

## การคำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับ

4.1 คำนำ

การปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยวิธีสัทสแควร์ครั้งนี้ เรามุ่งหวังที่จะได้ค่าพารามิเตอร์ และในขั้นตอนการปรับแก้ต้องมีการเพิ่มหรือลดจำนวนค่าสังเกตลง โดยให้จำนวนพารามิเตอร์คงเดิม ประกอบกับเหตุผลที่กล่าวไว้แล้วในบทก่อนเราจึงได้เลือกใช้วิธีสมการค่าสังเกต

ปัญหาของงานระดับมีแบบจำลองเชิงคณิต  $L_a = F(X_a)$  เป็นสมการเชิงเส้น ทำให้การสร้างเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์มีความง่ายขึ้นมาก และไม่มีความจำเป็นต้องหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ ( $X_0$ ) โดยอาจถือเป็นศูนย์ไป กรณีเช่นนี้

$$L_0 = F(X_0) \text{ จะมีค่าเท่ากับค่าคงที่ของสมการ}$$

4.2 เมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (Weight of Observations Matrix)

น้ำหนักของค่าสังเกตคือ การเปรียบเทียบค่าสังเกตนั้น ๆ กับค่าอื่น ๆ ในเชิงสัมพัทธ์ หรืออาจกล่าวได้ว่าน้ำหนักเป็นการคาดคะเนหรือแสดงความน่าเชื่อถือในเชิงสัมพัทธ์ (the relative reliabilities) ของค่าสังเกต ถ้าความแปรปรวนของค่าสังเกตมีน้อยแสดงว่าค่าสังเกตนั้นดี นั่นคือน้ำหนักของค่าสังเกตมีค่ามากแต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าความแปรปรวนของค่าสังเกตมีค่ามาก จะทำให้น้ำหนักของค่าสังเกตมีค่าน้อย จึงพอสรุปได้ว่าน้ำหนักของค่าสังเกต เป็นส่วนกลับกับความแปรปรวนของค่าสังเกต

ในงานวิศวกรรมสำรวจส่วนใหญ่มักจะถือว่าค่าที่วัดได้แต่ละครั้ง เป็นอิสระแก่กัน\*

---

\* วิชา (2524) หน้า 1-7 ถึง 1-8

ดังนั้นค่าสังเกตในงานระดับจึงไม่มีสหสัมพันธ์กัน (uncorrelate) จะได้ว่าเมทริกซ์ของความแปรปรวนของค่าสังเกต ( $\Sigma_{Lb}$ ) เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix)

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \phi & & & \\ & & \sigma_2^2 & & \\ & & & \ddots & \\ \phi & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ  $\sigma_i^2$  คือความแปรปรวนของค่าสังเกตที่  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

$n$  คือจำนวนค่าสังเกต

และ  $P$  คือเมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต จะได้ว่า

$$P = \sigma_o^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \quad (4 - 1)$$

โดยที่  $\sigma_o^2$  เป็นความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยก่อนการปรับแก้ สำหรับการหาความแปรปรวนของค่าสังเกต ( $\sigma_i^2$ ) ในงานระดับมีข้อพิจารณา ดังนี้ (Wolf, 1980, p. 60)

1. เป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนตั้งกล้อง (set-up)

$$\sigma_i^2 = (\rho_i/d) S^2 \quad (4 - 2)$$

เมื่อ  $S$  = The standard deviation per instrument set up

$d$  = The linear advance per set up

$\sigma_i^2$  = The variance of each line of level net

$\rho_i$  = ระยะทางของเส้นทางระดับที่

2. เป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทางของเส้นทางระดับ จากสมการ (4 - 2) จะเห็นว่าปริมาณของ  $(S^2/d)$  เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\sigma_i^2 = \rho_i (S^2/d) \propto \rho_i \quad (4 - 3)$$

3. จากสมการ (3.19) ของ Bomford (1971) , p. 246

$$\sigma_i^2 = S_i^2 K_i \quad (4 - 4)$$

เมื่อ  $K_i$  = ระยะทาง (ก.ม.) ของเส้นทางระดับที่  $i$

$$S_i^2 = (1/4m) \sum_{j=1}^m (\Delta_j^2 / r_j) \quad (\text{mm.})^2 / \text{km.} \quad (4 - 5)$$

: คือความแปรปรวนของค่าสังเกตในการทำไป-ทำกลับระหว่างตอนระดับ ภายในเส้นทางระดับที่  $i$

$\Delta_j$  = ค่าความต่าง (ม.ม.) ของการทำระดับไป-ทำระดับกลับในตอนระดับที่  $j$

$r_j$  = ระยะทาง (1-5 ก.ม.) ของตอนระดับที่  $j$

$m$  = จำนวนตอนระดับ ภายในเส้นทางระดับที่  $i$

การปรับแก้โครงข่ายระดับครั้งนี้เลือกใช้ค่า  $\sigma_i^2$  ทั้งสมการ (4 - 3) และ (4 - 4)

ส่วนการพิจารณาหน่วยของแมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกตมีดังนี้

จากสมการ (4 - 4) จะได้หน่วยของ  $\sigma_i^2$  เป็น (ม.ม.)<sup>2</sup> และถ้าให้เวคเตอร์ของเศษคงเหลือ (v) มีหน่วยเป็น (ม.ม.) จะทำให้  $v'PV$  ไม่มีหน่วย ผลก็คือ

$$\sigma_0^2 = v'PV/r \quad \text{ไม่มีหน่วยด้วย}$$

#### 4.3 สมการปกติ (Normal equations)

การปรับแก้ด้วยวิธีสแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกต รูปแบบของสมการปกติ ซึ่งมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่าคือ  $n$  สมการ (จากตารางที่ 3.1) ดังนี้

$$(A'PA) X + A'PL = 0$$

$$\text{หรือ } NX + U = 0 \quad (4 - 6)$$

$$\text{เมื่อ } N = A'PA \quad \text{และ } U = A'PL$$

#### 4.3.1 การจัดเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ ( $n \times u$ )

เมื่อทราบจำนวนค่าสังเกต  $n$  และจำนวนพารามิเตอร์  $u$

กำหนดให้

$x_{i_a}$  คือค่าสังเกต (ค่าต่างระดับ) ที่  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$x_{j_a}$  คือพารามิเตอร์ (ค่าระดับ) ที่  $j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, u$

จากแบบจำลองเชิงคณิต  $L_a = F(x_a)$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} x_{1_a} \\ x_{2_a} \\ \vdots \\ x_{n_a} \end{bmatrix} = n[A]_u \begin{bmatrix} x_{1_a} \\ x_{2_a} \\ \vdots \\ x_{u_a} \end{bmatrix} + C, \quad (C = \text{เวกเตอร์ของค่าคงที่})$$

เมื่อ  $A = \frac{\partial F}{\partial x_a}$ , แต่แบบจำลองเชิงคณิตเป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นองค์ (elements) ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ ( $A$ ) ในแต่ละแถว (row) จะมีเพียง 2 ค่าคือ  $+1$  และ  $-1$  นอกนั้นเป็นศูนย์

#### 4.3.2 การจัดเวกเตอร์ $L$

เวกเตอร์  $L$  คือความต่างระหว่างเวกเตอร์  $L_o$  กับเวกเตอร์  $L_b$  มีหน่วยเป็น (ม.ม.)

$$L = L_o - L_b$$

เมื่อ  $L_b$  คือค่าสังเกต (ค่าต่างระดับ)

$L_o$  คือค่าประมาณของค่าสังเกต ( $L_o = F(x_o)$ )

#### 4.4 ขั้นตอนการคำนวณปรับแก้

เมื่อทราบปริมาณต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้น ( $n, u, A, P, L$ ) เราก็สามารถคำนวณหาค่าคาดคะเนด้วยวิธีลีสต์สแควร์ (Least squares estimates) โดยวิธีสมการกำลังเอกได้ดังนี้

| <u>ขั้นตอน</u>  | <u>ขนาดของเมทริกซ์</u> |
|---|------------------------|
| - สร้าง $N = A'PA$ (normal matrix)                              | ( $u, u$ )             |
| - สร้าง $U = A'PL$  | ( $u, 1$ )             |
| - คำนวณหา $N^{-1}$  | ( $u, u$ )             |
| - คำนวณ $X = -N^{-1}U$  | ( $u, 1$ )             |
| - $V = AX + L$  | ( $n, 1$ )             |
| - $\hat{X}_a = X_0 + X$ (ค่าระดับที่ปรับแก้แล้ว)                | ( $u, 1$ )             |
| - $\hat{L}_a = L_b + V = L_0 + AX$ (ค่าต่างระดับที่ปรับแก้แล้ว) | ( $n, 1$ )             |
| - ตรวจสอบการคำนวณด้วย $A'PV = 0$                                | ( $u, 1$ )             |
| - คำนวณ $V'PV = L'PL + X'U$                                     | scalar                 |
| - $\hat{\sigma}_0^2 = V'PV/(n - u)$                             | scalar                 |
| - คำนวณเมทริกซ์ของความแปรปรวน                                   |                        |

(Variance - covariance matrices)

$$\Sigma_{\hat{X}_a} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (u, u)$$

$$\Sigma_{\hat{L}_a} = \hat{\sigma}_0^2 (AN^{-1}A') \quad (n, n)$$

$$\Sigma_{vv} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - AN^{-1}A') \quad (n, n)$$



$$\begin{bmatrix} l_{16} \\ l_{17} \\ l_{18} \\ l_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \sigma_o^2 \Sigma_{Lb}^{-1}, \text{ กำหนดให้ } \sigma_o^2 = 1$$

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \phi \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \sigma_{19}^2 & \\ & & & & \phi \end{bmatrix}, \text{ ค่า } \sigma_i^2 \text{ ใช้หลักการตามสมการ (4-3)}$$

$$P = \text{diag.} \left[ \frac{1}{179.060}, \frac{1}{134.421}, \frac{1}{94.210}, \frac{1}{324.088}, \frac{1}{108.901}, \frac{1}{446.541}, \frac{1}{492.447}, \frac{1}{510.682}, \frac{1}{138.559}, \frac{1}{149.398}, \frac{1}{116.457}, \frac{1}{42.441}, \frac{1}{68.080}, \frac{1}{40.371}, \frac{1}{269.641}, \frac{1}{174.809}, \frac{1}{355.128}, \frac{1}{172.179}, \frac{1}{159.979} \right] (\text{m.m.})^{-2}$$

$$L = L_o - L_b = \begin{bmatrix} -5.8542 \\ -5.8542 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m.m.} - \begin{bmatrix} 172.1529 \\ 21.4728 \\ 3.9643 \\ 198.9031 \\ 75.6420 \\ 75.6450 \\ 278.7262 \\ 123.3144 \\ -8.8285 \\ -34.4886 \\ 0.0253 \\ -14.4031 \\ -19.3951 \\ -6.0822 \\ 8.7184 \end{bmatrix} \text{m.m.} = \begin{bmatrix} -178007.1 \\ -27327.0 \\ -3964.3 \\ -198903.1 \\ -75642.0 \\ -75645.0 \\ -278726.2 \\ -123314.4 \\ 8828.5 \\ 34488.6 \\ -25.3 \\ 14403.1 \\ 19395.1 \\ 6082.2 \\ -8718.4 \end{bmatrix} \text{m.m.}$$

I16854984

$$L = L_o - L_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m.} - \begin{bmatrix} -13.7016 \\ -41.7672 \\ 21.8751 \\ -21.8613 \end{bmatrix} \text{ m.} = \begin{bmatrix} 13701.6 \\ 41767.2 \\ -21875.1 \\ 21861.3 \end{bmatrix}$$

$N = A'PA$  (normal matrix)

$$= \begin{bmatrix} .0201 & -.0106 & 0 & -.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & .0157 & -.0031 & 0 & 0 & -.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & .0145 & -.0114 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & .0135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & .0195 & -.0072 & 0 & 0 & -.0067 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & .0455 & -.0236 & -.0147 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & .0292 & 0 & 0 & 0 & -.0037 & 0 \\ & & & & & & & .0452 & -.0248 & 0 & -.0057 & 0 \\ & & & & & & & & .0366 & -.0060 & 0 & -.0058 \\ & & & & & & & & & .0190 & 0 & -.0063 \\ & & & & & & & & & & .0123 & -.0028 \\ & & & & & & & & & & & .0149 \end{bmatrix} \text{ (m.m.)}^{-2}$$

Symmetric

$$U = A'PL = \begin{bmatrix} 404.79 \\ 813.12 \\ 250.26 \\ -1430.00 \\ -1288.69 \\ -560.54 \\ 130.23 \\ 212.61 \\ 23.46 \\ 94.35 \\ -228.33 \\ 381.31 \end{bmatrix} \text{ (m.m.)}^{-1}, \quad \overset{\Delta}{X} = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 27.3408 \\ 31.3343 \\ 230.3044 \\ 305.9651 \\ 177.9887 \\ 169.1087 \\ 154.7011 \\ 149.6957 \\ 143.5981 \\ 143.5403 \\ 163.4180 \\ 121.6908 \end{bmatrix} \text{ m.}$$

$$x_a = \overset{\Delta}{X} + x_o, \quad (x_o = 0)$$



$$V = \hat{A}X + L = \begin{bmatrix} -18.37 \\ 13.79 \\ 29.16 \\ 67.05 \\ 18.70 \\ 15.70 \\ -101.89 \\ 52.40 \\ -51.49 \\ 40.19 \\ 32.47 \\ -4.59 \\ -17.94 \\ -15.41 \\ -1.48 \\ -20.68 \\ 40.06 \\ 32.15 \\ 11.82 \end{bmatrix} \quad (\text{m.m.}) , \quad (\hat{X} \text{ มีหน่วยเป็น ม.ม.})$$

$$V'PV = L'PL + \hat{X}'U = 117.65 , \quad r = 7$$

$$\frac{\Delta^2}{\sigma_o^2} = V'PV/r = 16.808 , \quad (\sigma_o^2 = 1)$$

$$\Sigma \Lambda_{\text{ka}} = \frac{\Lambda^2}{\sigma^2} N^{-1}$$

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |                     |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------------------|
| Symmetric | 1968 | 1783 | 1849 | 1867 | 388  | 596  | 675  | 572  | 552  | 488  | 594  | 533  | (ม.ม.) <sup>2</sup> |
|           |      | 2914 | 2509 | 2399 | 635  | 975  | 110  | 934  | 902  | 797  | 971  | 871  |                     |
|           |      |      | 5767 | 5175 | 546  | 839  | 951  | 804  | 776  | 686  | 836  | 750  |                     |
|           |      |      |      | 5925 | 522  | 803  | 909  | 769  | 742  | 656  | 800  | 717  |                     |
|           |      |      |      |      | 2492 | 2215 | 2110 | 2248 | 2275 | 2360 | 2218 | 2300 |                     |
|           |      |      |      |      |      | 3441 | 3241 | 3219 | 3100 | 2742 | 3167 | 2962 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      | 3671 | 3106 | 2998 | 2650 | 3229 | 2895 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      |      | 3878 | 3670 | 3077 | 3533 | 3395 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      |      |      | 4057 | 3283 | 3454 | 3618 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 3917 | 3046 | 3504 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 4815 | 3540 |                     |
|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 4685 |                     |

ในการปรับแก้โครงข่ายระดับอื่น ๆ คำนวณในลักษณะเดียวกันนี้เพียงแต่ขนาดของแมทริกซ์เปลี่ยนไป ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงได้จัดทำเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับคำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับ

#### 4.5 การตรวจสอบ gross errors เบื้องต้น

งานระดับชั้นหนึ่งได้ทำการรังวัดต่อเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน ตามประวัติยังมีเคยมีการปรับแก้พร้อมกันทั้งโครงข่ายระดับมาก่อน ดังนั้นก่อนที่จะนำค่าสังเกตจากข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดมาทำการปรับแก้พร้อมกัน จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่และกำจัดออกไปเพื่อความสะดวกในทางปฏิบัติและเป็นการประหยัดเวลา จึงได้แบ่งพื้นที่ตรวจสอบ gross errors ออกเป็นภูมิภาคคือ ภาคกลาง ภาคเหนือ ภาคตะวันออกเฉียงเหนือและภาคใต้ ดังแสดงในรูปที่ ข.2, ข.3, ข.4 และ ข.5 ตามลำดับ

โครงข่ายระดับแต่ละภาคประกอบไปด้วยวงจรปิดของวงรอบระดับที่เป็นไปตามข้อมูลจริง คำนวณหาค่าคลาดบรรจบจากผลรวมทางพีชคณิตของ ค่าต่างระดับ\* ในทิศทางเวียนตามเข็มนาฬิกา จากนั้นจึงพิจารณาดูเส้นทางระดับใดบ้างที่ทำให้ค่าคลาดบรรจบของวงจรปิดเกินเกณฑ์ 4 ม.ม.  $\sqrt{K}$  (เมื่อ K คือระยะทางเป็น ก.ม.) ตลอดจนตรวจดูทิศทาง (เครื่องหมาย) ของค่าคลาดบรรจบนั้น ๆ ว่ามีความสอดคล้องกับวงจรปิดที่ต่อเนื่องกันหรือไม่เพียงใด ดังรายละเอียดแสดงไว้ในตารางที่ ข.1-1, ข.1-2, ข.1-3 และ ข.1-4 ตามลำดับ

ผลของการพิจารณาดังกล่าวทำให้ทราบได้โดยประมาณว่า เส้นทางระดับใดบ้างที่จะมีความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่แฝงอยู่ในความคลาดเคลื่อนเป็นระบบ เพื่อแยกออกให้เห็นเด่นชัดจึงได้เขียนเป็นเส้นประแทนเส้นทางระดับเหล่านั้น ภายในรูปโครงข่ายระดับแต่ละภูมิภาค

#### 4.6 การปรับแก้เบื้องต้นเพื่อวิเคราะห์หา gross errors

เพื่อเป็นการยืนยันในการตรวจสอบความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่ในหัวข้อ 4.5 จึงได้ทำการคำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับเบื้องต้น โดยแยกเป็นส่วน ๆ ตามภูมิภาคดังนี้

เริ่มจากภาคกลาง (รูปที่ ข.2) ใช้ค่าระดับของหมุด B.M.A. เท่ากับ 1.4477 ม. เป็นค่าคงที่หรือจุดบังคับในการคำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับ สำหรับภาคเหนือและภาคตะวันออกเฉียงเหนือใช้ค่าระดับจากผลของการปรับแก้ภาคกลาง เป็นค่าคงที่ในการปรับแก้ของส่วนต่อไป น้ำหนักของค่าสังเกตใช้ตามหลักการของสมการ (4 - 4)

---

\* เนื่องจากค่าต่างระดับจาก spirit leveling กับค่าต่างระดับออร์ธอเมตริก เมื่อนำมาทำเป็นวงจรปิด จะทำให้ค่าคลาดบรรจบไม่แตกต่างกันมาก ดังนั้นในขั้นนี้จึงยังไม่มี การตรวจแก้ออร์ธอเมตริกให้กับค่าต่างระดับ

#### 4.6.1 วิธีตรวจสอบ gross errors จากการคำนวณปรับแก้

ในขั้นต้นได้ใช้ค่าสังเกต\* จากข้อมูลทั้งหมดมาทำการปรับแก้ ถ้าผลลัพธ์ออกมาได้ค่า  $\hat{\sigma}_0^2$  โดดกว่าค่า  $\sigma_0^2$  ก่อนการปรับแก้มาก นั้นเป็นการแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองของโครงข่ายระดับมีความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่แฝงอยู่จริง

หลักการตรวจสอบค่าสังเกตที่มี gross errors แฝงอยู่นั้นใช้การพิจารณาหาค่าสังเกตที่มีเศษคงเหลือ (V) มากออก ประกอบกับดูการเปลี่ยนแปลงของค่า  $\hat{\sigma}_0^2$  ภายหลังจากการปรับแก้ครั้งต่อไป จากการทดลองปรับแก้หลาย ๆ ครั้ง โดยตัดค่าสังเกตที่คาดว่ามีความ gross errors ออก ถ้าค่า  $\hat{\sigma}_0^2$  ที่ได้ใหม่มีการเปลี่ยนแปลงเข้าใกล้  $\sigma_0^2$  ตามที่กำหนดไว้ก่อนการปรับแก้ครั้งแรก นั้นหมายถึงเราได้กำจัดค่าสังเกตที่มี gross errors ถูกจุดจนในที่สุดจะได้ค่า  $\hat{\sigma}_0^2$  ใกล้เคียงกับ  $\sigma_0^2$  อยู่ในเกณฑ์ที่น่าเชื่อถือ ดังผลการทดลองปรับแก้แสดงไว้ในตาราง 4.1 ส่วนรายละเอียดข้อมูลการคำนวณปรับแก้เบื้องต้นแต่ละภูมิภาคแสดงไว้ในตาราง ข.2-1, ข.2-2 และ ข.2-3 ตามลำดับ

ควรจะหมายเหตุไว้ในที่นี้ว่า ค่าสังเกตที่มีเศษคงเหลือมากนั้นไม่ได้หมายความว่าค่าสังเกตนั้น ๆ จะมี gross errors เสมอไป (Kriengkraipet, 1979, p. 26) และการตรวจสอบ gross errors บางคนก็ใช้เกณฑ์ของเศษคงเหลือต้องไม่เกินกว่า  $2.5 \hat{\sigma}_0$  แต่อย่างไรก็ตามปัญหานี้สำหรับบางกรณีก็ยังคงอยู่ระหว่างการวิจัย (วิชา, 2524, หน้า 10-7)

---

\* เป็นค่าต่างระดับที่ยังไม่มีการตรวจแก้ค่าออร์ธอเมตริก

ตารางที่ 4.1 รายละเอียดปรับแก้โครงข่ายระดับเบื้องต้นตามภูมิภาค

| ลำดับที่ | โครงข่ายระดับ         |        | ค่าระดับคงที่ (เมตร)                      |                          | จำนวน<br>พารามิเตอร์ | จำนวนค่าสังเกต |           | $\sigma^2 = 1.0$       |                        |
|----------|-----------------------|--------|---|--------------------------|----------------------|----------------|-----------|------------------------|------------------------|
|          | พื้นที่               | รูปที่ | หมวดระดับ                                 | ค่าปลัดตั้ง              |                      | $n^{(1)}$      | $n^{(2)}$ | $\hat{\sigma}_o^2 (1)$ | $\hat{\sigma}_o^2 (2)$ |
| 1        | ภาคกลาง               | ช.2    | B.M.A. = 1.4477                           | ต. เกาะหลัก              | 16                   | 28             | 27        | 2.518                  | 1.448                  |
| 2        | ภาคเหนือ              | ช.3    | B.M.P.27 = 7.0959<br>B.M.P.673 = 237.1741 | บ. ภาษี<br>ต. ทนองบัวโคก | 33                   | 46             | 42        | 6.917                  | 1.017                  |
| 3        | ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ | ช.4    | B.M.P.43 = 15.9998<br>B.M.P.800 = 13.343  | ลพบุรี<br>กปินทรบุรี     | 28                   | 45             | 41        | 6.956                  | 1.243                  |

เมื่อ  $n^{(1)}$  คือจำนวนค่าสังเกตจากข้อมูลทั้งหมดในการปรับแก้ครั้งแรก

$n^{(2)}$  คือจำนวนค่าสังเกตในการปรับแก้ครั้งสุดท้าย

ส่วนผลการทดสอบทางสถิติของค่า  $\hat{\sigma}_o^2$  เทียบกับ  $\sigma_o^2$  อยู่ในบทต่อไป

## 4.6.2 การหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานโดยกฎของการแพร่

(Standard deviation by rule of propagation)

จากผลลัพธ์ครั้งสุดท้ายของการปรับแก้โครงข่ายระดับเบื้องต้นเป็นส่วน ๆ ตามภูมิภาค บรรดาค่าสังเกตที่มี gross errors ได้ถูกกำจัดออกไปจากโครงข่ายระดับชั้นหนึ่ง จึงทำให้ค่าระดับ (พารามิเตอร์) ที่ได้หลังการปรับแก้เป็นค่าที่น่าเชื่อถือที่สุด และขณะเดียวกันจะได้แมทริกซ์ความแปรปรวนของพารามิเตอร์ ( $\Sigma_{Xa}$ ) ด้วย

เมื่อให้  $L_b^*$  เป็นค่าสังเกตที่มี gross errors และตัดออกไป

$L_a^*$  เป็นค่าสังเกตที่ตรงกัน ซึ่งได้จากผลต่างของพารามิเตอร์ทั้งสองภายหลังจากการปรับแก้ครั้งสุดท้าย

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ  $L_a^*$  เราสามารถหาได้จากกฎของการแพร่:

$$\text{จาก } L_a = F(X_a)$$

$$\text{จะได้ว่า } \Sigma_{La} = G \Sigma_{Xa} G'$$

$$\text{เมื่อ } G = \frac{\partial F}{\partial X_a}$$

โครงข่ายระดับภาคกลาง จากรูปที่ ข.2 ค่าสังเกตที่  $\ell_{28}$  เป็นส่วนที่ถูกตัดออกไปจากการปรับแก้

โดยที่

$$\ell_{28\epsilon} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{9a} \\ X_{13a} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{Xa} = \begin{bmatrix} 314.1 & 265.7 \\ 265.7 & 401.5 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{La} = G \Sigma_{Xa} G' = 184.2 \text{ (ม.ม.)}^2$$

$$\sigma_{\ell_{28a}} = 13.6 \text{ ม.ม.}$$



$$\Sigma_{La} = G \Sigma_{Xa} G' = \begin{bmatrix} 170.9 & 2.0 & -0.4 & 1.4 & 0.5 & 0.1 & -0.4 \\ & 100.5 & -8.5 & -25.5 & -2.2 & 2.3 & -13.8 \\ & & 56.3 & 5.4 & -31.0 & 5.6 & -4.1 \\ & & & 69.9 & -6.2 & -1.3 & 4.3 \\ & & & & 71.4 & 7.9 & -3.1 \\ & & & & & 111.3 & 22.2 \\ & & & & & & 85.3 \end{bmatrix}$$

Symmetric

เวกเตอร์ของ  $\Delta \sigma_{La}$  คือ

$$\begin{bmatrix} \Delta_{43a} \\ \Delta_{44a} \\ \Delta_{45a} \\ \Delta_{46a} \\ \Delta_{47a} \\ \Delta_{48a} \\ \Delta_{49a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.1 \\ 10.0 \\ 7.5 \\ 8.4 \\ 8.4 \\ 10.5 \\ 9.2 \end{bmatrix} \quad (\text{ม.ม.})$$

โครงข่ายระดับภาคตะวันออกเฉียงเหนือ จากรูปที่ ข.4 ค่าสังเกตที่  $\Delta_{42}$ ,  $\Delta_{43}$ ,  $\Delta_{44}$ ,

$\Delta_{45}$  และ  $\Delta_{46}$  เป็นส่วนที่ถูกตัดออกจากการปรับแก้

แบบจำลองเชิงคณิตในรูปของแมทริกซ์ (สมการ 4 - 9) นี้ แสดงเฉพาะเซ็ทย่อยของค่าที่

จะตัดออกจากโครงข่ายระดับ)

$$\begin{bmatrix} \Delta_{42} \\ \Delta_{43} \\ \Delta_{44} \\ \Delta_{45} \\ \Delta_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_9 \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \\ X_{15} \\ X_{18} \\ X_{22} \\ X_{25} \end{bmatrix} \quad (4 - 9)$$



ผลจากการปรับแก้จะได้  $\Sigma_{Xa}$  มีหน่วยเป็น (ม.ม.)<sup>2</sup>

$$\Sigma_{Xa} = \begin{bmatrix} 131.1 & 33.8 & 116.8 & 116.9 & 114.3 & 115.9 & 105.0 & 113.1 \\ & 224.7 & 33.9 & 34.0 & 32.8 & 33.7 & 31.5 & 32.9 \\ & & 197.6 & 190.5 & 134.6 & 185.9 & 121.2 & 155.7 \\ & & & 191.8 & 134.1 & 180.4 & 120.7 & 153.2 \\ & & & & 163.8 & 138.3 & 136.9 & 145.8 \\ & \text{Symmetric} & & & & 230.0 & 125.8 & 175.3 \\ & & & & & & 241.7 & 141.0 \\ & & & & & & & 226.0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{La} = F \Sigma_{Xa} G' = \begin{bmatrix} 354.5 & 33.1 & -343.0 & 4.3 & -18.8 \\ & 185.7 & -48.1 & -17.0 & -0.8 \\ & & 387.3 & 49.9 & 23.4 \\ & & & \text{Symmetric} & & 61.0 & 5.2 \\ & & & & & & 66.3 \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ของ  $\frac{\Delta}{\sigma_{La}}$  คือ

$$\begin{bmatrix} l_{42a} \\ l_{43a} \\ l_{44a} \\ l_{45a} \\ l_{46a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.8 \\ 13.6 \\ 19.7 \\ 7.8 \\ 8.1 \end{bmatrix}$$

(ม.ม.)

ตารางที่ 4.2 การวิเคราะห์ค่าสังเกตที่มี gross errors

| โครงข่ายระดับ                         | ค่าสังเกต<br>ที่ | ปีทำการ<br>พ.ศ. | ระยะทาง<br>(ก.ม.) | $S^2$<br>(มม. <sup>2</sup> /กม.) | $L_b^*$<br>(ม.) | $\sigma_{Lb}$<br>(ม.ม.) | $L_a^*$<br>(ม.) | $\frac{\Delta}{\sigma_{La}}$<br>(ม.ม.) | $\Delta$<br>(ม.ม.) | $\frac{\Delta}{\sigma_{\Delta}}$<br>(ม.ม.) | $\sqrt{K}$<br>4mm. $\sqrt{K}$ | $\sqrt{K}$<br>8mm. $\sqrt{K}$ |
|---------------------------------------|------------------|-----------------|-------------------|----------------------------------|-----------------|-------------------------|-----------------|--|--------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| ภาคกลาง<br>(รูปที่ ข.2)               | ๕28              | 2458,<br>2460   | 132.642           | 1.03                             | 225.6806        | 11.7                    | 225.6251        | 13.6                                   | +60.9              | 17.9                                       | 46                            | 92                            |
| ภาคเหนือ<br>(รูปที่ ข.3)              | ๕45              | 2502            | 95.926            | 0.64                             | -55.2872        | 7.8                     | -55.2310        | 7.5                                    | -56.2              | 10.8                                       | 39                            | 78                            |
|                                       | ๕44              | 2520            | 87.681            | 1.36                             | -12.5476        | 10.9                    | -12.4730        | 10.0                                   | -74.6              | 14.8                                       | 38                            | 75                            |
|                                       | ๕43              | 2487            | 81.121            | 0.92                             | 109.0723        | 8.6                     | 109.1495        | 13.1                                   | -77.2              | 15.7                                       | 36                            | 72                            |
|                                       | ๕48*             | 2516            | 85.321            | 1.20                             | 52.8012         | 10.1                    | 52.6962         | 10.5                                   | +105.0             | 14.6                                       | 37                            | 74                            |
|                                       | ๕47*             | 2511            | 77.847            | 1.07                             | -62.3730        | 9.1                     | -62.5164        | 8.4                                    | +143.4             | 12.4                                       | 35                            | 71                            |
|                                       | ๕49*             | 2470            | 19.964            | 1.00                             | 5.9728          | 4.4                     | 6.1440          | 9.2                                    | -171.2             | 10.2                                       | 18                            | 36                            |
| ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ<br>(รูปที่ ข.4) | ๕42              | 2520            | 109.582           | 0.87                             | -87.2877        | 9.8                     | -87.3424        | 18.8                                   | +54.7              | 21.2                                       | 42                            | 84                            |
|                                       | ๕14              | 2497            | 110.754           | 1.10                             | 25.0961         | 11.0                    | 25.1527         | 19.7                                   | -56.6              | 22.6                                       | 42                            | 84                            |
|                                       | ๕45              | 2497            | 169.518           | 1.11                             | 107.6465        | 13.7                    | 107.5732        | 7.8                                    | +73.3              | 15.8                                       | 52                            | 104                           |
|                                       | ๕43              | 2501            | 281.013           | 0.79                             | -5.8585         | 14.9                    | -5.7738         | 13.6                                   | -84.7              | 20.2                                       | 67                            | 134                           |
|                                       | ๕46*             | 2481            | 62.971            | 1.50                             | 4.6833          | 9.7                     | 4.5311          | 8.1                                    | +157.2             | 12.6                                       | 32                            | 63                            |

หมายเหตุ :  $\Delta = L_b^* - L_a^*$

#### 4.7 วิเคราะห์ผลของค่าสังเกตที่มี gross errors

จากสัญลักษณ์  $L_b^*$  และ  $L_a^*$  ตามความหมายในหัวข้อ 4.6.2 หาความต่างของปริมาณทั้งสอง ( $\Delta$ ) หรือ  $v$

$$\Delta = L_b^* - L_a^*$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_{Lb}^2 + \sigma_{La}^2 \quad (\text{เพราะว่า } \rho_{La, Lb} = 0)$$

โดยที่  $\sigma_{Lb}^2$  คำนวณได้ตามหลักการของสมการ (4 - 4)

$\sigma_{La}^2$  ได้จากการคำนวณในหัวข้อ 4.6.2

เมื่อได้ค่าความต่าง ( $\Delta$ ) พร้อมกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( $\sigma_{\Delta}$ ) จึงนำไปเปรียบเทียบกับเกณฑ์งานระดับชั้นหนึ่ง ถ้าเกิน 4 ม.ม.  $\sqrt{K}$  (K ระยะทางเป็น ก.ม.) ย่อมแสดงว่าเส้นทางระดับ (ค่าสังเกต  $L_b^*$ ) นั้น ๆ มี gross errors แต่ถ้าค่าความต่าง ( $\Delta$ ) ไม่เกินเกณฑ์ 8 ม.ม.  $\sqrt{K}$  อาจถือได้ว่า เส้นทางระดับนั้นอยู่ในเกณฑ์ต่ำกว่างานระดับชั้นสอง ดังรายละเอียดแสดงไว้ในตารางที่ 4.2

#### 4.8 คำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับชั้นหนึ่งพร้อมกัน

ภายหลังจากการวิเคราะห์ตัดค่าสังเกตที่มี gross errors ออกหมดแล้ว ส่วนที่เหลือจึงเป็นข้อมูลที่มีคุณสมบัติพอที่จะคำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับพร้อมกันต่อไป เนื่องจากค่าระดับสูงที่ต้องการในงานรังวัดควบคุมทางดิ่งคือ ระดับสูงออร์ธอเมตริก (orthometric height) ดังนั้นค่าต่างระดับที่ได้จากงานระดับต้องเปลี่ยนเป็นค่าต่างระดับออร์ธอเมตริกเสียก่อนที่จะนำไปคำนวณปรับแก้ โดยที่

$$\Delta H_{12} = \Delta n_{12} + E_{12}$$

เมื่อ  $\Delta n_{12}$  คือข้อมูลจากงานระดับ (spirit leveling)

$E_{12}$  คือค่าตรวจแก้ออร์ธอเมตริก

$\Delta H_{12}$  คือค่าต่างระดับออร์ธอเมตริก

#### 4.8.1 คำนวณค่าตรวจแก้ออร์ธอเมตริก (Orthometric correction)

จากสมการ (ข. - 5) จะได้ค่าตรวจแก้ออร์ธอเมตริก ( $E_{12}$ )

$$E_{12} = 1 \int^2 \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn + \frac{\bar{g}_1 - \gamma_0}{\gamma_0} H_1 - \frac{\bar{g}_2 - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H_2$$

จะเห็นได้ว่าต้องทราบค่าแรงดึงดูดพิภพ ( $g$ ) ตลอดเส้นทางระดับ (จากจุด 1 ถึง 2) ซึ่งหมายความว่าค่าต่างระดับออร์ธอเมตริกควรมีการวัดค่าแรงดึงดูดพิภพโดยตรง

แต่ลักษณะของงานวัดแรงดึงดูดพิภพที่ผ่านมา มีความมุ่งหมายเพื่อรวบรวมข้อมูลส่งไปยังสหภาพยิปอเดซีและยิปอฟิสิกส์ระหว่างประเทศ (International Union of Geodesy and Geophysics) \* ซึ่งประเทศไทยเป็นสมาชิกอยู่ ทั้งนี้เพื่อเป็นการศึกษาหารูปปร่างที่แท้จริงของโลก (geoid) โดยใช้ข้อมูลแรงดึงดูดพิภพทั่วโลก ดังแผนที่รายงานผลงานการวัดค่าแรงดึงดูดพิภพ ในรูปที่ ข.10

สำหรับประเทศไทยเอง ข้อมูลแรงดึงดูดพิภพที่ผ่านมายังมีได้มีการประยุกต์ใช้กับงานยิปอเดซีแต่อย่างใด จะเห็นได้จากแผนงานการวัดค่าแรงดึงดูดพิภพกับแผนงานระดับชั้นหนึ่ง ไม่ค่อยจะสอดคล้องกัน เป็นผลให้เส้นทางระดับบางเส้นทางในโครงข่ายยังไม่มี การวัดค่าแรงดึงดูดพิภพ โดยเฉพาะบริเวณภูเขาสูง เมื่อข้อมูลแรงดึงดูดพิภพไม่สมบูรณ์เพียงพอดังกล่าว การปรับแก้โครงข่ายระดับครั้งนี้ จึงใช้สูตรประมาณในการหาค่าตรวจแก้ออร์ธอเมตริก (Normal orthometric correction) Bomford (1971, p. 230) แสดงสูตรไว้ดังนี้

$$E_{12}^{(n)} = -0.005302 H_m \sin 2\phi_m \Delta\phi'' \sin 1''$$

เมื่อ  $E_{12}^{(n)}$  คือค่าตรวจแก้ออร์ธอเมตริกจากจุด 1 ไป 2

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$H_m, \phi_m$  คือค่าระดับสูงและละติจูดปานกลางตามลำดับผลลัพธ์ของค่าตรวจแก้  $E_{12}^{(n)}$  แสดงในตารางที่ ข.3 และการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากสูตร  $E_{12}$  และ  $E_{12}^{(n)}$  ได้กล่าวไว้ในภาคผนวก ค.

\* ใช้คำย่อเป็น " I.U.G.G."

#### 4.8.2 คำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับตอนเหนือของเกาะหลัก

ด้วยสถานีวัดระดับน้ำทะเลปานกลางที่ ต. เกาะหลัก ทำการวัดระดับน้ำติดต่อกันมามากกว่า 19 ปี ได้ค่าระดับของหมุด B.M.A. ใหม่เป็น 1.4267 ม.\* ซึ่งใช้ค่านี้เป็นค่าระดับคงที่ในการปรับแก้โครงข่ายระดับพร้อมกัน (เดิมใช้ B.M.A. = 1.4477 ม.) จากรูปโครงข่ายระดับตอนเหนือเกาะหลัก รูปที่ ข.6 มีจำนวนค่าสังเกต (n) เท่ากับ 96 และจำนวนพารามิเตอร์ (u) เท่ากับ 62 ใช้ค่าต่างระดับออร์ธอเมตริก จากตารางที่ ข.3 เป็นเวคเตอร์ของค่าสังเกต

การประกอบสมการปกติ (normal equations) ปฏิบัติตามหัวข้อ 4.3 ใช้ข้อมูลจากตารางที่ ข.4-1 (input data) คำนวณปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ หน้าหนักของค่าสังเกตใช้ตามหลักการของสมการ (4 - 4) ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวในบทต่อไป

ผลลัพธ์ของพารามิเตอร์หลังจากการปรับแก้เป็นค่าระดับสูงออร์ธอเมตริก พร้อมกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมัน ส่วนขนาดของเศษคงเหลือ (V) แสดงไว้ในรูปที่ ข.7 ได้มีการเปรียบเทียบค่าระดับสูงที่ใช้อยู่เดิมกับค่าระดับสูงใหม่ ดังรายละเอียดแสดงไว้ในตารางที่ ข.5-1 และรูปที่ ข.9 โดยกำหนดให้

$$H_0 = \text{ค่าระดับสูงที่ใช้อยู่เดิม}$$

$$H_a^{(1)} = \text{ค่าระดับสูงจากการปรับแก้ ใช้ค่าระดับ B.M.A. = 1.4477 ม. เป็นค่าอ้างอิง}$$

$$H_a^{(2)} = \text{ค่าระดับสูงจากการปรับแก้ใช้ค่าระดับ B.M.A. = 1.4267 ม. เป็นค่าอ้างอิง}$$

$$\hat{\sigma}_{Ha} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานภาคคะเนของ } H_a$$

$$\Delta = H_a^{(1)} - H_0$$

\* รายละเอียดค่าระดับของหมุด B.M.A. กล่าวไว้ในภาคผนวก ก.

#### 4.8.3 จำนวนปรับแก้โครงข่ายระดับตอนใต้ของเกาะหลัก

จากรูป ข.5 ใช้หมุดระดับ B.M.A. เป็นค่าคงที่ ได้จำนวนค่าสังเกต ( $n$ ) = 25 และจำนวนพารามิเตอร์ ( $u$ ) = 18 ใช้ข้อมูลในตาราง ข.4-2 จำนวนปรับแก้โครงข่ายระดับโดยใช้น้ำหนักของค่าสังเกตตามหลักการของสมการ (4 - 4) ผลลัพธ์หลังจากการปรับแก้แสดงในตาราง ข.5-2 ควรหมายเหตุไว้ที่นี่ว่าจุดพารามิเตอร์ที่ 4 และ 5 ความจริงเป็นจุดเดียวกัน สาเหตุที่แยกเป็น 2 ค่า เพราะเส้นทางระดับ  $\ell_5$  และ  $\ell_7$  ทำการวัดในปี 2469 ส่วน  $\ell_6$  ทำการวัดในปี 2521 (ต่างกัน 52 ปี) ครั้นเมื่อทำเป็นวงจรมัด จำนวนได้ค่าคลาดบรรจบเท่ากับ 205.3 ม.ม. ในขณะที่เกณฑ์ยอมให้เพียง 88 ม.ม. จะเห็นได้ว่าเกินเกณฑ์มาก เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่าระดับของหมุดระดับ B.M.P. 110 (อ. หลังสวน) จึงได้แยกเป็น 2 พารามิเตอร์ดังกล่าว ผลปรากฏว่าค่าระดับใหม่จากงานปี 2521 น้อยกว่าระดับเดิมประมาณ 19.8 ซม.