# บทที่ 2

# การวิเคราะห์



## 2.1 เบื้องต้น

หลักการวิเคราะห์โครงข้อหมุนสามมิติโดยประมาณที่จะกล่าวดังต่อไปนี้ เป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ใช้กับโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ โดยมีคอร์ดบนและคอร์ดล่างขนานกัน และมีระยะห่างของคอร์ดบนและคอร์ดล่างในแนวแกน x และ y เท่ากัน ซึ่งการวิเคราะห์โดยประมาณนั้น จำลองโครงสร้างของโครงข้อหมุนสามมิติให้เป็นโครงสร้างสองมิติ โดยถือว่า ความหนาของโครงข้อหมุนสามมิติเมื่อเทียบกับความยาวของด้านแล้วจะน้อยมาก ฉะนั้นจึงจำลองโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ให้เป็นโครงสร้างเปลือกบางที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ ซึ่งพฤติกรรมในพิกัดยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางหาได้โดยวิธีประมาณของ LEE, S.L. และ Ballesteros, P[6] แล้วให้คอร์ดบนและคอร์ดล่างของโครงข้อหมุนสามมิติรับโมเมนต์ดัดไว้ทั้งหมด โมเมนต์ดัดทั้งหมดนั้น สามารถแปลงเป็นแรงดึงและแรงอัดได้ โดยอาศัยหลักการของแรงคู่ควบ โมเมนต์บิดและแรงเฉือนให้คอร์ดทะแยง (web) รับไว้ทั้งหมด ส่วนระยะโก่งก็หาค่าได้โดยตรงจากโครงสร้างเปลือกบาง โดยหาค่า EI (flexural rigidities) ที่แท้จริงของโครงข้อหมุนสามมิติออกมาแล้วนำไปแทนค่าลงในสมการของโครงสร้างเปลือกบาง

## 2.2 สมมุติฐานในการวิเคราะห์

ข้อสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. สมมุติให้วัสดุที่ประกอบเป็นโครงข้อหมุนสามมิติเป็นเนื้อเดียวตลอดความยาวและมีพฤติกรรมภายใต้การรับน้ำหนักอยู่ในพิกัดยืดหยุ่น (Elastic Limit)

2. ให้การถ่ายแรงของแต่ละชิ้นส่วนอยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วนเท่านั้น นั่นคือ การสมมุติให้แต่ละจุดเชื่อม (joint) มีลักษณะเป็นแบบข้อยึดหมุน (hinge)

3. ให้คอร์ดบนและคอร์ดล่าง (Upper chord and Lower chord) รับโมเมนต์ดัดไว้ทั้งหมด

4. ให้คอร์ดทะแยง (web) รับโมเมนต์บิดและแรงเฉือนไว้ทั้งหมด

5. ให้ความหนาของโครงสร้างเมื่อเทียบกับความยาวของด้านแล้วมีค่าน้อยมาก

6. ให้ระยะห่างระหว่างคอร์ดของคอร์ดบนและคอร์ดล่างในแนวแกนเดียวกันต้องเท่ากัน

7. ให้ที่รองรับตรงมุมของโครงข้อหมุนสามมิติเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller support)

8. โครงข้อหมุนสามมิติที่ใช้ในการวิเคราะห์จะต้องมีลักษณะสมมาตร

9. ไม่คิดโมเมนต์อินเนอร์เชียรอบแกนตัวเองของชิ้นส่วนในโครงข้อหมุนสามมิติ

## 2.3 วิธีการวิเคราะห์

วิธีการวิเคราะห์โดยประมาณสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่และมีลักษณะสมมาตร เมื่อมีน้ำหนักสม่ำเสมอมากระทำในแนวดิ่ง ซึ่งวิเคราะห์โดย LEE, S.L. และ Ballesteros, P. มีดังต่อไปนี้

สมการ biharmonic equation อยู่ในรูปของ polynomials สามารถสรุปโดย Girkmann ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่า การวิเคราะห์โดยประมาณสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ดังรูปที่ 3.2 สามารถที่จะสมมุติสมการระยะโก่งของโครงสร้างเปลือกบางที่มีลักษณะสมมาตร (ภาคผนวก ก) ได้ดังนี้

$$[w]_{x,y} = c_1 + c_2x^2 + c_3y^2 + c_4x^4 + c_5x^2y^2 + c_6y^4 \qquad (1)$$

เมื่อ $[w]_{x,y}$ = ระยะโก่งของโครงสร้างเปลือกบางที่จุดใด ๆ

$c_1 - c_6$ = ค่าคงที่

จากสมการของโครงสร้างเปลือกบางที่ปลายยึดปล่อย (Free edges)

$$[V_x]_{a,y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{a,y} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{a,y} = 0 \qquad (2)$$

$$[V_y]_{x,b} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\bigg|_{x,b} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]_{x,b} = 0 \qquad (3)$$

จากสมการ bihamonic Equation ของโครงสร้างเปลือกบาง

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{4}$$

แทนค่าสมการที่ (1) ลงในสมการ (2), (3) และ (4) จะได้

$$6c_4 + (2-\mu)\, c_5 = 0$$

$$(2-\mu)\, c_5 + 6c_6 = 0$$

$$24c_4 + 8c_5 + 24c_6 = \frac{q}{D}$$

ซึ่งสามารถหาค่า $c_4$, $c_5$ และ $c_6$ ได้โดย

$$c_4 = c_6 = \frac{(2-\mu)}{48(1-\mu)} \frac{q}{D}$$

$$c_5 = \frac{-q}{8(1-\mu)D}$$

แทนค่า $c_4$, $c_5$ และ $c_6$ ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$w = c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2 + \frac{q}{48(1-\mu)D}\left[ (2-\mu)(x^4+y^4) - 6x^2y^2 \right] \tag{5}$$

จากสมการ boundary condition ของโครงสร้างเปลือกบาง

$$\int_o^b \left[M_x\right]_{a,y} dy = -D \int_o^b \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{a,y} dy = 0 \tag{6}$$

$$\int_o^a \left[M_y\right]_{x,b} dx = -D \int_o^a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x,b} dx = 0 \qquad (7)$$

$$\left[w\right]_{a,b} = 0 \qquad (8)$$

แทนค่าสมการ (5) ลงในสมการ (6), (7) และ (8) จะได้

$$c_1 = \frac{qa^2b^2}{48(1-\mu^2)D}\left[(10+\mu-\mu^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2(7\mu-1)\right]$$

$$c_2 = \frac{qab}{24(1-\mu^2)D}\left[(1+5\mu)\frac{b}{a} - (6+\mu-\mu^2)\frac{a}{b}\right]$$

$$c_3 = \frac{qab}{24(1-\mu^2)D}\left[(1+5\mu)\frac{a}{b} - (6+\mu-\mu^2)\frac{b}{a}\right]$$

แทนค่า $c_1$, $c_2$ และ $c_3$ ลงในสมการ (5) จะได้

$$\begin{aligned}\left[w\right]_{x,y} = \frac{qa^4}{48(1-\mu^2)D}\Bigg[&(10+\mu-\mu^2)\left(1+\frac{b^4}{a^4}\right) - 2(7\mu-1)\frac{b^2}{a^2} \\ &+\left(2(1+5\mu)\frac{b^2}{a^2} - (6+\mu-\mu^2)\right)\frac{x^2}{a^2} \\ &+ 2\left((1+5\mu) - (6+\mu-\mu^2)\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{y^2}{a^2} \\ &+ (2+\mu-\mu^2)\frac{x^4+y^4}{a^4} - 6(1+\mu)\frac{x^2y^2}{a^4}\Bigg]\end{aligned} \qquad (9)$$

Differentiating สมการที่ (9) เพื่อหาค่าโมเมนต์ดัดจะได้

$$M_x = \frac{qa^2}{12}\left[6-(1-\mu)\frac{b^2}{a^2}-\frac{6x^2}{a^2} + 3(1-\mu)\frac{y^2}{a^2}\right] \qquad (10)$$

$$M_y = \frac{qa^2}{12}\left[\frac{6b^2}{a^2} - (1-\mu) - \frac{6y^2}{a^2} + 3(1-\mu)\frac{x^2}{a^2}\right] \tag{11}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 2D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= -\frac{qxy}{2} \tag{12}$$

$$V_x = -\frac{qx}{2} \tag{13}$$

$$V_y = -\frac{qy}{2} \tag{14}$$

แรงกระทำตรงมุมที่รองรับ

$$R = 2D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]_{a,b}$$

$$= -qab \tag{15}$$

เนื่องจากการจำลองโครงข้อหมุนสามมิติให้เป็นโครงสร้างเปลือกบาง

ทำให้ค่า $\mu = 0$ จากสมการ (10) และ (11) จะได้

$$M_x = \frac{qa^2}{12}\left[6 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{6x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{a^2}\right] \tag{16}$$

$$M_y = \frac{qa^2}{12}\left[\frac{6b^2}{a^2} - 1 - \frac{6y^2}{a^2} + \frac{3x^2}{a^2}\right] \tag{17}$$

โมเมนต์รวมตลอดหน้าตัดในแนวแกน x

$$\int_o^b [M_x]_{x,y}\, dy = \frac{qb}{2}(a^2 - x^2)$$

โมเมนต์รวมตลอดหน้าตัดในแนวแกน y

$$\int_o^a [M_y]_{x,y}\, dx = \frac{qa}{2}(b^2 - y^2)$$

ระยะโก่งสูงสุด

$$W_m = \frac{qa^4}{24EI}\left[5+\frac{b^2}{a^2}+\frac{5b^4}{a^4}\right]$$



2.3.1 <u>การวิเคราะห์หาแรงสูงสุดของคอร์ดบนและคอร์ดล่าง</u>

การวิเคราะห์หาแรงสูงสุดของคอร์ดบนและคอร์ดล่างโดยวิธีประมาณของโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ในที่นี้มีลักษณะคล้ายกับการวิเคราะห์แผ่นพื้นไร้คานในมาตรฐานสำหรับอาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก ปี 2517 ของ ว.ส.ท.(12) ซึ่งทำโดยการ Integral หาโมเมนต์ตลอดหน้าตัดที่คาดว่าจะเกิดแรงสูงสุดในชิ้นส่วนนั้น แล้วแปลงโมเมนต์ดัดทั้งหมด มาเป็นแรงรวมทั้งหมดตลอดหน้าตัด เมื่อได้แรงรวมทั้งหมดตลอดหน้าตัดแล้วก็เอามาหาค่าแรงที่สูงสุดในชิ้นส่วนโดยแบ่งเป็นอัตราร้อยละของแรงรวมทั้งหมด ซึ่งจากการวิเคราะห์โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ปรากฏว่า จากการเขียนกราฟระหว่าง b/a กับอัตราร้อยละแรงสูงสุดของแรงรวมทั้งหมดโดยให้ค่า $n_x$ คงที่ และ $n_y$ แปรผันสำหรับโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่ โดยจุดต่อเชื่อมระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่างเป็น

รูปปิรามิดคว่ำจะมีลักษณะเป็นกราฟรูปที่ 4.2 และ 5.2

รูปปิรามิดหงายจะมีลักษณะเป็นกราฟรูปที่ 6.2 และ 7.2

ถ้าเขียนกราฟระหว่าง $n_x = n_y$ กับอัตราร้อยละแรงสูงสุดของแรงรวมทั้งหมด โดยให้ค่า $\frac{b}{a} = 1$ สำหรับโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดรองรับตรงมุมทั้งสี่โดยจุดต่อเชื่อมระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่างเป็น

รูปปิรามิดคว่ำจะมีลักษณะเป็นกราฟรูปที่ 8.2

รูปปิรามิดหงายจะมีลักษณะเป็นกราฟรูปที่ 9.2

จากกราฟจะเห็นได้ว่า อัตราร้อยละแรงสูงสุดของแรงรวมทั้งหมดจะขึ้นกับ

1. จำนวนคอร์ดในแนวแกน x และแกน y ($n_x$ และ $n_y$)

2. อัตราส่วนความยาวของด้าน ($\frac{b}{a}$)

ดังนั้นเราจึงสามารถที่จะสร้างสมการทางพีชคณิต เพื่อจะแทนรูปกราฟ เหล่านั้นในรูปของ $n_x$, $n_y$ และ $\frac{b}{a}$ ได้ดังนี้

สำหรับโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดต่อ เชื่อมระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่าง เป็นรูปปิรามิดคว่ำ ดังรูปที่ 1 อัตราร้อยละแรงสูงสุดของแรงรวมทั้งหมดจะได้สมการดังนี้

ในแนวแกน x

$$\%F_{xu} = \frac{138}{\left[n_{xu}\right]^{[0.62]}} - \frac{7}{\left[\frac{b}{a}\right]^{[2n_{yu}]}}$$

$$\%F_{xL} = \frac{145}{\left[n_{xL}\right]^{[0.65]}} - \frac{6}{\left[\frac{b}{a}\right]^{[2n_{yL}]}}$$

ในแนวแกน y

$$\%F_{yu} = \frac{101}{\left[n_{xu}\right]} + \frac{29\left[1+\frac{(n_{xu}-3)}{30}\right]}{\left[\frac{b}{a}\right]^{\left[0.7n_{yu}\right]\left[1+\frac{(n_{xu}-3)}{10}\right]^{\left[1+\frac{(n_{xu}-3)}{10}\right]}}}$$

$$\%F_{yL} = \frac{102}{\left[n_{xL}\right]} + \frac{32.5\left[1+\frac{(n_{xL}-4)}{30}\right]}{\left[\frac{b}{a}\right]^{\left[0.58n_{yL}\right]\left[1+\frac{(n_{xL}-2.5)}{10}\right]^{\left[1+\frac{(n_{xL}-2.5)}{10}\right]}}}$$

สำหรับโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดต่อ เชื่อมระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่าง เป็นรูปปิรามิดหงาย ดังรูปที่ 2 อัตราร้อยละแรงสูงสุดของแรงรวมทั้งหมดจะได้สมการดังนี้

ในแนวแกน x

$$\%F_{xu} = \frac{56.5}{[n_{xu}]^{[0.28]}} - \frac{2}{\left[\frac{b}{a}\right]^{[2n_{yu}]}}$$

$$\%F_{xL} = \frac{77}{[n_{xL}]^{[0.50]}} + \frac{4.5}{\left[\frac{b}{a}\right]}$$

ในแนวแกน y

$$\%F_{yu} = \frac{103}{[n_{xu}]} + \frac{2.5[n_{xu}] - 300[0.2]^{[n_{xu}]}}{\left[\frac{b}{a}\right]^{[0.62n_{yu}]}\left[1+\frac{(n_{xu}-4.5)}{15}\right]}$$

$$\%F_{yL} = \frac{101}{[n_{xL}]} + \frac{15.5 + n_{xL} - 200[0.2]^{[n_{xL}]} - [1.2]^{[n_{xL}]}}{\left[\frac{b}{a}\right]^{[0.48n_{yL}]}}$$

แรงรวมทั้งหมดตลอดหน้าตัดในแนวแกน x

$$F_{xT} = \int_{o}^{b} \frac{[M_x]\ x,y}{H}$$

$$= \frac{qb}{2H}(a^2 - x^2)$$

แรงรวมทั้งหมดตลอดหน้าตัดในแนวแกน y

$$F_{yT} = \int_o^a \frac{[M_y]}{H} x,y$$

$$= \frac{qa}{2H}(b^2-y^2)$$

แรงสูงสุดของคอร์ดบนหรือคอร์ดล่างในแนวแกน x

$$(F_{xum \text{ or } xLm}) = (\%F_{xu \text{ or } xL})(F_{xT})$$

แรงสูงสุดของคอร์ดบนหรือคอร์ดล่างในแนวแกน y

$$(F_{yum \text{ or } yLm}) = (\%F_{yu \text{ or } yL})(F_{yT})$$

### 2.3.2 การวิเคราะห์หาแรงสูงสุดของคอร์ดทะแยง

แรงสูงสุดของคอร์ดทะแยง กรณีโครงข้อหมุนสามมิติที่มีจุดต่อเชื่อมระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่างเป็น

รูปปิรามิดคว่ำ $F_{wm} = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{qab}{\cos\theta}$

รูปปิรามิดหงาย $F_{wm} = \frac{R}{3\cos\theta} = \frac{qab}{3\cos\theta}$

$\theta$ = มุมระหว่างคอร์ดทะแยงกับแนวดิ่ง

2.3.3 <u>การวิเคราะห์หาระยะโก่งสูงสุด</u>

$$W_{max} = \frac{qa^4}{24EI}\left[5 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right) + 5\left(\frac{b^4}{a^4}\right)\right]$$

โดยที่ $I = \frac{2\Sigma Ad^2}{h_1+h_2}$

ถ้า $h_1 = h_2$

$$I = \frac{\Sigma Ad^2}{h_1}$$

โดยที่ไม่คิดโมเมนต์อินเนอร์เชียรอบแกนตัวเองของชิ้นส่วนในโครงข้อหมุนสามมิติ