หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 5

## การวิเคราะห์ทางสถิติหลังการปรับแก้

## (A Posteriori Statistical Analysis)

### 5.1 กล่าวนำ

ผลจากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ประกอบด้วยค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มต่าง ๆ (พารามิเตอร์หรือค่าสังเกต หรือทั้งสองอย่าง) พร้อมด้วยค่าคาดคะเนของแมทริกซ์ของความแปรปรวนของปริมาณเหล่านั้น หลังจากการปรับแก้แล้วอาจจะใช้เทคนิคทางสถิติวิเคราะห์และประเมินผลลัพธ์ที่ได้ ถึงแม้ว่าการคาดคะเนด้วยลีสท์สแควร์ไม่จำเป็นต้องทราบการแจกแจงทางสถิติของตัวแปรต่าง ๆ ก็ตาม แต่ในการวิเคราะห์ทางสถิติจำเป็นต้องทราบการแจกแจงเหล่านั้น ดังนั้นจึงมักสมมุติกันว่าค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบปกติ (normally distributed) และการคาดคะเนด้วยลีสท์สแควร์กระทำต่อฟังก์ชั่นนอลโมเดลที่เป็นเชิงเส้น (linear)

จาก Mikhail (1976), P. 294 และ Baarda (1963), PP. 12-16 พอจะสรุปการวิเคราะห์ทางสถิติได้ดังนี้

### 5.2 การทดสอบค่าความแปรปรวน (Tests on the Reference Variance)

การทดสอบทางสถิติที่นิยมใช้กับข้อมูลลีสท์สแควร์เป็นการทดสอบเกี่ยวกับความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยก่อนการปรับแก้ ($\sigma_o^2$) และหลังการปรับแก้ ($\hat{\sigma}_o^2$)

จากความสัมพันธ์ของน้ำหนักของค่าสังเกตตามสมการ (4 - 1) และ (4 - 4) จะได้ว่า

$$p_{ii} = \sigma_o^2/\sigma_i^2 = \sigma_o^2/(S_i^2 K_i)$$

ถ้า $p_{ii} = 1/\sigma_i^2$ ก็หมายความว่าเราให้ $\sigma_o^2 = 1$

การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์สามารถทราบค่า $V^tPV$ ที่ลำดับชั้นความอิสระ r จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}_o^2 = V'PV/r$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_o^2$ เป็นค่าคาดคะเนที่ไม่ลำเอียง (unbiased estimator) ของ $\sigma_o^2$

การทดสอบทางสถิติเกี่ยวกับ $\hat{\sigma}_o^2$ เปรียบเทียบกับ $\sigma_o^2$ ใช้ $\chi^2$-test (Chi-Square-test) โดยที่

$$\chi_r^2 = r.\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 = V'PV/\sigma_o^2 \qquad (5 - 1)$$

มีการแจกแจงแบบไคสแคว ด้วยลำดับชั้นความอิสระ r ซึ่งในที่นี้เป็นการทดสอบแบบ "one-tail upper-bound test" โดยใช้ระดับนัยสำคัญ ($\alpha$) เท่ากับ 0.05 ในการตัดสินใจสมมุติฐาน

$$H_o : \hat{\sigma}_o^2 = \sigma_o^2 \text{ , } H_1 : \hat{\sigma}_o^2 > \sigma_o^2$$

จะปฏิเสธ $H_o$ เมื่อ

$$\chi_r^2 > \chi_{\alpha,r}^2$$

เพราะว่า $P\{r\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 > \chi_{\alpha,r}^2\} = \alpha$

ในการทดสอบทางสถิติของค่า $\hat{\sigma}_o^2$ เป็นการบอกความน่าจะเป็น (probability) ของผลการปรับแก้ ถ้าผลการทดสอบไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ แสดงว่าผลของการปรับแก้นั้นไม่ดีหรือยังใช้ไม่ได้ ควรที่จะมีการตรวจสอบสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

1. ตรวจสอบว่าการคำนวณต่าง ๆ ถูกต้องทุกขั้นตอนหรือไม่
2. ตรวจสอบ gross errors ที่อาจหลงเหลืออยู่
3. ตรวจสอบดูว่าความคลาดเคลื่อนเป็นระบบต่าง ๆ ถูกกำจัดออกไปจากค่าสังเกตเพียงพอหรือไม่
4. ตรวจสอบการใช้น้ำหนักของค่าสังเกตเหมาะสมหรือไม่
5. ตรวจสอบแบบจำลองโครงข่ายระดับมีความถูกต้องและสมบูรณ์เพียงพอหรือไม่

ตารางที่ 5.1 ผลการทดสอบทางสถิติของค่า $\hat{\sigma}_o^2$ เทียบกับ $\sigma_o^2$

| รูปที่ | โครงข่ายระดับ | r (n-u) | $\hat{\sigma}_o^2$ | $\sigma_o^2$ | $\chi_r^2$ | $\chi_{\alpha, r}^2$ ($\alpha = 0.05$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ช.2 | ภาคกลาง | 11 | 1.448 | 1.0 | 15.93 | 19.68 |
| ช.3 | ภาคเหนือ | 9 | 1.017 | 1.0 | 9.15 | 16.92 |
| ช.4 | ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ | 13 | 1.243 | 1.0 | 16.16 | 22.36 |
| ช.6 | ตอนเหนือเกาะหลัก | 34 | 1.656 | 1.0 | 56.30 | 48.57 |
| | " " | 34 | 1.380* | 1.0 | 46.92 | 48.57 |
| ช.5 | ตอนใต้เกาะหลัก | 7 | 3.626 | 1.0 | 25.38 | 14.07 |

* ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้น้ำหนักของค่าสังเกตตามหลักการสมการ (4 - 3)

การใช้น้ำหนักของค่าสังเกตตามหลักการของสมการ (4 - 4) หมายความว่าค่า V'PV ขึ้นอยู่กับตัวแปร 3 ชุดคือ

$S_1^2, S_2^2, S_3^2, \ldots\ldots\ldots, S_n^2$ ได้จากสมการ (4 - 5)

$K_1, K_2, K_3, \ldots\ldots\ldots, K_n$ ระยะทางเส้นระดับเป็น ก.ม.

$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots\ldots, t_c$ ค่าคลาดบรรจบแต่ละวงจร

เมื่อ n = จำนวนเส้นระดับทั้งหมดของโครงข่ายระดับ

c = จำนวนวงจรปิดหรือจำนวนเงื่อนไขที่เป็นอิสระแก่กัน

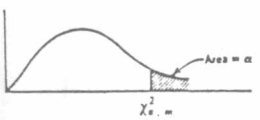
และ $S_i^2 K_i$ เป็นความแปรปรวนของเส้นระดับที่ i ถ้าค่าของ $\hat{\sigma}_o^2$ เทียบกับ $\sigma_o^2$ ไม่ผ่านการทดสอบทางสถิติ จะต้องมีการวิเคราะห์ทางสถิติแต่ละวงจรปิด เพื่อหาค่าคลาดบรรจบที่เกินเกณฑ์อย่างมีนัยสำคัญ Baarda (1963, p. 15) ได้สรุปไว้ดังนี้

# ตารางที่ 5.2 ค่าวิกฤตของไคสแคว

(Mikhail, 1976, p. 478)

**Area Under the Chi-Square Density Function**

$$\chi^2_{\alpha,m} \text{ such that } P(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha,m}) = \alpha = \int_{\chi^2_{\alpha,m}}^{\infty} f(\chi^2)\, d\chi^2 = 1 - \int_0^{\chi^2_{\alpha,m}} f(\chi^2)\, d\chi^2$$




| $m$ \ $\alpha$ = | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.500 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.46 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 1.39 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.07 | 0.12 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 2.37 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 3.36 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 4.35 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 5.35 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 6.35 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 7.34 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 9.34 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 9.34 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 10.34 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 11.34 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 12.34 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 6.79 | 13.34 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 14.34 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 40.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7'96 | 9.31 | 15.34 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.08 | 16.34 | 24.77 | 27.59 | 20.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 17.34 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 18.34 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 19.34 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 20.34 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 21.34 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 22.34 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 23.34 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 14.34 | 24.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 25.34 | 35.56 | 38.88 | 41.92 | 45.64 | 49.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 26.34 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 27.34 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 28.34 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 29.34 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 39.34 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.64 | 59.33 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 120 | 83.85 | 86.92 | 91.58 | 95.70 | 100.62 | 119.33 | 140.23 | 146.57 | 152.21 | 158.95 | 163.65 |

ให้ $t^i$ เป็นค่าคลาดบรรจบของวงจรปิดที่ i โคแฟคเตอร์ $q^{ii}$ คือ ผลรวมของโคแฟคเตอร์ของเส้นระดับของวงจรปิดที่ i น้ำหนักของ $t^i$ คือ $1/q^{ii} = p^{ii}$ ค่าคาดคะเนของความแปรปรวนหนึ่งหน่วย

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{p^{ii}(t^i)^2}{i} \qquad (5 - 2)$$

ขณะที่ $r\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 \equiv \chi^2_{0.05,\,1}$ , $(r = 1)$

เขตวิกฤต (critical value) ในการตัดสินใจ ($\alpha = 0.05$)

$$\chi^2_{0.05,\,1} \geq 3.84$$

ถ้า $\hat{\sigma}_o^2 > 3.84\ \sigma_o^2$ แสดงว่าวงจรปิดที่ i มีความคลาดเคลื่อนอย่างมีนัยสำคัญ

หรือ $p^{ii}(t^i)^2 > 3.84$ , $(\sigma_o^2 = 1)$

$$|t^i| > \sqrt{3.84\ q^{ii}} \qquad (5 - 3)$$

โดยที่ $q^{ii} = \sum_{j=1}^{k} S_j^2 K_j$ (เฉพาะกรณีที่ให้ $\sigma_o^2 = 1$)

k = จำนวนเส้นระดับของวงจรปิดที่ i

หลังจากการปรับแก้โครงข่ายระดับตอนเหนือเกาะหลัก (รูป ข.6) โดยใช้น้ำหนักของค่าสังเกตตามหลักการของสมการ (4 - 4) ได้ $\hat{\sigma}_o^2 = 1.656$ ที่ r = 34 ผลของการทดสอบทางสถิติ ในตาราง 5.1 ไม่สามารถยอมรับสมมุติฐานที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 จึงต้องมีการวิเคราะห์หาค่าคลาดบรรจบของวงจรปิดที่เกินเกณฑ์อย่างมีนัยสำคัญ ตามหลักการของ Baarda (1963) ดังนี้

| | $t^i$ | Critical value |
|---|---|---|
| วงจรปิดที่ผ่านจุด (16, 17, 20, 18, 14, 9, 6, 7) | -58.8 mm. | 40.9 |
| วงจรปิดที่ผ่านจุด (18, 20, 17, 16, 15) | +55.8 mm. | 37.9 |
| วงจรปิดที่ผ่านจุด (37, 48, 47, 41) | -40.4 mm. | 39.0 |
| วงจรปิดที่ผ่านจุด (53, 52, 58, 57, 55, 54) | -51.2 mm. | 50.8 |

ครั้นเมื่อทดลองเปลี่ยนมาใช้น้ำหนักของค่าสังเกต ตามหลักการของสมการ (4 - 3) โดยมีสมมุติฐานว่า ความแปรปรวนต่อ 1 ก.ม. ($S^2$) ของแต่ละเส้นระดับมีค่าคงที่ทั้ง โครงข่ายระดับ ทำให้ผลลัพธ์ของการปรับแก้ผ่านการทดสอบทางสถิติ (ดูตาราง 5.1) แต่ผลจากการคำนวณค่า $S^2$ ในตาราง ข.4-1 ได้ค่าแตกต่างกันประมาณ 0.3 - 1.5 (ม.ม.)$^2$/ก.ม. ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่เป็นจริงตามข้อสมมุติฐานดังกล่าว

ผลจากการเปลี่ยนน้ำหนักของค่าสังเกต หลังการปรับแก้ได้ค่า $\hat{\sigma}_o^2$ เปลี่ยนแปลงลงเล็กน้อย และทำให้ผ่านการทดสอบทางสถิติ ยังไม่เป็นการเพียงพอที่จะบอกความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ เพราะต้องคำนึงถึงความคลาดเคลื่อนในแบบจำลองโครงข่ายระดับ (model error) ด้วย ถ้าได้มีการประยุกต์ค่าแรงดูดพิภพในการคำนวณค่าตรวจแก้-ออร์ธอเมตริคให้กับค่าสังเกต ตามหลักการของสมการ (ข.-5) อาจทำให้ค่าคลาดบรรจบของวงจรปิดอยู่ในเกณฑ์ที่ดีขึ้น ดังนั้นในการปรับแก้โครงข่ายระดับตอนเหนือเกาะหลัก จึงใช้ผลลัพธ์จากการใช้น้ำหนักของค่าสังเกตตามหลักการสมการ (4 - 4 ) เพราะแต่ละเส้นระดับได้ให้ความแปรปรวน ($\sigma_i^2$) ของค่าสังเกตที่เป็นจริง

สำหรับผลการทดสอบทางสถิติของโครงข่ายระดับตอนใต้เกาะหลักไม่สามารถยอมรับสมมุติฐานที่ $\alpha = 0.05$ จากตาราง 5.1 จะเห็นว่าค่า $\tilde{\sigma}_o^2$ โตกว่า $\sigma_o^2$ มาก ซึ่งสาเหตุนั้นจะกล่าวในบทต่อไป

## 5.3 ความละเอียดของผลลัพธ์ (Precission of results)

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบให้เห็นว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าระดับ (พารามิเตอร์) ภายหลังปรับแก้ มีค่าน้อยกว่าก่อนปรับแก้ เราสามารถหาความแปรปรวนของพารามิเตอร์ก่อนการปรับแก้ได้จากกฎของการแพร่ จากรูป ข.6 ได้เลือกเส้นทางระดับที่สั้นที่สุดจากเกาะหลักไปยังจุดเหนือสุดของประเทศ ซึ่งประกอบด้วยเส้นระดับที่ $\ell_{95}$, $\ell_{9}$, $\ell_{13}$, $\ell_{23}$, $\ell_{39}$, $\ell_{52}$, $\ell_{75}$, $\ell_{81}$, $\ell_{87}$ และ $\ell_{93}$ โดยผ่านจุดพารามิเตอร์ที่ $H_3$,

$H_6$, $H_9$, $H_{11}$, $H_{24}$, $H_{34}$, $H_{53}$, $H_{54}$, $H_{55}$, $H_{61}$ และ $H_{62}$

แบบจำลองเชิงคณิต

$$H_3 = BMA. + \ell_{95}$$

$$H_6 = BMA. + \ell_{95} + \ell_9$$

$$\vdots$$

$$H_{62} = BMA. + \ell_{95} + \ell_9 + \ell_{13} + ..... + \ell_{93}$$

จากกฎของการแพร่

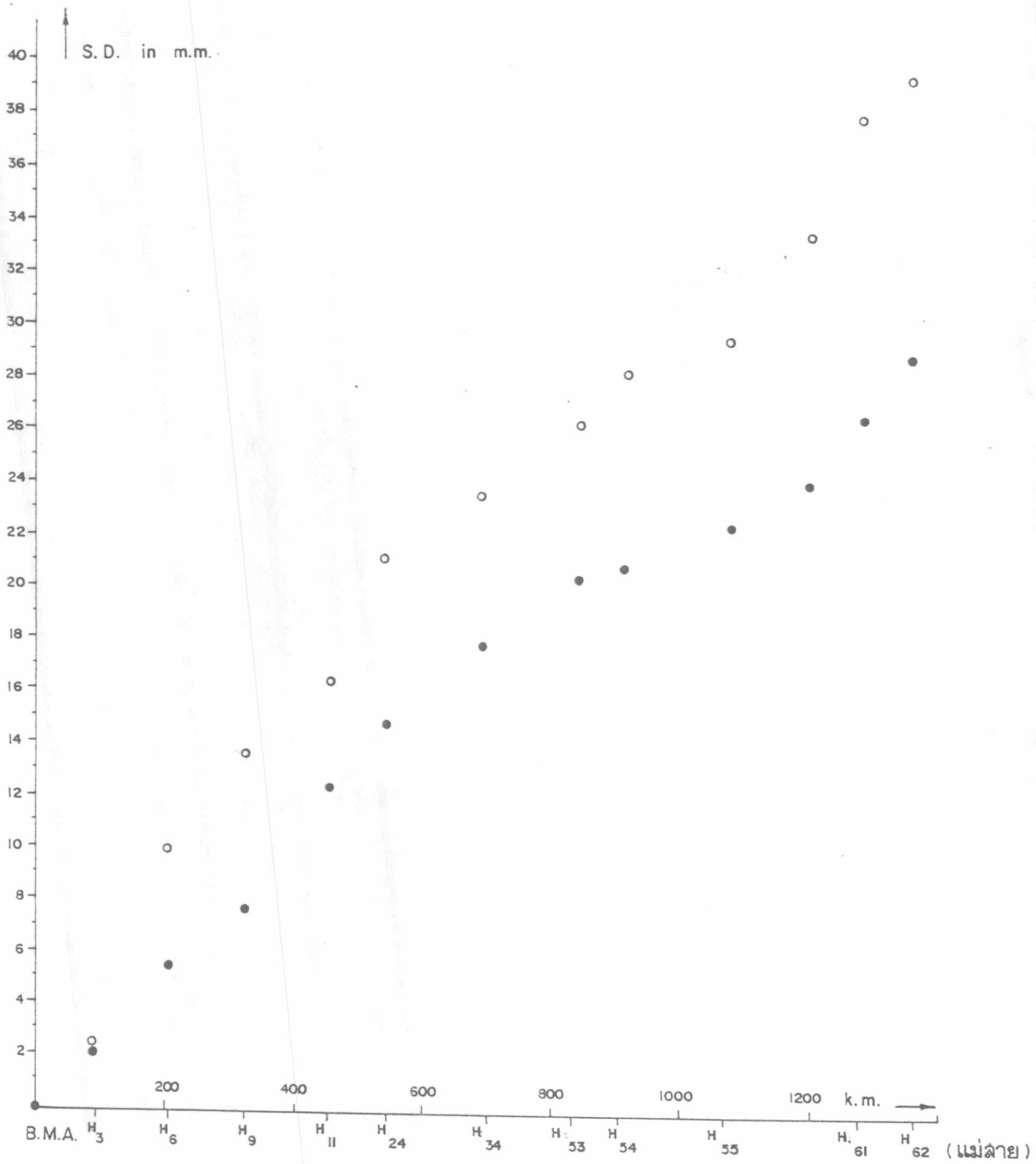
$$\Sigma_H = G \Sigma_{Lb} G'$$

โดยที่ค่า $\sigma^2_{Li}$ , i = 95, 9, 13, ..... , 93 คำนวณได้จากสมการ (4 - 4)

สำหรับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหลังการปรับแก้ได้จากแมทริกซ์ของความแปรปรวน ($\Sigma_{Xa}$)

ผลของการเปรียบเทียบแสดงด้วยกราฟในรูป 5.1

ในรูป ช.8 แสดงให้เห็นขนาดของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคาดคะเนของระดับสูงแต่ละจุดภายหลังจากการปรับแก้โครงข่ายระดับทั่วประเทศ โดยจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามระยะห่างจากจุดบังคับ (BMA.) และขึ้นอยู่กับลักษณะความหนาแน่นของโครงข่ายระดับ จะเห็นได้ว่าโครงข่ายระดับตอนใต้เกาะหลักมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าระดับมากผิดปกติ เมื่อเทียบกับโครงข่ายระดับตอนเหนือเกาะหลัก




รูปที่ 5.1 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ก่อนและหลังการปรับแก้

○ ส่วน เบี่ยง เบนมาตรฐานก่อนปรับแก้

● ส่วน เบี่ยง เบนมาตรฐานหลังการปรับแก้