ mapping T ที่มีคุณสมบัติว่า

$$d(T(y), T(z)) \leq q d(y, z)$$

เป็นจริงทุก y, z ใน δ -neighborhood ของจุด x ใด ๆ โดยที่ในที่นี้ $\delta > 0$, $q \in [0, 1)$ เป็นจำนวนจริงบางค่าซึ่งไม่ขึ้นต่อ x

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ (E, d) เป็น complete metric space ซึ่งสำหรับแต่ละค่า $\epsilon > 0$ และ x, y ใด ๆ เราอาจหาจุด x_0, x_1, \dots, x_n ซึ่ง $x_0 = x$, $x_n = y$ และ $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ ทุกค่า $i = 0, 1, \dots, n-1$ ถ้า T เป็น uniformly locally contractive map จาก E ไปยัง E เองแล้วย่อมมีจุด x^* จุดหนึ่งที่ $T(x^*) = x^*$ และมีจุดเช่นนี้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่สองเกี่ยวกับ mapping บน generalized metric space (E, d) ซึ่งหมายถึงเซต E เซตหนึ่ง กับฟังก์ชัน d จาก $E \times E$ ไปยังเซตของ extended real numbers สำหรับ generalized metric space (E, d) ใด เราจะได้ว่า ความสัมพันธ์ R ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข

$(x, y) \in R$ เมื่อ $d(x, y) < +\infty$ เท่านั้น
 เป็น equivalence relation ความสัมพันธ์นี้จึงก่อให้เกิดการแบ่ง E ออกเป็น
 equivalence classes $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ซึ่งเราเรียกว่า canonical
 decomposition เกี่ยวกับเรื่องนี้เราโคเหตุขุ้บต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ (E, d) เป็น complete generalized metric space
 ซึ่งมี $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ เป็น canonical decomposition ถ้า $T : E \rightarrow E$
 เป็น mapping ซึ่งมีความต่อเนื่อง และ

- (i) $T/E_\alpha : E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ สำหรับแต่ละค่า $\alpha \in A$
- (ii) มีจำนวนเต็มบวก p บางค่าซึ่ง T^p เป็น contraction กล่าวคือมี
 จำนวนจริง $q \in [0, 1)$ ซึ่ง $d(T^p(x), T^p(y)) \leq q d(x, y)$ ทุกจุด
 $x, y \in E$ แล้วเราขอมไควาขอโคขอหนึ่งในสองขอต่อไปนี้ตอง เป็นจริง

- (1) ทุกจุด $x \in E$ $d(x, T^p(x)) = +\infty$
- (2) มีจุด x จุดหนึ่งซึ่ง $T(x) = x$

Thesis Title : Some Fixed Point Theorems
 Name : Miss Patana Chotipanich
 Department : Mathematics
 Academic Year : 1973

ABSTRACT

In this thesis, we prove two variations of the well-known Banach's contraction theorem.

The first one deals with uniformly locally contractive mapping T . By this we mean that

$$d(T(y), T(z)) \leq q d(y, z)$$

for all y, z in δ -neighborhood of every point x , where $\delta > 0$ and $q \in [0, 1)$ are some real numbers independent of x .

Theorem 1. Let (E, d) be a complete metric space such that for any $\varepsilon > 0$ and any $x, y \in E$ there exists a set of point $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ with $x_0 = x$, $x_n = y$ and $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ for $i = 0, 1, \dots, n - 1$. If T is a uniformly locally contractive mapping from E into itself then there exists a unique point $x^* \in E$ such that $T(x^*) = x^*$.

The second one deals with mapping on generalized metric spaces. By a generalized metric space (E, d) we mean that d is an extended real valued function on $E \times E$ satisfies all the properties of a metric. For any generalized metric space (E, d) , the relation

R on E, defined by

$(x, y) \in R$ if and only if $d(x, y) < +\infty$, is an equivalence relation. This relation induces a partition of E into equivalence classes $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, which is known as the canonical decomposition. Our result on this is the following theorem.

Theorem 2. Let (E, d) be a complete generalized metric space with the canonical decomposition $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. If $T : E \longrightarrow E$ is a continuous mapping such that

i) $T|_{E_\alpha} : E_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ for each $\alpha \in \mathcal{A}$;

ii) T^p is a contraction for some positive integer p,

i.e. there exists a real number $q \in [0, 1)$ such that

$$d(T^p(x), T^p(y)) \leq q d(x, y)$$

for all $x, y \in E$.

Then either

(1) for every $x \in E$ $d(x, T^p(x)) = +\infty$

or (2) there exists $x \in E$ such that $T(x) = x$.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to express her thanks and deep appreciation to Dr. Calvin F.K. Jung, her former thesis supervisor, for his suggestion. She also thanks to Dr. Virool beonyasombat, her thesis supervisor, who gave her his valuable advice.

TABLE OF CONTENTS

	Page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	vi
ACKNOWLEDGEMENT	viii
CHAPTER	
I INTRODUCTION	1
II PRELIMINARY	2
III BANACH'S CONTRACTION THEOREM	18
IV EXISTENCE AND UNIQUENESS	22
THEOREM FOR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS	
V FIXED POINT THEOREMS OF LOCALLY	34
CONTRACTION MAPS	
IV FIXED POINT THEOREMS OF THE	40
ALTERNATIVE FOR CONTRACTION ON A GENERALIZED SEMI-METRIC SPACE	
APPENDIX	44
REFERENCES	46
VITA	47