บทที่ 3

บอลลิสติคกัลวานอมิเตอร์ (Ballistic Galvanometer)

บอลลิสติคกัลวานอมิเตอร์ เป็นเครื่องมือใช้สำหรับวัดประจุไฟฟ้าโดยตรง โดยอาศัยหลักที่ว่า ผ่านประจุไฟฟ้าเข้าไปในเครื่องมือโดยใช้เวลาสั้น ๆ เมื่อเทียบกับคาบเวลาของการเคลื่อนที่ของขดลวด โดยถือว่าขดลวดยังไม่ถูกทำให้เคลื่อนที่ในระหว่างที่ประจุไฟฟ้ากำลังผ่านเข้าไป บอลลิสติคกัลวานอมิเตอร์มีลักษณะพิเศษคือ มีโมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบของการเคลื่อนที่มาก เมื่อเทียบกับโมเมนต์ของการกลับสู่จุดเริ่มต้น เนื่องจากลวดที่ขดลวดแขวนอยู่

3.1 ทฤษฎีของบอลลิสติคกัลวานอมิเตอร์

การที่ประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ผ่านเครื่องมือจะทำให้เกิดแรงและเกิดความเคลื่อนไหวแกว่งไปมาคือขดลวดมีพลังงาน และพลังงานจำนวนนี้จะค่อย ๆ หมดไป เนื่องจากการเกิดการเสียดทานกับอากาศและอีเลคโตรแมกเตติกแดมปิ้ง (Electromagnetic-damping) เมื่อมีความต้านทาน R ต่อเข้ากับกัลวานอมิเตอร์ สมการการเคลื่อนที่ของขดลวดจะเป็นดังนี้

$$\frac{Pd^2\theta}{dt^2} + \frac{kd\theta}{dt} + \tau\theta = \frac{Ke}{R} \qquad (3-1)$$

เมื่อ P = โมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบการเคลื่อนที่

k = ค่าคงตัวของการหน่วง (Damping constant) เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของขดลวดในอากาศ และโดยการเหนี่ยวนำกระแสไฟฟ้า เนื่องจากการเคลื่อนที่ของขดลวดในสนามแม่เหล็ก

τ = ค่าคงตัวของการนำกลับ (Restoring constant) หมายถึง โมเมนต์ของการนำขดลวดกลับสู่จุดเริ่มต้น มีหน่วยต่อมุมเรเดียนที่ขดลวดเบี่ยงเบนไป

θ = ค่าของมุมที่ขดลวดเบี่ยงเบนไป มีหน่วยเป็นเรเดียน

t = เวลาใดๆ หน่วยวินาที

K = ค่าคงตัวของกลัวานอมิเตอร์ มีค่า = BNA เมื่อ B เป็นความเข้ม สนามแม่เหล็กที่ผ่านขดลวด N เป็นจำนวนรอบของลวดที่พันขดลวด A เป็นพื้นที่หน้าตัดขวางของขดลวด

e = แรงเคลื่องไฟฟ้าที่ใส่ให้กับเครื่องมือ

3.1.1 ในกรณีที่ประจุไฟฟ้าผ่านกัลวานอมิเตอร์แปรตามเวลา

ถ้าการประจุไฟฟ้าไหลผ่านกัลวานอมิเตอร์แปรตามเวลา สมมติให้

$$e = E_0 \epsilon^{-\alpha t} \qquad (3-2)$$

ถ้ากัลวานอมิเตอร์เป็นแบบคริติคัลแดมพ์ รากของสมการ

$Pm^2 + km + \tau = 0$ จะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ $m_1 = m_2 = -\frac{k}{2P}$ ในกรณีนี้ ได้คำตอบของสมการที่ (3-1) คือ

$$\Theta = (C_1 + C_2 t)\epsilon^{-\frac{kt}{2P}} + \frac{K}{RP}\left(t\epsilon^{-\frac{kt}{2P}} \int e\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt - \epsilon^{-\frac{kt}{2P}} \int te\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt\right) \qquad (3-3)$$

ให้ว่าอุปกรณ์มีภาวะหยุดนิ่งเมื่อให้แรงเคลื่อนไฟฟ้า e ไหลผ่าน นั่นคือ

$$t = 0 \qquad \Theta(0) = 0$$

$$t = 0 \qquad \frac{d\Theta(0)}{dt} = 0$$

ภาวะบนจะเป็นจริงต่อเมื่อ

$$c_1 = \frac{K}{RP}\left(\int te\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt\right)_{t=0}$$

$$c_2 = -\frac{K}{RP}\left(\int e\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt\right)_{t=0}$$

สมการที่ (3-3) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Theta = \frac{K}{RP}\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left(t\int_0^t e\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt - \int_0^t t\,e\,\epsilon^{\frac{kt}{2P}}\,dt\right) \qquad (3\text{-}4)$$

แทนค่าสมการ (3-2) ลงในสมการ (3-4)

$$\Theta = \frac{K}{RP}\,Eo\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left[t\int_0^t \epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}\,dt - \int_0^t t\,\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}\,dt\right]$$

$$\Theta = \frac{KEo}{RP}\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left[t\,\frac{\left(\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}} - 1\right)}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \int_0 \frac{t\,d\left(\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}\right)}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)}\right]$$

$$\Theta = \frac{KEo}{RP}\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left[t\,\frac{\left(\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}} - 1\right)}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \left\{t\,\frac{\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \int_0^t \frac{\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}\,dt}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)}\right\}\right]$$

$$\Theta = \frac{KEo}{RP}\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left[t\,\frac{\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \frac{t}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \frac{t\,\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} + \frac{\epsilon^{-\alpha t + \frac{kt}{2P}} - 1}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2}\right]$$

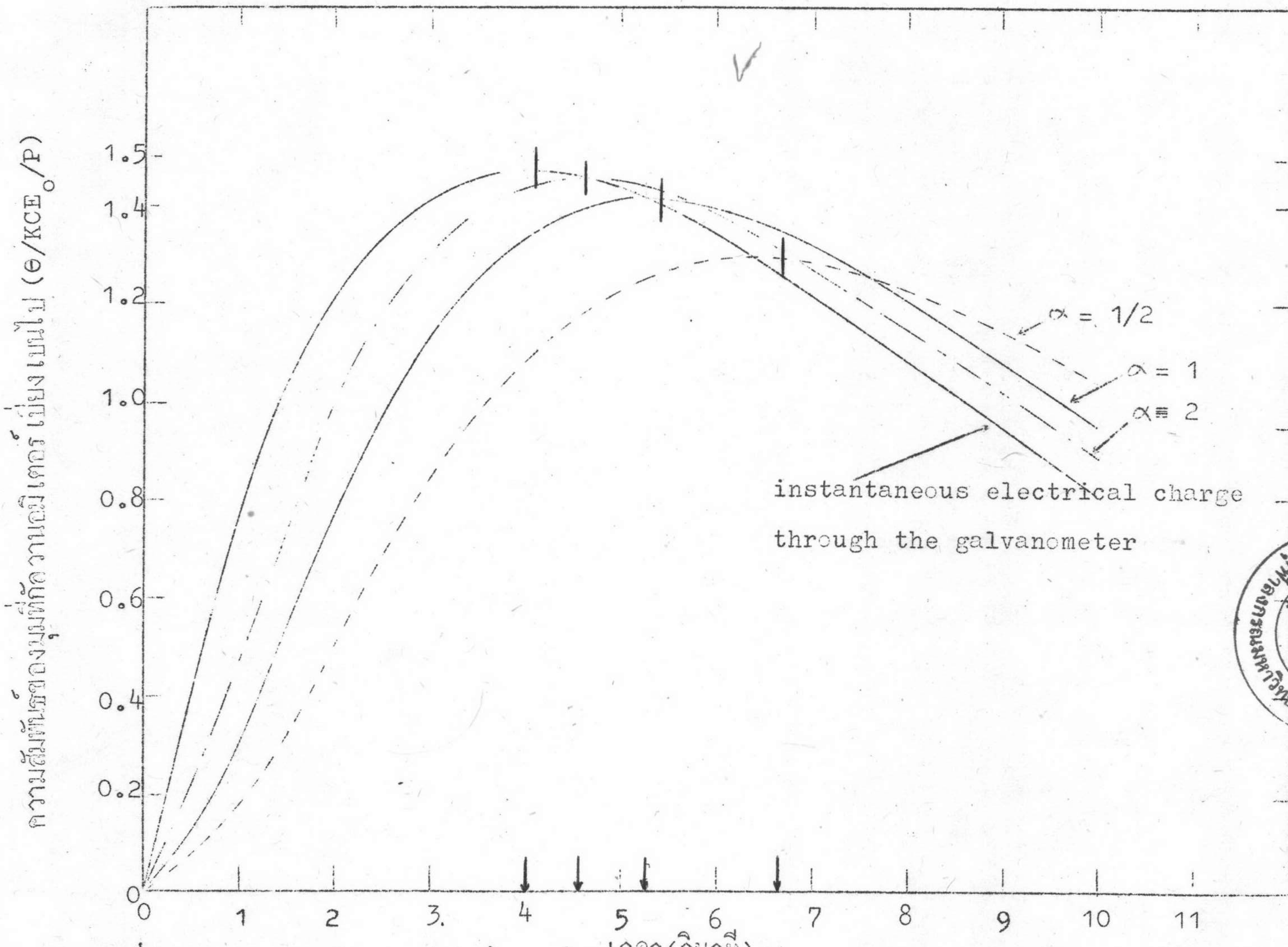
$$\Theta = \frac{KEo}{RP}\left[-\frac{t\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} + \frac{\epsilon^{-\alpha t}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2} - \frac{\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2}\right] \qquad (3\text{-}5)$$

จาก $\alpha = \frac{1}{RC}$ เมื่อ C คือค่าคาปาซิทันซ์ (capacitance) ของคาปาซิเตอร์แทนค่า R ลงในสมการ (3-5) จะได้

$$\Theta = \frac{KEoC}{P}\,\alpha\left[-\frac{t\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} + \frac{\epsilon^{-\alpha t}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2} - \frac{\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2}\right] \qquad (3\text{-}6)$$

เวลาที่ขดลวดใช้ในการเบี่ยงเบนมากที่สุด หาได้จากการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (3-6) แล้วให้เท่ากับ 0

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{KEoC}{P}\,\alpha\left[-\frac{\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} + \frac{k}{2P}\,\frac{t\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)} - \frac{\alpha\,\epsilon^{-\alpha t}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2} + \frac{k}{2P}\,\frac{\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}}{\left(\frac{k}{2P} - \alpha\right)^2}\right] = 0$$



รูปที่ 3-1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่กัลวานอมิเตอร์เบี่ยงเบนไป($\theta/KCE_o/P$) กับเวลาต่างๆกัน โดยมีค่า $\frac{k}{2P}$ =1/4และค่า α มีขนาดต่างๆกัน

$$\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\left[-\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)+\frac{k}{2P}\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)t+\frac{k}{2P}\right]-\alpha\,\epsilon^{-\alpha t} = 0$$

$$\left[-\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)+\frac{k}{2P}+\frac{k}{2P}\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)t\right]\epsilon^{-\frac{kt}{2P}}-\alpha\,\epsilon^{-\alpha t} = 0$$

$$\epsilon^{\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)t} = \frac{1}{\alpha}\left(N+Mt\right) \qquad (3\text{-}7)$$

เมื่อ $N = -\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)+\frac{k}{2P}$

$= \alpha$

$M = \frac{k}{2P}\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)$

สมมตกำหนดให้ $\frac{2P}{k} = 4$ และ $\alpha = \frac{1}{2}$

จากการลากกราฟระหว่าง $\epsilon^{\left(\frac{k}{2P}-\alpha\right)t}$ กับ t และ $\frac{1}{\alpha}(N + Mt)$ กับ t

ปรากฏว่าเส้นกราฟทั้งสองตัดกันที่ $t_1 = 6.65$

แทนค่า $\frac{k}{2P} = \frac{1}{4}$ $\alpha = \frac{1}{2}$ และ $t_1 = 6.65$ ลงในสมการที่ (3-6)

$$\theta_1 = \frac{KCE_o}{P}\,\frac{1}{2}\left[-\frac{6.65\,\epsilon^{-\frac{6.65}{4}}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\epsilon^{-\frac{6.65}{4}}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{\epsilon^{-\frac{6.65}{4}}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{KCE_o}{P}\,\frac{1}{2}\left[\frac{6.65}{0.25}\epsilon^{-\frac{6.65}{4}}+\frac{\epsilon^{-\frac{6.65}{2}}}{0.0625}-\frac{\epsilon^{-\frac{6.65}{4}}}{0.0625}\right]$$

$$= 1.29\,\frac{KCE_o}{P} \qquad (3\text{-}8)$$

สมมตกำหนดให้ $\frac{2P}{k} = 4$ และ $\alpha = 1$

จากการลากกร๊าฟระหว่าง $\epsilon^{(\frac{k}{2P} - \alpha)t}$ กับ t และ $\frac{1}{\alpha}(N + Mt)$ กับ t

ปรากฏว่า เส้นกร๊าฟทั้งสองตัดกันที่ $t_2 = 5.25$

แทนค่า $\frac{2P}{k} = 4, \alpha = 1$ และ $t_2 = 5.25$ ลงในสมการที่ (3-6)

$$\Theta_2 = \frac{KCEo}{P} \quad 1 \left[- \frac{5.25\ \epsilon^{-\frac{5.25}{4}}}{(0.25-1)} + \frac{\epsilon^{-5.25}}{(0.25-1)^2} - \frac{\epsilon^{-\frac{5.25}{4}}}{(0.25-1)^2} \right]$$

$$= \frac{KCEo}{P} \left[\frac{5.25\,\epsilon^{-1.3125}}{0.75} + \frac{\epsilon^{-5.25}}{0.5625} - \frac{\epsilon^{-1.3125}}{0.5625} \right]$$

$$= 1.41 \ \frac{KCEo}{P} \qquad (3\text{-}9)$$

สมมตกำหนดให้ $\frac{2P}{k} = 4$ และ $\alpha = 2$

จากการลากกร๊าฟระหว่าง $\epsilon^{(\frac{k}{2P} - \alpha)t}$ กับ t และ $\frac{1}{\alpha}(N + Mt)$ กับ t

ปรากฏว่าเส้นกร๊าฟทั้งสองตัดกันที่ $t_3 = 4.55$

แทนค่า $\frac{2P}{k} = 4, \alpha = 2$ และ $t_3 = 4.55$ ลงในสมการที่ (3-6)

$$\Theta_3 = \frac{KCEo}{P} \quad 2 \left[- \frac{4.55\ \epsilon^{-\frac{4.55}{4}}}{(0.25-2)} + \frac{\epsilon^{-2x4.55}}{(0.25-2)^2} - \frac{\epsilon^{-\frac{4.55}{4}}}{(0.25-2)^2} \right]$$

$$= \frac{KCEo}{P} \quad 2 \left[\frac{4.55\ \epsilon^{-1.1375}}{1.75} + \frac{\epsilon^{-9.91}}{3.0625} - \frac{\epsilon^{-1.1375}}{3.0625} \right]$$

$$= 1.458 \ \frac{KCEo}{P} \qquad (3\text{-}10)$$

จากสมการที่ (3-8), (3-9), (3-10) จะเห็นได้ว่า ถ้า α มีค่ามากขึ้น (หมายความว่า ประจุที่ไหลผ่านกัลวานอมิเตอร์จะเร็วขึ้น) เวลาที่ขดลวดใช้ในการเบี่ยงเบนมากที่สุด จะมีค่าน้อยลง และมุมที่ขดลวดเบี่ยงเบนมากที่สุดจะมีค่ามากขึ้นด้วย นั่นคือ กัลวานอมิเตอร์จะมีความไวมากขึ้นเมื่อ α มีค่ามากขึ้น

3.1.2 ในกรณีที่ประจุไฟฟ้าผ่านกัลวานอมิเตอร์เป็นแบบทันทีทันใด ให้ประจุไฟฟ้าผ่านกัลวานอมิเตอร์ในเวลาสั้น ๆ โดยถือว่าขดลวดยังไม่มีการเคลื่อนที่ สมการการเคลื่อนที่จะเป็นดังนี้

$$P \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \tau\theta = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

ในกรณีคริติคัลแดมพ์จะได้ว่า $k^2 = 4P\tau$ รากของสมการ $Pm^2 + km + \tau = 0$ มีค่าเท่ากันคือ $m_1 = m_2 = -\frac{k}{2P}$ จะได้คำตอบของสมการที่ (3-11) คือ

$$\theta = (C_1 + C_2 t)\, \epsilon^{-\frac{k}{2P} t} \qquad (3\text{-}12)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $t = 0$; $\theta(0) = 0$

$t = 0$; $\frac{d\theta(0)}{dt} = \omega_0$

เงื่อนไขข้างบนจะเป็นจริงเมื่อ $C_1 = 0$

$C_2 = \omega_0$

นั่นคือสมการที่ (3-12) จะเป็น

$$\theta = \omega_0 t\, \epsilon^{-\frac{kt}{2P}} \qquad (3\text{-}13)$$

เมื่อมีกระแส i แอมแปร์ไหลผ่านเข้าไปในขดลวดที่มีพื้นที่หน้าตัด A ตารางเซ็นติเมตร มีจำนวนขดลวด N รอบ และมีความเข้มของสนามแม่เหล็ก B เวบเบอร์ต่อตารางเซ็นติเมตร โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในขดลวดจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของความเร่งเชิงมุมของระบบการเคลื่อนที่

$$BNAi = P \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{หรือ} \quad Ki = P \frac{d\omega}{dt} \qquad (3\text{-}14)$$

เมื่อ $K = BNA$ หรือคือค่าคงตัวของกัลวานอมิเตอร์ อินทิเกรตสมการที่ (3-14) โดยใช้ช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = t$ เมื่อ $t =$ จำนวนเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการผ่านประจุเข้าไปในกัลวานอมิเตอร์

$$\int_0^t Kidt = \int_0^t Pd\omega$$

$$K\,Q = P\,\omega_0$$

เมื่อ Q = จำนวนประจุไฟฟ้าทั้งหมดที่ผ่านขดลวด (คูลอมบ์) แทนค่าลงในสมการที่ (3–13) จะได้

$$\Theta = \frac{KQ}{P}\, t\, \epsilon^{-\frac{kt}{2P}} \tag{3-15}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (3–15) แล้วให้เท่ากับ 0

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{KQ}{P}\,\epsilon^{-\frac{kt}{2P}} - \frac{KQ}{P}\, t\, \epsilon^{-\frac{kt}{2P}}\,\frac{k}{2P} = 0$$

$$t_1 = \frac{2P}{k} \tag{3-16}$$

นั่นคือ เวลาที่ขดลวดใช้ในการเบี่ยงเบนมากที่สุดมีค่าเท่ากับ $\frac{2P}{k}$ แทนค่าสมการที่ (3–16) ลงในสมการที่ (3–15) จะได้

$$\Theta_1 = \frac{KQ}{P} \cdot \frac{2P}{k} \cdot \epsilon^{-1}$$

$$\Theta_1 = \frac{KQ}{P} \cdot \frac{2P}{k}\, \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Theta_1 = \frac{KCE_o}{P}\, \frac{2P}{k} \cdot \frac{1}{\epsilon} \tag{3-17}$$

ถ้าแทนค่า $\frac{2P}{k} = 4$ ลงในสมการที่ (3–17)

$$\Theta_1 = 1.47\, \frac{KCE_o}{P} \tag{3-18}$$

จะเห็นได้ว่ากัลวานอมิเตอร์จะมีความไวมากที่สุดเมื่อประจุที่ไหลผ่านกัลวานอมิเตอร์เป็นแบบทันทีทันใด